ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2019–20-3-143-153

Взаимосвязь между константами Никольского – Бернштейна для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа[1]

Д. В. Горбачев, И. А. Мартьянов

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Мартьянов Иван Анатольевич — аспирант, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Аннотация

Пусть $0 < p \leqslant \infty$, $\mathcal{C}(n;p;r) = \sup_T \frac{\|T^{(r)}\|_{L^\infty[0,2\pi)}}{\|T\|_{L^p[0,2\pi)}}$ и $\mathcal{L}(p;r) = \sup_F \frac{\|F^{(r)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\|F\|_{L^p(\mathbb{R})}}$ — точные константы Никольского–Бернштейна для r-х производных тригонометрических полиномов степени n и целых функций экспоненциального типа 1 соответственно. Недавно Е. Левин и Д. Любинский доказали, что для констант Никольского

$$\mathcal{C}(n;p;0) = n^{1/p}\mathcal{L}(p;0)(1+o(1)), \quad n \to \infty.$$

М. Ганзбург и С. Тихонов обобщили этот результат на случай констант Никольского–Бернштейна:

$$\mathcal{C}(n;p;r) = n^{r+1/p}\mathcal{L}(p;r)(1+o(1)), \quad n \to \infty.$$

Также они показали существование в этой задаче экстремальных полинома $\tilde{T}_{n,r}$ и функции $\tilde{F}_r$ соответственно. Ранее мы дали более точные границы в результате типа Левина–Любинского, доказав, что для всех p и n

$$n^{1/p}\mathcal{L}(p;0) \leqslant \mathcal{C}(n;p;0) \leqslant (n+\lceil 1/p\rceil)^{1/p}\mathcal{L}(p;0).$$

Здесь мы устанавливаем близкие факты для случая констант Никольского–Бернштейна, из которых также вытекает асимптотическое равенство Ганзбурга–Тихонова. Результаты формулируется в терминах экстремальных функций $\tilde{T}_{n,r}$, $\tilde{F}_r$ и коэффициентов Тейлора ядра типа Джексона–Фейера $(\frac{\sin \pi x}{\pi x})^{2s}$. Мы неявно используем полиномы типа Левитана, возникающие при применении равенства Пуассона. Мы формулируем одну гипотезу о знаках коэффициентов Тейлора экстремальных функций.

Ключевые слова: тригонометрический полином, целая функция экспоненциального типа, константа Никольского–Бернштейна, ядро Джексона–Фейера, полиномы Левитана.

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:
Д. В. Горбачев, И. А. Мартьянов. Взаимосвязь между константами Никольского – Бернштейна для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 143–153.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2019–20-3-143-153

Interrelation between Nikolskii – Bernstein constants for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type[2]

D. V. Gorbachev, I. A. Martyanov

Gorbachev Dmitry Viktorovich — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Tula).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Martyanov Ivan Anatol'evich — Graduate student, Department of applied mathematics and computer science, Tula State University (Tula).
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Abstract

Let $0 < p \leqslant \infty$, $\mathcal{C}(n;p;r) = \sup_T \frac{\|T^{(r)}\|_{L^\infty[0,2\pi)}}{\|T\|_{L^p[0,2\pi)}}$ and $\mathcal{L}(p;r) = \sup_F \frac{\|F^{(r)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\|F\|_{L^p(\mathbb{R})}}$ be the sharp Nikolskii–Bernstein constants for r-th derivatives of trigonometric polynomials of degree n and entire functions of exponential type 1 respectively. Recently E. Levin and D. Lubinsky have proved that for the Nikolskii constants

$$\mathcal{C}(n;p;0) = n^{1/p}\mathcal{L}(p;0)(1+o(1)), \quad n \to \infty.$$

M. Ganzburg and S. Tikhonov generalized this result to the case of Nikolskii–Bernstein constants:

$$\mathcal{C}(n;p;r) = n^{r+1/p}\mathcal{L}(p;r)(1+o(1)), \quad n \to \infty.$$

They also showed the existence of the extremal polynomial $\tilde{T}_{n,r}$ and the function $\tilde{F}_r$ in this problem, respectively. Earlier, we gave more precise boundaries in the Levin–Lubinsky-type result, proving that for all p and n

$$n^{1/p}\mathcal{L}(p;0) \leqslant \mathcal{C}(n;p;0) \leqslant (n + \lceil 1/p \rceil)^{1/p}\mathcal{L}(p;0).$$

Here we establish close facts for the case of Nikolskii–Bernstein constants, which also imply the asymptotic Ganzburg–Tikhonov equality. The results are stated in terms of extremal functions $\tilde{T}_{n,r}$, $\tilde{F}_r$ and the Taylor coefficients of a kernel of type Jackson–Fejer $(\frac{\sin \pi x}{\pi x})^{2s}$. We implicitly use Levitan-type polynomials arising from the Poisson summation formula. We formulate one hypothesis about the signs of the Taylor coefficients of the extremal functions.

Keywords: trigonometric polynomial, entire function of exponential type, Nikolskii–Bernstein constant, Jackson–Fejer kernel, Levitan polynomials.

Bibliography: 11 titles.

For citation:
D. V. Gorbachev, I. A. Martyanov, 2019, "Interrelation between Nikolskii – Bernstein constants for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 143–153.

[2]This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199).

1. Введение

Мы продолжаем исследование предельной связи констант Никольского–Бернштейна для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа, начатое в работах [9, 10, 5, 8]. Будем существенно использовать результаты и обозначения нашей работы [8].

Пусть $0 < p \leqslant \infty$, $Q \subseteq \mathbb{R}$, $L^p(Q)$ — лебегово пространство комплекснозначных функций с конечной нормой

$$\|f\|_{L^p(Q)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_Q |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, & 0 < p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Будем использовать привычное сокращение $\|f\|_p$, если из контекста ясно, о каком интервале Q идет речь. Через $\lfloor a \rfloor$, $\lceil a \rceil$, как обычно, обозначим наибольшее целое, не большее a, и наименьшее целое, не меньшее a соответственно.

Пусть $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_n[0, 2\pi)$ и $\mathcal{E}_\sigma$ — множество (комплекснозначных) 2π-периодических тригонометрических полиномов порядка не больше $n \in \mathbb{Z}_+$ и целых функций экспоненциального типа не больше $\sigma > 0$ соответственно. Положим для краткости $\mathcal{E}_\sigma^p = L^p(\mathbb{R}) \cap \mathcal{E}_\sigma$ и напомним, что функции $F \in \mathcal{E}_\sigma^p$, $p \in (0, \infty]$, ограничены на $\mathbb{R}$ и удовлетворяют оценке

$$|F(z)| \leqslant \|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})} e^{\sigma|\operatorname{Im} z|}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Для $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leqslant q \leqslant \infty$ через

$$\mathcal{C}(n; p, q; r) = \sup_{T \in \mathcal{T}_n \setminus \{0\}} \frac{\|T^{(r)}\|_{L^q[0,2\pi)}}{\|T\|_{L^p[0,2\pi)}} \tag{1}$$

и

$$\mathcal{L}(\sigma; p, q; r) = \sup_{F \in \mathcal{E}_\sigma^p \setminus \{0\}} \frac{\|F^{(r)}\|_{L^q(\mathbb{R})}}{\|F\|_{L^p(\mathbb{R})}} \tag{2}$$

обозначим точные константы Никольского–Бернштейна для r-х производных полиномов и функций соответственно. Хорошо известно, что они конечны. В силу однородности имеем

$$\mathcal{L}(\sigma; p, q; r) = \sigma^{r+1/p-1/q} \mathcal{L}(1; p, q; r),$$

поэтому достаточно изучать константу $\mathcal{L}(p, q; r) = \mathcal{L}(1; p, q; r)$.

При $p = q$ константы (1) и (2) известны как константы Бернштейна, а при $r = 0$ — константы Никольского. В настоящее время во всей общности для произвольного r они известны только при $p = q \in (0, \infty]$,

$$\mathcal{C}(n; p, p; r) = n^r, \quad \mathcal{L}(p, p; r) = 1, \tag{3}$$

где экстремальные функции это косинусы и синусы (в зависимости от четности r), а также в случае $(p, q) = (2, \infty)$, где экстремальными функциями являются ядра Дирихле. Обзор этих результатов см., например, в [5]. Для всех остальных параметров проблема остается открытой.

На наш взгляд, вычисление тригонометрической константы $\mathcal{C}(n; p, q; r)$ для всех n при фиксированных $0 < p < q \leqslant \infty$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ представляется особо сложной задачей. Поэтому большой интерес представляет следующее асимптотическое равенство, устанавливающее предельную связь между константами для полиномов и функций:

$$\mathcal{C}(n; p, \infty; r) = n^{r+1/p} \mathcal{L}(p, \infty; r)(1 + o(1)), \quad n \to \infty. \tag{4}$$

В случае неравенства Никольского ($r = 0$) оно было установлено в работе [9], а в общем случае $r \in \mathbb{Z}_+$ — в работе [5], где использовались свойства полиномов Левитана. Если $q \neq \infty$, то известна только нижняя оценка [10, 5]

$$\mathcal{C}(n;p,q;r) \geqslant n^{r+1/p-1/q}\mathcal{L}(p,q;r)(1+o(1)).$$

Вопрос о равенстве здесь является открытой проблемой. Для $q = \infty$ данную проблему удается разрешить во многом за счет следующего предложения (см. теоремы 1.1, 1.5 в работе [5] и их доказательство).

Предложение 1 ([5]). *При $p \in (0,\infty]$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ имеем*

$$\mathcal{C}(n;p,\infty;r) = \sup_{T\in\mathcal{T}_n\setminus\{0\}} \frac{|T^{(r)}(0)|}{\|T\|_{L^p[0,2\pi)}} \tag{5}$$

и

$$\mathcal{L}(p,\infty;r) = \sup_{F\in\mathcal{E}_1^p\setminus\{0\}} \frac{|F^{(r)}(0)|}{\|F\|_{L^p(\mathbb{R})}}. \tag{6}$$

Супремумы достигаются на действительных четных или нечетных (в зависимости от четности r) полиноме $\tilde{T}_{n,r}$ порядка n и функции $\tilde{F}_r$ типа 1 соответственно.

Причем при нормировке $\tilde{T}_{n,r}^{(r)}(0) = \tilde{F}_r^{(r)}(0) = 1$ найдется последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots$, такая что на каждом отрезке из $\mathbb{R}$ функция $\tilde{F}_r(x)$ является пределом $\tilde{T}_{n_j,r}(x/n_j)$ при $n_j \to \infty$.

Отметим следующий факт. Равенства (5) и (6) вытекают из достижимости экстремума в ∞-норме в некоторой точке x_0 и инвариантности классов относительно сдвига $f(\cdot) \mapsto f(\cdot + x_0)$. В случае полиномов существование точки x_0 очевидно. Для функций это также верно при $1 \leqslant p < \infty$, поскольку тогда они стремятся к нулю [11, 3.2.5]. Однако для $p = \infty$ в общем случае это неверно, например, для четной функции

$$1 - \left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \left(\frac{d}{dx}\,\frac{\sin x}{x}\right)^2\right) \in \mathcal{E}_2^{\infty}.$$

Нетрудно показать, что эта функция монотонно возрастает при $x \geqslant 0$ и стремится к 1 при $x \to \infty$, поэтому для нее точки x_0 не существует. В [5] этот момент не обсуждается, поэтому в пункте 2.3 мы приведем простое обоснование равенств (5) и (6), покрывающее весь диапазон $p \in (0,\infty]$.

Отметим, что данная тематика получила продолжение в весовом и многомерных случаях [1, 3, 3, 9, 4, 6]. При $q \neq \infty$ неясно, что является эквивалентом предложения 1.

Далее рассматривается только случай $q = \infty$, поэтому для краткости положим

$$\mathcal{C}(n;p;r) = \mathcal{C}(n;p,\infty;r), \quad \mathcal{L}(p;r) = \mathcal{L}(p,\infty;r).$$

В работе [8] мы уточнили равенство (4) для случая $r = 0$, показав, что

Предложение 2 ([8]). *Для всех $n \in \mathbb{Z}_+$*

$$n^{1/p}\mathcal{L}(p;0) \leqslant \mathcal{C}(n;p;0) \leqslant (n+1)^{1/p}\mathcal{L}(p;0), \quad p \geqslant 1, \tag{7}$$

и

$$n^{1/p}\mathcal{L}(p;0) \leqslant \mathcal{C}(n;p;0) \leqslant (n+\lceil 1/p\rceil)^{1/p}\mathcal{L}(p;0), \quad 0 < p < 1, \tag{8}$$

Из этого предложения также следует, что

$$\mathcal{C}(n;p;0) = n^{1/p}\mathcal{L}(p;0)(1+O(n^{-1})), \quad n\to\infty.$$

Однако основное значение данного предложения 2 видится в том, что оно позволяет оценить остаточный член в предельном соотношении (4). Мы использовали этот факт, чтобы уточнить константу $\mathcal{L}(1;0)$.

Подход, использованный для доказательства предложения 2, позволяет доказать следующий результат для константы Никольского–Бернштейна. Для его формулировки введем для $s\in\mathbb{N}$ ядро типа Джексона–Фейера

$$\varphi_s(x) = \Big(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\Big)^{2s} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k A_{s,k}(2\pi x)^{2k}}{(2k)!}, \quad A_{s,0}=1. \tag{9}$$

По индукции нетрудно показать, что здесь коэффициенты $A_{s,k}>0$.

Теорема 1. *Пусть $p\in(0,\infty]$, $r,n\in\mathbb{Z}_+$, $s\in\mathbb{N}$.*

(i) *Если $2s\geqslant r+1$, $n\geqslant s-1$, то для произвольной функции $F\in\mathcal{E}_1^p$, такой что $\|F\|_p=1$, имеем*

$$\mathcal{C}(n;p;r)\geqslant (n-s+1)^{r+1/p}\Bigg(F^{(r)}(0)+\sum_{i=1}^{\lfloor r/2\rfloor}\frac{(-1)^i\binom{r}{2i}A_{s,i}}{n^{2i}}\,F^{(r-2i)}(0)\Bigg).$$

(ii) *Если $n\geqslant 1$, $ps\geqslant 1$, то для произвольного полинома $T\in\mathcal{T}_n$, такого что $\|T\|_p=1$,*

$$T^{(r)}(0)+\sum_{i=1}^{\lfloor r/2\rfloor}(-1)^i\binom{r}{2i}A_{s,i}T^{(r-2i)}(0)\leqslant n^r(n+s)^{1/p}\mathcal{L}(p;r).$$

Прокомментируем теорему. Во-первых, в ней можно положить $s=\lceil (r+1)/2\rceil$ для (i) и $s=\lceil 1/p\rceil$ для (ii) (тогда значения факторов оптимальные). Во-вторых, если взять экстремальные функции $\tilde{T}_{n,r}$, $\tilde{F}_r$ из предложения 1, нормированные условиями $\tilde{T}_{n,r}^{(r)}(0)>0$, $\tilde{F}_r^{(r)}(0)>0$ и $\|\tilde{T}_{n,r}\|_p=\|\tilde{F}_r^{(r)}\|_p=1$ (напомним, что норма берется для соответствующего интервала), а также учесть, что для любого k в силу (3) и предложения 2

$$|\tilde{T}_{n,r}^{(k)}(0)|\leqslant n^k\|\tilde{T}_{n,r}\|_\infty\leqslant n^k\mathcal{C}(n;p;0)\leqslant n^k(n+\lceil 1/p\rceil)^{1/p}\mathcal{L}(p;0),$$

то получим

Следствие 1. *Имеем* (i)

$$\mathcal{C}(n;p;r)\geqslant (n-s+1)^{r+1/p}\Bigg(\mathcal{L}(p;r)+\sum_{i=1}^{\lfloor r/2\rfloor}\frac{(-1)^i\binom{r}{2i}A_{s,i}}{n^{2i}}\,\tilde{F}_r^{(r-2i)}(0)\Bigg)$$

и (ii)

$$\mathcal{C}(n;p;r)+\sum_{i=1}^{\lfloor r/2\rfloor}(-1)^i\binom{r}{2i}A_{s,i}\tilde{T}_{n,r}^{(r-2i)}(0)\leqslant n^r(n+s)^{1/p}\mathcal{L}(p;r),$$

где

$$|\tilde{T}_{n,r}^{(r-2i)}(0)|\leqslant n^{r-2i}(n+\lceil 1/p\rceil)^{1/p}\mathcal{L}(p;0).$$

Нетрудно видеть, что из этого следствия снова вытекает основное предельное соотношение (4). Тем не менее оно представляет интерес, поскольку дает дополнительную информацию об остаточном члене. Эта информация, как отмечено выше, может быть использована для численных оценок констант.

При $r=0$, полагая $s=1$ (i) и $s=\lceil 1/p\rceil$ (ii) получаем предложение 2. При $r=1$ имеем для $n\geqslant 1$

$$n^{1+1/p}\mathcal{L}(p;1)\leqslant \mathcal{C}(n;p;1)\leqslant n(n+\lceil 1/p\rceil)^{1/p}\mathcal{L}(p;1).$$

В связи с наличием фактора $(-1)^i$ в суммах из следствия 1 представляет интерес решить следующую задачу.

Гипотеза. *Знаки ненулевых коэффициентов Тейлора $\tilde{T}_{n,r}^{(j)}(0)$, $\tilde{F}_r^{(j)}(0)$ (как минимум до порядка r) чередуются.*

Если гипотеза верна, то при всех $p\in(0,\infty]$, $r\geqslant 0$ и $n\geqslant\lceil(r+1)/2\rceil-1$ ($n\geqslant 1$ при $r=1$)

$$(n-\lceil(r+1)/2\rceil+1)^{r+1/p}\mathcal{L}(p;r)\leqslant \mathcal{C}(n;p;r)\leqslant n^r(n+\lceil 1/p\rceil)^{1/p}\mathcal{L}(p;r).$$

Для $p=\infty$ экстремальными функциями являются косинусы (четные r) и синусы (нечетные r), поэтому гипотеза верна. Неравенства в гипотезе, как отмечено выше, также верны при $r=0,1$.

2. Доказательство теоремы 1

При $p=\infty$ в силу (3) имеем равенство

$$\mathcal{C}(n;\infty;r)=n^r\mathcal{L}(\infty;r),$$

поэтому далее пусть $p\in(0,\infty)$.

Воспользуемся предложением 1, а также доказательством предложения 2 из нашей работы [8] (повторяя некоторые выкладки для удобства чтения). В частности, с целью воспользоваться формулой суммирования Пуассона, будем работать с 1-периодическими полиномами и функциями типа не больше 2π:

$$t(x)=T(2\pi x)\in\mathcal{T}_n[0,1),\quad f(x)=F(2\pi x)\in\mathcal{E}_{2\pi}^p. \tag{10}$$

Напомним, что при этом можно ограничиться только действительными (четными или нечетными) полиномами и функциями. Через

$$\widehat{f}(y)=\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-2\pi ixy}\,dx,\quad y\in\mathbb{R},$$

обозначим преобразование Фурье.

2.1. Доказательство (i)

Пусть $n,s\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $2s\geqslant r+1$ и $f\in\mathcal{E}_{2\pi}^p$ — произвольная функция. Положим

$$g(x)=f(x)\varphi_s\Big(\frac{x}{n}\Big).$$

Тогда g — целая функция экспоненциального типа не больше $2\pi(1+s/n)$ и $g(x)=O(x^{-2})$ при $|x|\to\infty$. Поэтому $g\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$, $\widehat{g}\in C(\mathbb{R})$ и по теореме Пэли–Винера

$$\widehat{g}(y)=0,\quad |y|\geqslant 1+\frac{s}{n}.$$

Рассмотрим 1-периодический полином t порядка $s+n-1$, получаемый периодизацией функции $ng(nx)$:

$$t(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} ng(n(x+k))=\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{g}\Big(\frac{k}{n}\Big)e^{2\pi ikx}=\sum_{|k|\leqslant s+n-1} \widehat{g}\Big(\frac{k}{n}\Big)e^{2\pi ikx}.$$

При $s=1$ он тесно связан с полиномом Левитана функции f.

Оценим сверху p-норму полинома t. Имеем

$$\|t\|_p^p=\int_0^1\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} ng(n(x+k))\Big|^p\,dx\leqslant n^p\int_0^1\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+k))|\,\varphi_s(x+k)\Big)^p\,dx.$$

Здесь

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+k))|\,\varphi_s(x+k)\Big)^p\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+k))|^p.$$

Действительно, при $p\geqslant 1$ по неравенству Гёльдера

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+k))|\varphi_s(x+k)\leqslant\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+k))|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_s^{p'}(x+k)\Big)^{1/p'},$$

где сопряженный показатель $p'=p/(p-1)\geqslant 1$. Поэтому с учетом тождества

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_1(x+k)=1,\quad x\in\mathbb{R}$$

(см. [8, (8)]) находим

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_s^{p'}(x+k)\leqslant\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_1(x+k)\Big)^{p'}=1.$$

Если $0<p<1$, то в силу $\varphi_s(x+k)\leqslant 1$

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+k))|\,\varphi_s(x+k)\Big)^p\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+k))|^p\,\varphi_s^p(x+k)\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+k))|^p.$$

Таким образом,

$$\|t\|_p^p\leqslant n^p\int_0^1\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(n(x+k))|^p\,dx=n^{p-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{nk}^{n(k+1)}|f(x)|^p\,dx=n^{p-1}\|f\|_p^p$$

и

$$\frac{t^{(r)}(0)}{\|t\|_p}\geqslant n^{1/p-1}\,\frac{t^{(r)}(0)}{\|f\|_p}.$$

Здесь

$$t^{(r)}(0)=n\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}n^{r-j}f^{(r-j)}(nk)(\varphi_s(k))^{(j)}.$$

Функция φ_s имеет в точках $k\neq 0$ нули порядка $2s\geqslant r+1$, поэтому $(\varphi_s(k))^{(j)}=0$, $0\leqslant j\leqslant r$, $k\neq 0$. При $k=0$ в силу (9) имеем $\varphi_s^{(2i+1)}(0)=0$ и $\varphi_s^{(2i)}(0)=(-1)^i(2\pi)^{2i}A_{s,i}$. Следовательно,

$$t^{(r)}(0)=n^{r+1}\sum_{i=0}^{\lfloor r/2\rfloor}(-1)^i\binom{r}{2i}n^{-2i}f^{(r-2i)}(0)(2\pi)^{2i}A_{s,i}.$$

Отсюда получаем оценку

$$\frac{t^{(r)}(0)}{\|t\|_p} \geqslant \frac{n^{r+1/p}}{\|f\|_p} \sum_{i=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} (-1)^i \binom{r}{2i} n^{-2i} (2\pi)^{2i} A_{s,i} f^{(r-2i)}(0),$$

Теперь вернемся к 2π-периодическим полиномам и функциям типа не больше 1 по формулам (10). Тогда после несложных преобразований получаем искомое неравенство

$$\mathcal{C}(s+n-1;p;r) \geqslant \frac{n^{r+1/p}}{\|F\|_p} \biggl(F^{(r)}(0) + \sum_{i=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} (-1)^i \binom{r}{2i} n^{-2i} A_{s,i} F^{(r-2i)}(0) \biggr),$$

где нужно заменить $s+n-1$ на n и положить $\|F\|_p = 1$.

2.2. Доказательство (ii)

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $ps \geqslant 1$, t — произвольный 1-периодический полином порядка не больше n. Одновременно он является целой функцией экспоненциального типа не больше $2\pi n$.

Определим целую функцию

$$f(x) = \varphi_s\Bigl(\frac{x}{n}\Bigr) t\Bigl(\frac{x}{n}\Bigr)$$

экспоненциального типа не больше $2\pi(1+s/n)$. Для нее

$$\|f\|_p^p = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{nk}^{n(k+1)} |f(x)|^p \, dx = n \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+k))|^p \, dx.$$

Подставляя сюда выражение f и учитывая 1-периодичность t, находим

$$\|f\|_p^p = n \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_s^p(x+k) \, |t(x+k)|^p \, dx = n \int_0^1 |t(x)|^p \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_s^p(x+k) \, dx.$$

Поскольку $sp \geqslant 1$, то как и выше

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_s^p(x+k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_1^{sp}(x+k) \leqslant \biggl(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_1(x+k) \biggr)^{sp} = 1.$$

Поэтому

$$\|f\|_p \leqslant n^{1/p} \|t\|_p.$$

Таким образом,

$$n^{1/p} \frac{f^{(r)}(0)}{\|f\|_p} \geqslant \frac{f^{(r)}(0)}{\|t\|_p},$$

где как и выше

$$f^{(r)}(0) = n^{-r} \sum_{i=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} (-1)^i \binom{r}{2i} (2\pi)^{2i} A_{s,i} t^{(r-2i)}(0),$$

Снова, делая обратные замены в соответствии с (10), находим

$$n^{r+1/p} \frac{F^{(r)}(0)}{\|F\|_p} \geqslant \frac{\sum_{i=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} (-1)^i \binom{r}{2i} A_{s,i} T^{(r-2i)}(0)}{\|T\|_p}.$$

Произвольная функция F имеет тип не выше $1+s/n$, поэтому

$$\frac{F^{(r)}(0)}{\|F\|_p} \leqslant \mathcal{L}\Big(1+\frac{s}{n}; p, \infty; r\Big) = \Big(1+\frac{s}{n}\Big)^{1/p}\mathcal{L}(p;r).$$

Таким образом, получаем искомую оценку

$$T^{(r)}(0) + \sum_{i=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} (-1)^i \binom{r}{2i} A_{s,i} T^{(r-2i)}(0) \leqslant n^r (n+s)^{1/p} \mathcal{L}(p;r),$$

где положено $\|T\|_p = 1$.

2.3. Доказательство равенства (6)

Пусть $L = \sup \frac{F^{(r)}(0)}{\|F\|_{L^p(\mathbb{R})}}$, где супремум берется по всем функциям $F \in \mathcal{E}_1^p \setminus \{0\}$. Ясно, что

$$L \leqslant \mathcal{L}(p;r).$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $F_\varepsilon \in \mathcal{E}_1^p \setminus \{0\}$ и точка $x_0 \in \mathbb{R}$, такая что

$$\mathcal{L}(p;r) \leqslant \frac{F_\varepsilon^{(r)}(x_0)}{\|F_\varepsilon\|_p} + \varepsilon.$$

Пусть $F(x) = F_\varepsilon(x+x_0)$, тогда $F \in \mathcal{E}_1^p$ и $\|F\|_p = \|F_\varepsilon\|_p$. Поэтому

$$\mathcal{L}(p;r) \leqslant \frac{F^{(r)}(0)}{\|F\|_p} + \varepsilon \leqslant L + \varepsilon$$

и можно устремить ε к нулю.

Теперь, поскольку p-нормы функций $\frac{1}{2}\,(F(x) + \overline{F(\overline{x})})$, $\frac{1}{2}\,(F(x) + (-1)^r F(-x))$ (принадлежащих $\mathcal{E}_1^p$) не превосходит нормы F, а значения r-й производных в нуле совпадают, заключаем, что при поиске супремума в L можно ограничиться действительными четными или нечетными (в зависимости от четности r) функциями. Существование такой экстремальной функции вытекает из [5, теорема 1.5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arestov V., Babenko A., Deikalova M., Horváth Á. Nikol'skii inequality between the uniform norm and integral norm with Bessel weight for entire functions of exponential type on the half-line // Anal. Math. 2018. Vol. 44, no. 1. P. 21–42. DOI: 10.1007/s10476-018-0103-6

2. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // J. d'Analyse Math. 2019 (to appear); arXiv:1708.09837. 2017. 21 p. https://arxiv.org/pdf/1708.09837.pdf

3. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials // arXiv:1907.03832. 2019. 27 p. https://arxiv.org/pdf/1907.03832.pdf

4. Ganzburg M. Sharp constants of approximation theory. I. Multivariate Bernstein–Nikolskii type inequalities // arXiv:1901.04400. 2019. 19 p. https://arxiv.org/pdf/1901.04400.pdf

5. Ganzburg M., Tikhonov S. On Sharp Constants in Bernstein–Nikolskii Inequalities // Constr. Approx. 2017. Vol. 45, no. 3. P. 449–466.

6. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Константы Никольского–Бернштейна для целых функций экспоненциального сферического типа в весовых пространствах // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Том 25, № 2. С. 75–87. DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-75-87

7. Горбачев Д. В., Добровольский Н. Н. Константы Никольского в пространствах $L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx)$ // Чебышевский сб. 2018. Том 19, № 2. С. 67–79. DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-67-79

8. Горбачёв Д. В., Мартьянов И. А. О взаимосвязи констант Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сборник. 2018. Том 19, № 2. С. 80–89. DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-80-89

9. Levin E., Lubinsky D. L_p Chritoffel functions, L_p universality, and Paley–Wiener spaces // J. D'Analyse Math. 2015. Vol. 125. P. 243–283.

10. Levin E., Lubinsky D. Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 3. P. 459–468.

11. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва: Наука, 1977.

REFERENCES

1. Arestov V., Babenko A., Deikalova M., Horváth Á. Nikol'skii inequality between the uniform norm and integral norm with Bessel weight for entire functions of exponential type on the half-line // Anal. Math. 2018. Vol. 44, no. 1. P. 21–42. DOI: 10.1007/s10476-018-0103-6

2. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // J. d'Analyse Math. 2019 (to appear); arXiv:1708.09837. 2017. 21 p. https://arxiv.org/pdf/1708.09837.pdf

3. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials // arXiv:1907.03832. 2019. 27 p. https://arxiv.org/pdf/1907.03832.pdf

4. Ganzburg M. Sharp constants of approximation theory. I. Multivariate Bernstein–Nikolskii type inequalities // arXiv:1901.04400. 2019. 19 p. https://arxiv.org/pdf/1901.04400.pdf

5. Ganzburg M., Tikhonov S. On Sharp Constants in Bernstein–Nikolskii Inequalities // Constr. Approx. 2017. Vol. 45, no. 3. P. 449–466.

6. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Nikol'skii–Bernstein constants for entire functions of exponential spherical type in weighted spaces // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2019. Vol. 25, no. 2. P. 75–87. DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-75-87

7. Gorbachev D. V., Dobrovolskii N. N. Nikolskii constants in $L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx)$ spaces // Chebyshevskii Sbornik. 2018. Vol. 19, no. 2. P. 67–79. (In Russ.) DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-67-79

8. Gorbachev D. V., Martyanov I. A. On interrelation of Nikolskii Constants for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type. Chebyshevskii Sbornik // 2018. Vol. 19, no. 2. P. 80–89. (In Russ.) DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-80-89

9. Levin E., Lubinsky D. L_p Chritoffel functions, L_p universality, and Paley–Wiener spaces // J. D'Analyse Math. 2015. Vol. 125. P. 243–283.

10. Levin E., Lubinsky D. Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 3. P. 459–468.

11. Nikolskii S. M. Approximation of functions of several variables and imbedding theorems. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1975.

Получено 24.09.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.