

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 539.21:621.785

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-538-561

**Определение материальных математических функций
в условиях текучести дилатирующих сред из порошковых
и слитковых металлических систем¹**

Э. С. Макаров, А. Е. Гвоздев, Г. М. Журавлев, И. В. Минаев, Н. Н. Добровольский,
С. В. Сапожников, А. А. Калинин

Макаров Эдуард Сергеевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: genadiyzhuravleff@yandex.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Журавлев Геннадий Модестович — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: genadiyzhuravleff@yandex.ru

Минаев Игорь Васильевич — генеральный директор научно-производственного предприятия НПП «Телар» (г. Тула).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Сапожников Сергей Владимирович — руководитель направления, банк «Финансовая корпорация Открытие» (г. Тула).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Калинин А. А. — инженер, Тульский государственный университет, г. Тула.

e-mail: antony-ak@mail.ru

Аннотация

Необратимые изменения объема материала, называемые дилатансией, возникают во многих технологических процессах. Она проявляется в порошковых и пористых металлах, грунтах и горных породах, бетонах, металлических сплавах различного химического состава и других материалах. Кроме того, в условиях пластической деформации происходит необратимое изменение объема деформируемого материала — его пластическая дилатансия, которая является основным физическим механизмом повреждаемости различных металлических систем (металлов, сталей, цветных сплавов) при их больших пластических деформациях. В связи с этим возникает необходимость учета необратимого изменения объема материала при расчетах многих технологических процессов, например, прессования

¹Работа выполнена в рамках реализации федеральной целевой программы «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF 157717X0271).

порошковых металлических материалов, обработки давлением и резанием пористых металлов и металлических сплавов. При составлении основных математических соотношений для теоретического описания изменения объема используются различные математические модели пластической дилатансии: дискретные модели, континуальные модели, в том числе и стохастические, которые описывают поведение дилатирующих материалов, как подвергающихся преимущественному уплотнению, так и разрыхлению. Для построения условий текучести, используемых в расчете дилатирующих сред, необходимо определение материальных математических функций для конкретных процессов и материалов. В работе рассмотрены основные условия текучести и методы их построения, которые используются в расчетах процессов пластической обработки порошковых и слитковых металлических материалов в различных условиях и состояниях.

Ключевые слова: Необратимое изменение объема, материала, пластическая дилатансия, основные соотношения, математические модели, уплотнение, разрыхление, условия текучести, материальные функции, методы их построения, металл, порошковый материал, металлический сплав.

Библиография: 47 названия.

Для цитирования:

Э. С. Макаров, А. Е. Гвоздев, Г. М. Журавлев, И. В. Минаев, Н. Н. Добровольский, С. В. Сапожников, А. А. Калинин. Определение материальных математических функций в условиях текучести дилатирующих сред из порошковых и слитковых металлических систем // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2, С. 538–561.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 539.21:621.785

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-538-561

Determination of material mathematical functions in the conditions of the duration of dilatating media from powder and ingot metal systems²

E. S. Makarov, A. E. Gvozdev, G. M. Zhuravlev, I. V. Minaev, N. N. Dobrovol'sky,
S. V. Sapozhnikov, A. A. Kalinin

Makarov Eduard Sergeevich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Tula State University (Tula).

e-mail: genadiyzhuravleff@yandex.ru

Gvozdev Aleksander Evgenievich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief researcher of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Zhuravlev Gennadiy Modestovich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Tula State University (Tula).

e-mail: genadiyzhuravleff@yandex.ru

Minaev Igor Vasilyevich — General Director of scientific and production enterprise NCE "Telar" (Tula).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

²The work was carried out within the framework of the Federal target program «Research and development in priority areas of development of the scientific and technological complex of Russia for 2014–2020» (unique identifier of the project RFMEF 157717X0271).

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — Candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University; associate Professor of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Sapozhnikov Sergey Vladimirovich — head of direction, OTKRITIE Financial Corporation Bank (Tula).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Kalinin A. A. — Engineer, Tula State University, Tula.

e-mail: antony-ak@mail.ru

Abstract

Irreversible changes in the volume of material, called dilatancy, occur in many technological processes. It manifests itself in powder and porous metals, soils and rocks, concretes, metal alloys of different chemical composition and other materials. In addition, under the conditions of plastic deformation, an irreversible change in the volume of the deformable material occurs - its plastic dilatancy, which is the main physical mechanism of damage to various metal systems (metals, steels, non-ferrous alloys) with their large plastic deformations. In this regard, it is necessary to take into account the irreversible changes in the volume of the material in the calculations of many technological processes, for example, pressing powder metal materials, pressure treatment and cutting of porous metals and metal alloys. In compiling the basic mathematical relationships, a theoretical description of the change in volume uses various mathematical models of plastic dilatancy: discrete models, continual models, including stochastic models, which describe the behavior of dilating materials, both subject to preferential compaction and loosening. For the construction of the conditions of fluidity used in the calculation of dilating media, it is necessary to define material mathematical functions for specific processes and materials. The paper discusses the main conditions of fluidity and methods of their construction, which are used in the calculations of the processes of plastic processing of powder and ingot metallic materials in various conditions and states.

Keywords: irreversible change in the volume of a material, plastic dilatancy, basic relations, mathematical models, compaction, loosening, yield conditions, material functions, methods of their construction, metal, powder material, metal alloy

Bibliography: 47 titles.

For citation:

E. S. Makarov, A. E. Gvozdev, G. M. Zhuravlev, I. V. Minaev, N. N. Dobrovolsky, S. V. Sapozhnikov, A. A. Kalinin, 2019, "Determination of material mathematical functions in the conditions of the duration of dilatating media from powder and ingot metal systems", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 538–561.

1. Введение

Дилатансией называется изменение объема материала, деформируемого в условиях простого сдвига. Явление пластической дилатансии впервые было обнаружено в 1885 г. О. Рейнгольдсом и объяснено с помощью простейшей математической модели механического поведения песка в виде системы одинаковых жестких регулярно упакованных шаров. Необратимое изменение объема материала возникает во многих технологических процессах. Она проявляется в порошковых и пористых металлах, грунтах и горных породах, бетонах, металлических сплавах и других материалах и может быть упругой, вязкой и пластической. В связи с этим возникает необходимость учета необратимого изменения объема материала при расчетах многих технологических процессов, например, прессования порошковых материалов,

обработки давлением и резанием пористых металлических систем. Кроме того, в условиях пластической деформации происходит необратимое изменение объема деформируемого материала – его пластическая дилатансия, которая является основным физическим механизмом повреждаемости металлов при их больших пластических деформациях. Проведенные исследования пластического формоизменения материалов показали, что эксплуатационные свойства изделий зависят не только от механических характеристик, но и от характеристик физико-структурных свойств обрабатываемых материалов, к которым относится и повреждаемость материала дефектами деформационного характера, связанная с пластическим разрыхлением (или уплотнением) мезоструктуры деформируемого материала наличием объемных фракций пор и дефектов кристаллической решетки.

На основании экспериментальных и теоретических исследований, выполненных в нашей стране и за рубежом, разработаны методы расчета основных параметров процессов пластического деформирования материалов с учетом пластической дилатансии. Следует отметить, что решение этой задачи требует детального учета локальных свойств обрабатываемого материала, связанных с неоднородным распределением напряжений, скоростей, деформаций и пластической дилатансии.

Однако дальнейшее развитие техники выдвигает все более сложные задачи, эффективное решение которых связано с изучением основных параметров процессов пластического деформирования и формаизменения различных порошковых и слитковых металлических систем (металлов, сталей, цветных сплавов).

2. Основные математические модели пластической дилатансии

В развитие идей О. Рейнольдса рядом авторов были предложены математические модели, связанные с различными способами укладки жестких шаров в пространстве, использовавшиеся не только для качественного объяснения, но и для количественного описания эффекта дилатансии [1, 2]. Возможности такого подхода обусловлены тем, что геометрические характеристики различных правильных шаровых упаковок существенно отличаются друг от друга. Например, координационное число (количество соседних контактов) простой кубической упаковки равно 6, а коэффициент компактности (отношение объема шаров ко всему объему, включая пустоты между шарами) – 52,36 %; те же величины для ромбоэдрической упаковки равны соответственно 12 и 74,05 %.

П. Роу [1, 2] рассмотрел схемы деформирования кубической и ромбоэдрической упаковок шаров и получил выражения для отношений главных напряжений и скоростей деформаций типа

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \psi(\alpha, \beta, \varphi), \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} = \omega(\alpha, \beta), \quad (1)$$

где α - угол, характеризующий геометрию укладки шаров; β - угол между плоскостью скольжения и одной из главных осей тензора напряжений; φ - угол кулонова трения; ψ и ω - некоторые функции соответствующих аргументов.

Экспериментально проверку дилатансионной теории деформирования П. Роу осуществили сам автор этой теории, а также Л. Барден, А. Хайят, А. Витман, И. Ли и другие исследователи [1]. В то же время ее адекватность изучаемым явлениям была поставлена под сомнение К. Роско, что стимулировало дальнейшие исследования в этой области.

В 1965 г. М. Хорн распространил указанную модель на сыпучие среды с нерегулярной упаковкой сферических частиц, а П. Роу в 1972 г. развил модельные представления для ансамбля контактирующих твердых частиц неправильной формы.

А. Дрешер и Ж. Де Йоселен де Йонг [1] предприняли экспериментальное исследование методами фотомеханики поведения гранулированного материала, моделируемого набором дис-

ков различного диаметра. Результаты достаточно трудоемкой обработки эксперимента были истолкованы в рамках гипотезы некоаксиальности тензоров напряжений и скоростей деформаций, хотя, как отметил В.Н. Николаевский [1], они могут получить иную трактовку в других теориях. Кроме того, указанное исследование ограничено двухмерной постановкой.

Представляется очевидным, что дальнейшее совершенствование дискретных математических моделей пластической дилатансии связана с использованием многомерных функций распределения и их числовых характеристик. Однако не менее очевиден и тот факт, что трудоемкость сопутствующих расчетов не будет адекватной построенным моделям.

Более плодотворным, является использование континуальных моделей пластической дилатансии, в том числе и стохастических. Первый шаг на этом пути сделали в 1952 г. Д. Друккер и В. Прагер [1], которые с позиции теории пластического потенциала на основе линейного условия текучести

$$\alpha J_1 + \sqrt{J'_2} = \Upsilon, \quad (2)$$

где J_1 - сумма главных напряжений, J'_2 - второй инвариант девиатора напряжений, α и Υ - положительные константы, получили для скорости объемной пластической деформации ε выражение

$$\varepsilon = 3\alpha\lambda, \quad (3)$$

причем из определяющих соотношений, ассоциированных с условием (2), следует, что коэффициент пропорциональности λ между компонентой ε_{ij} тензора скоростей деформаций и частной производной пластического потенциала f по соответствующей компоненте тензора напряжений σ_{ij} равен интенсивности скоростей деформаций сдвига H .

Величина

$$\Lambda = \varepsilon/H, \quad (4)$$

определяемая отношением скорости объемной деформации к интенсивности скоростей деформаций сдвига, называется скоростью дилатансии [2].

В терминах среднего напряжения σ и интенсивности касательных напряжений T , связанных с инвариантами J_1 и J'_2 соотношениями

$$J_1 = 3\sigma, \quad J'_2 = T^2, \quad (5)$$

условие Друккера – Прагера переписывается в виде

$$3\alpha\sigma + T = \Upsilon. \quad (6)$$

Полагая

$$f = 3\alpha\sigma + T - \Upsilon, \quad (7)$$

согласно концепции пластического потенциала получаем

$$\varepsilon = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} = 3\alpha\lambda, \quad H = \lambda \frac{\partial f}{\partial T} = \lambda, \quad (8)$$

откуда по формуле (4) находим

$$\Lambda = 3\alpha > 0, \quad (9)$$

т.е. дилатирующая среда, поведение которой подчиняется условию текучести Друккера – Прагера и ассоциированному закону течения, в процессе деформирования разрыхляется.

Однако, во многих случаях дилатирующие материалы подвергаются преимущественному уплотнению. Таковы, например, процессы прокатки, экструзии и прессования порошковых и пористых металлов [3-10], уплотнения грунтовых оснований сооружений и дорожных одежд [11, 12].

Поэтому в связи с необходимостью учета уплотнения материала гипотеза о связно-сыпучей среде, соответствующей идеальной пластичности, встретила ряд возражений, опиравшихся на экспериментальные результаты.

Необходимые обобщения условия (2), обеспечивавшие в той или иной степени согласование теории дилатансии с экспериментами, выполнили в 1957 г. Д. Друккер, Р. Гибсон и Д. Хенкель, в 1959 г. – Э. Дженике и Р. Шилд, в 1969 г. – Н. Су, Дж. Вейдлер и П. Пэсли, в 1970 г. – Ф. Димаджо и И. Сандлер, - полученные ими результаты [31] сводились в основном к построению замкнутых поверхностей текучести в пространстве напряжений.

Наибольшее распространение в расчетах технологических процессов порошковой металлургии получили квадратичное условие текучести Р. Грина [18] и его различные модификации, охватываемые выражением [19]

$$AJ_2' + BJ_1^2 = D\Upsilon_0^2, \quad (10)$$

где A, B, D - функции относительной плотности R (отношения плотностей пористого и компактного металлов) или, что то же, пористости $\Pi = 1 - R$, Υ_0 - предел текучести компактного металла.

В условии текучести Грина [18]

$$A = 3, B = \frac{1}{4} \left[\frac{3(1 - \Pi^{1/3})}{(3 - 2\Pi^{1/4}) \ln \Pi} \right]^2, D = \left[\frac{3(1 - \Pi^{1/3})}{3 - 2\Pi^{1/4}} \right]^2.$$

Приведем по данным обзора [19] некоторые выражения материальных функций A, B, D с указанием авторов соответствующих работ:

а) А. Гарсон

$$A = 3, B = \Pi^2/8, D = R^2 - \Pi;$$

б) Х. Кун и С. Доуней

$$A = 2 + R^2, B = \Pi(1 + R)/3, D = 1;$$

в) М. Ойен, М. Шима и И. Коно

$$A = 3/R^2, B = \Pi / [R^2(1 + 2\sqrt{\Pi R})], D = R^2;$$

г) И. Кораччиоглу и Т. Уз

$$A = 3, B = [0, 36(1 + R) + 0, 39] \Pi / R^2, D = 1;$$

д) С. Дорайвелу, Х. Гегель, Дж. Гунасекера, Дж. Малас, Дж. Морган и Дж. Томас

$$A = 2(1 + \nu), B = (1 - 2\nu)/3, D = 2R^2 - 1,$$

где ν – коэффициент Пуассона, $\nu = R^2/2$.

В рамках закона пластического течения, ассоциированного с условием текучести (10), для скорости дилатансии находим

$$\Lambda = 9B\sigma/(AT), \quad (11)$$

откуда следует, что знаки скорости дилатансии и среднего напряжения совпадают и что $\Lambda = 0$ при $\sigma = 0$.

Достоинством всех условий типа (10) является то, что, во-первых, при $\Pi = 0$ ($R = 1$) они обращаются в классическое условие Мизеса, во-вторых, учитывают упрочнение и разупрочнение дилатирующего материала и, в-третьих, предусматривают изменение знака дилатансии с изменением знака нормального октаэдрического напряжения. Недостаток этих условий заключается в том, что они предсказывают одинаковую сопротивляемость материала растяжению и сжатию, а также нулевую скорость дилатансии в отсутствии гидростатического давления. Последние замечания снимаются, если ввести еще одну материальную функцию $c \geq 0$ и записать условие текучести в виде

$$AJ_2' + B(J_1 + 3c)^2 = D\Upsilon_0^2. \quad (12)$$

При этом прочностные характеристики при сжатии будут выше, чем при растяжении, а скорость дилатансии составит

$$\Lambda = 9B(\sigma + c)/(AT) \quad (13)$$

и будет положительной при $\sigma = 0$, т.е. в отсутствии гидростатического давления дилатирующий материал разрыхляется.

Геометрическая интерпретация условий текучести (6), (10) и (12) дана на рис. 1 – 3. Очевидно, что в состоянии чистого сдвига ($\sigma = 0$) ввиду градиентальности вектора скорости пластической деформации $\vec{\epsilon}$ условия текучести (2) и (12) всегда (при любой плотности) будут предсказывать разрыхление материала (положительную дилатансию), а условие (10) – нулевую скорость дилатансии (неизменность объема).

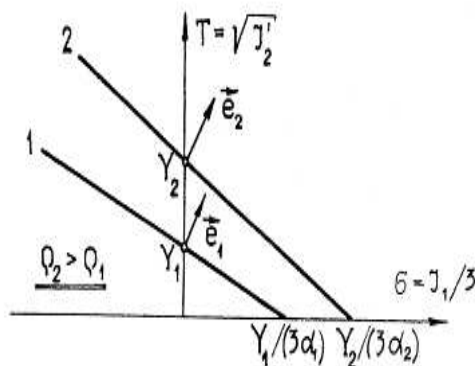


Рис. 1: Условие текучести Друккера-Прагера

Следует также отметить, что некоторые материалы при $\sigma = 0$ проявляют отрицательную дилатансию. Однако этот факт принципиально невозможно обнаружить на основе рассмотренных условий текучести. Известно также, что для материалов геологического происхождения характерно изменение знака дилатансии [20]. В связи с этим А. Казагранде ввел понятие критической плотности грунта ρ_* : если начальная плотность грунта ρ_0 равна критической, то его объем при сдвиге не изменяется, если $\rho_0 > \rho_*$, то грунт является переуплотненным и при сдвиге будет разрыхляться, а если $\rho_0 < \rho_*$, то грунт считается рыхлым и при сдвиге будет уплотняться. Очевидно, эффект Казагранде также не может быть учтен в рамках рассмотренных условий текучести.

Надлежащая гибкость в описании дилатансионных свойств материалов обеспечивается условием текучести

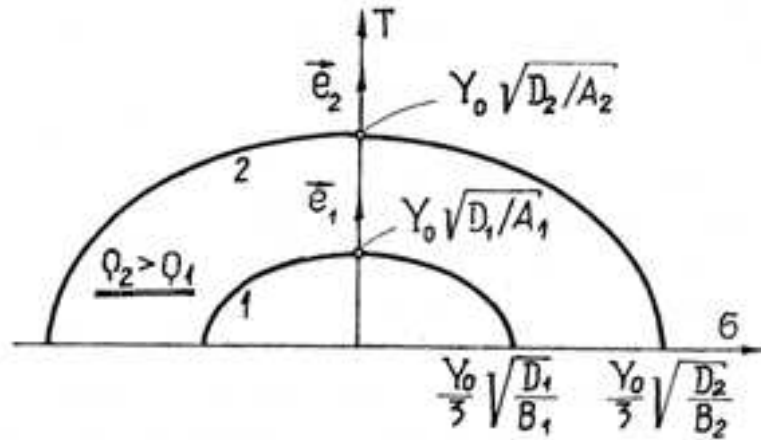


Рис. 2: Обобщенное условие текучести Грина

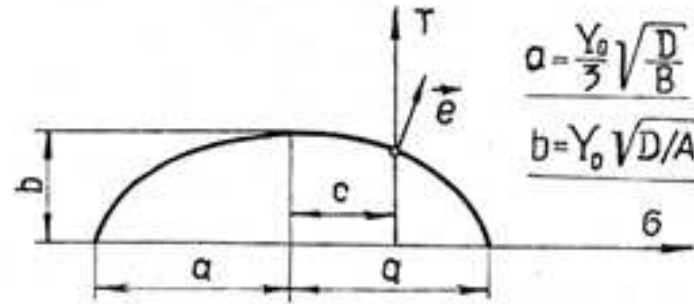


Рис. 3: Условие текучести

$$T = A + B\sigma + C\sqrt{a - \sigma} + D\sqrt{b + \sigma}, \quad (14)$$

предложенным в работе [21].

Геометрическая интерпретация условия (14) дана на рис. 4, откуда видно, что величины a, b, h, m имеют очевидный геометрический смысл. Коэффициенты A, B, C, D находятся по формулам

$$\begin{aligned} A &= h - C\sqrt{a} - D\sqrt{b}, \\ B &= m + \frac{1}{2} \left(\frac{C}{\sqrt{a}} - \frac{D}{\sqrt{b}} \right), \\ C &= \frac{\sqrt{a}}{\Delta} \left[h(2\sqrt{b} - \sqrt{a+b}) + 2mb(\sqrt{a+b} - \sqrt{b}) \right], \\ D &= \frac{\sqrt{b}}{\Delta} \left[h(2\sqrt{a} - \sqrt{a+b}) - 2ma(\sqrt{a+b} - \sqrt{a}) \right], \\ \Delta &= (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \left[a + \sqrt{ab} + b - (\sqrt{a} + \sqrt{b})\sqrt{a+b} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, из восьми материальных функций A, B, C, D, a, b, h, m лишь четыре являются независимыми. Дилатансионные свойства материала характеризуются функцией $m(\rho)$: дилатансия положительна при $m < 0$, равна нулю при $m = 0$ и отрицательна при $m > 0$. На рис. 5 показана эволюция поверхности текучести (14) при переходе от рыхлого материала

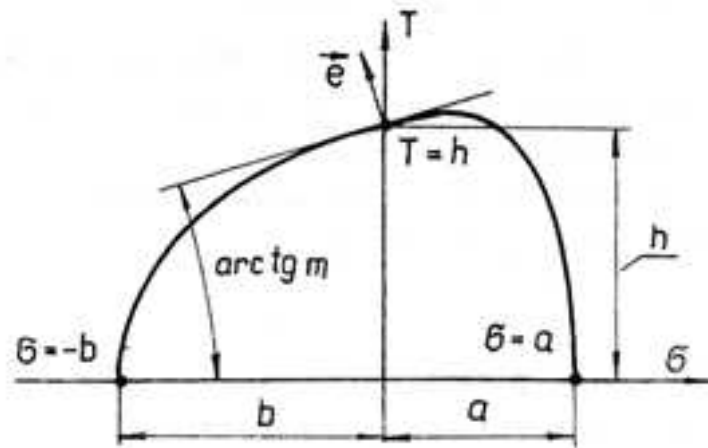


Рис. 4: Условие текучести

(кривая 1) через критическое (в смысле Казагранде) состояние (кривая 2) к переуплотненному материалу (кривая 3).

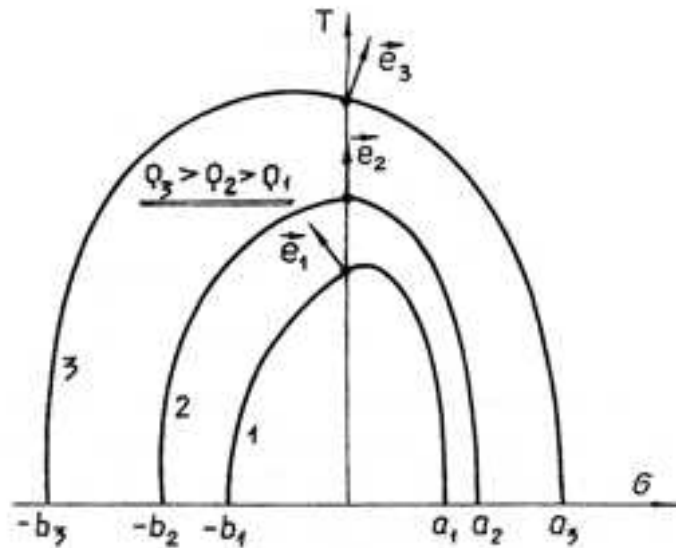


Рис. 5: Эволюция поверхности текучести в смысле Казагранде

Согласно квазитермодинамическому постулату Друккера [22] поверхность текучести (14) должна быть невогнутой, что выполняется при $C \geq 0$ и ≥ 0 . Это накладывает следующие ограничения на величины a, b, h, m :

$$\left. \begin{aligned} h(2\sqrt{b} - \sqrt{a+b}) + 2mb(\sqrt{a+b} - \sqrt{b}) &\geq 0, \\ h(2\sqrt{a} - \sqrt{a+b}) - 2ma(\sqrt{a+b} - \sqrt{a}) &\geq 0 \end{aligned} \right\}.$$

В частных случаях условие текучести (14) обращается в известные критерии:

- а) при $A \neq 0, B = 0, C = D = 0$ приходим к условию Губера – Мизеса,
- б) при $A \neq 0, B \neq 0, C = D = 0$ получаем условие Друккера – Прагера,
- в) при $A \neq 0, B = 0, C \neq 0, D = 0$ приходим к условию Надаи.

В математической модели пластически сжимаемого или разрыхляемого материала, построенной Д.Д. Ивлевым, используются две функции нагружения типа

$$f_1(\sigma, J'_2, J'_3) = 0, \quad \Theta = f_2(\sigma), \quad (15)$$

где в дополнение к уже встречавшимся обозначениям J'_3 – третий инвариант девиатора напряжений, $\Theta = e_{ii}/3$, e_{ij} – тензор пластических деформаций.

Выражение для скорости объемной деформации постулируется в виде

$$\varepsilon = \lambda \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} + \frac{df_2}{d\sigma} \dot{\sigma}, \quad (16)$$

где одна часть ε , определяемая первым слагаемым, ассоциирована с функцией нагружения f_1 , а другая часть – с функцией f_2 .

Для компонент девиатора скоростей деформаций принимается зависимость

$$\varepsilon'_{ij} = \lambda \left(\frac{\partial f_1}{\partial J'_2} \frac{\partial J'_2}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f_1}{\partial J'_3} \frac{\partial J'_3}{\partial \sigma_{ij}} \right), \quad (17)$$

где σ_{ij} – соответствующие компоненты тензора напряжений.

Обозначим f_{12} и f_{13} частные производные функции f_1 по второму и третьему инвариантам девиатора напряжений s_{ij} , – тогда для ε'_{ij} будем иметь

$$\varepsilon'_{ij} = \lambda(f_{12}s_{ij} + f_{13}t_{ij}), \quad (18)$$

где использованы формулы

$$J'_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} \Rightarrow \frac{\partial J'_2}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij},$$

$$J'_3 = \frac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki} \Rightarrow \frac{\partial J'_3}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ik}s_{kj} - \frac{2}{3}J'_2\delta_{ij} = t_{ij},$$

а δ_{ij} – символ Кронекера.

Для интенсивности скоростей деформаций сдвига H имеем [22]

$$H^2 = 2\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}. \quad (19)$$

Внося в формулу (19) зависимость (18) и выполняя преобразования, находим

$$H = 2\lambda \sqrt{f_{12}^2 J'_2 + 3f_{12}f_{13}J'_3 + \frac{1}{3}f_{13}^2 J'^2_2}, \quad (20)$$

причем в процессе вывода этого выражения было использовано соотношение [23]

$$s_{ij}s_{jk}s_{km}s_{mi} = \frac{1}{2}(s_{ij}s_{ij})^2 = 2J'^2_2.$$

С учетом формул (16) и (20) вычисляем скорость дилатансии

$$\Lambda = \frac{\lambda \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} + \frac{df_2}{d\sigma} \dot{\sigma}}{2\lambda \sqrt{f_{12}^2 J'_2 + 3f_{12}f_{13}J'_3 + \frac{1}{3}f_{13}^2 J'^2_2}}. \quad (21)$$

При построении математической модели дилатирующей среды по В.Н. Николаевскому [1] вводятся два условия пластического деформирования – условие текучести Друккера – Прагера и условие дилатансии

$$\alpha J_1 + \sqrt{J'_2} - \Upsilon = 0, \quad \varepsilon - \Lambda H = 0, \quad (22)$$

где $\alpha, \Upsilon, \Lambda$ – материальные функции, зависящие от плотности.

Далее с учетом кинематического ограничения разыскиваются соотношения между скоростями деформаций и напряжениями, например, в виде

$$\varepsilon_{ij} = \xi s_{ij} + \eta \delta_{ij}, \quad (23)$$

где ξ, η – искомые функции.

Из формулы (23) следуют равенства

$$\varepsilon = 3\eta, H = 2\xi\sqrt{J'_2},$$

откуда с помощью второй из формул (22) находим

$$\eta = \frac{2}{3}\xi\Lambda\sqrt{J'_2}. \quad (24)$$

Подставляя выражение (24) в формулу (23), получаем определяющее соотношение в виде

$$\varepsilon_{ij} = \xi(s_{ij} + \frac{2}{3}\Lambda\sqrt{J'_2}\delta_{ij}). \quad (25)$$

Для практических приложений более удобна следующая форма записи соотношения (25):

$$\varepsilon_{ij} = H \left(\frac{s_{ij}}{2T} + \frac{1}{3}\Lambda\delta_{ij} \right). \quad (26)$$

В математической модели гранулированных сред, предложенной З. Мрузом и Ч. Шиманским [24], принимается, что пластический потенциал есть сингулярная вершина, полученная в пространстве напряжений пересечением трех поверхностей g_1, g_2, g_3 , так что закон пластического течения имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = \lambda_1 \partial g_1 / \partial \sigma_{ij} + \lambda_2 \partial g_2 / \partial \sigma_{ij} + \lambda_3 \partial g_3 / \partial \sigma_{ij}, \quad (27)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – положительные функции, определяемые из дополнительных физических соображений.

При этом учитывается также возможность, указанная еще в 1938 г. Е. Меланом, состоящая в том, что функции g_i необязательно должны выражать какое-либо условие пластичности. З. Мруз и Ч. Шиманский показали, что предложенная ими модель дилатирующей среды включает в качестве частных случаев многие другие модели.

Рассмотренные возможности математического описания явления дилатансии относились к изотропным средам. Те же подходы можно использовать и для построения соответствующих моделей, например, ортотропных дилатирующих сред [25], а также сред, деформируемых в условиях дополнительных физико-химических воздействий: в электро- и магнитостатических полях [26-30], при коррозии [31, 32], при повышенных температурах [33] и в других случаях.

На основе проведенного краткого обзора различных подходов к математическому моделированию явления дилатансии можно заключить, что возможности совершенствования известных и создания новых моделей этого явления еще далеко не исчерпаны. Кроме того, повысить точность получаемых результатов можно за счет более правильного определения материальных функций, входящих в условия текучести дилатирующих сред.

3. Определение материальных математических функций в условиях текучести дилатирующих сред.

Общее условие текучести изотропной дилатирующей среды формулируем в виде

$$f \equiv T - k(\sigma, \rho) = 0, \quad (28)$$

где σ – среднее напряжение, T – интенсивность касательных напряжений, ρ – плотность, k – некоторая функция σ и ρ .

В рамках теории пластического потенциала поверхность нагружения (28) в координатах σ, T должна быть невогнутой, – тогда будут справедливы постулат Друккера и соответствующие экстремальные теоремы.

В качестве конкретных форм представления (28) могут быть приняты (рис. 6):

а) прямая

$$T + a\sigma - b = 0, \quad k = b - a\sigma; \quad (29)$$

б) парабола

$$T^2 + a\sigma - b^2 = 0, \quad k = \sqrt{b^2 - a\sigma}; \quad (30)$$

в) кривая Ламе

$$\left(\frac{\sigma + c}{a}\right)^r + \left(\frac{T}{b}\right)^r = 1, \quad k = b\sqrt[r]{1 - \left(\frac{\sigma + c}{a}\right)^r}, \quad (31)$$

где $r = p/q > 1$, p и q соответственно четное и нечетное числа (при $p = 2, q = 1 \Rightarrow r = 2$ кривая Ламе обращается в эллипс);

г) овал Кассини

$$\begin{aligned} [(\sigma + c)^2 + T^2]^2 - 2a^2 [(\sigma + c)^2 - T^2] &= b^4, \\ k &= \sqrt{\sqrt{a^4 + b^4 + 4a^2(\sigma + c)^2} - a^2 - (\sigma + c)^2}, \end{aligned} \quad (32)$$

где $b/a \geq \sqrt[4]{2}$;

д) гипотрохоида

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= c - a \cos \varphi - b \cos 2\varphi, \\ Y &= a \sin \varphi - b \sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

где $a \geq 4b, 0 \leq \varphi \leq \pi$,

$$\begin{aligned} k &= (a - 2b\kappa)\sqrt{1 - \kappa^2}, \\ \kappa &= \frac{1}{4b} \left[\sqrt{a^2 + 8b(b + c - \sigma)} - a \right], \end{aligned}$$

а также другие кривые, в том числе кривая, описываемая уравнением (14) и изображенная на рис. 4.

Очевидно, при условии текучести (14)

$$k = A + B\sigma + C\sqrt{a - \sigma} + D\sqrt{b + \sigma}. \quad (34)$$

В выражениях (29)-(34) $a, b, c, \kappa, A, B, C, D$ – материальные функции ρ , определяемые с помощью некоторой системы экспериментов.

Пусть напряжения текучести в экспериментах по одноосному растяжению, одноосному сжатию и кручению круглых образцов соответственно будут R_p, R_c, R_k . Тогда по известным формулам [22]

$$3\sigma = \sigma_{kk}, \quad 2T^2 = s_{ij}s_{ij}$$

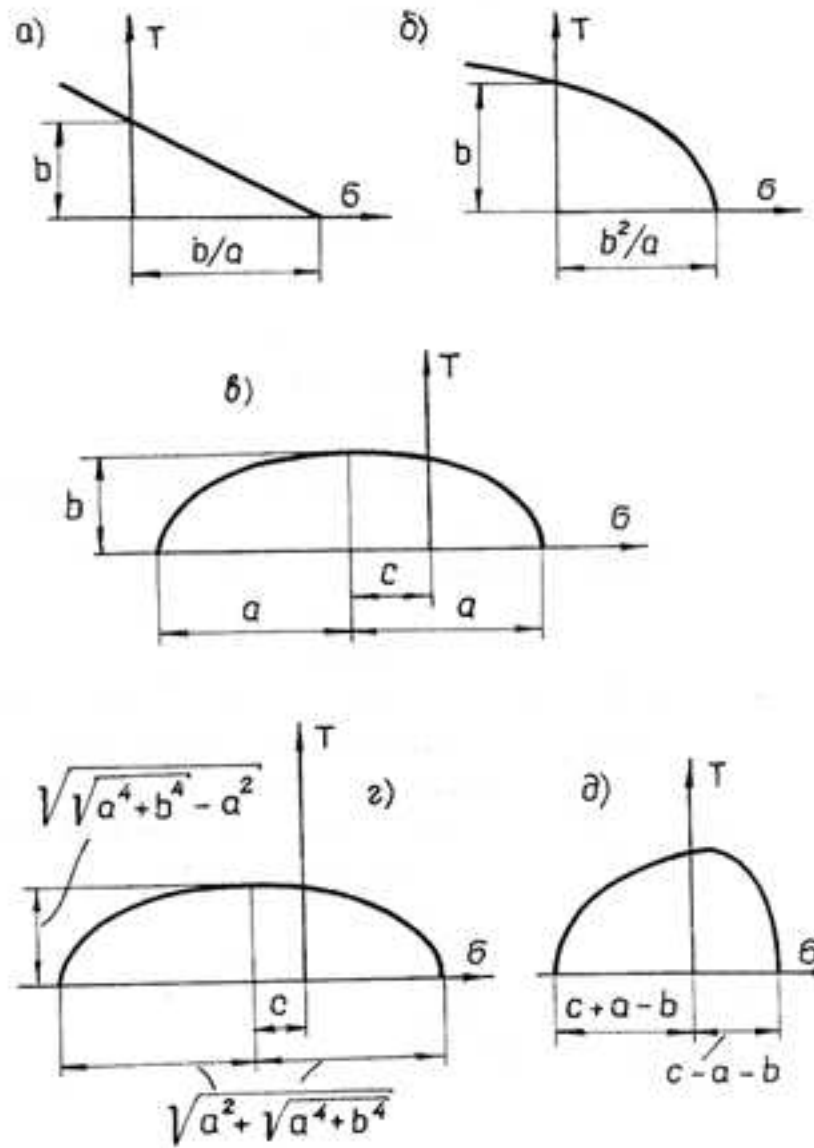


Рис. 6: Условие текучести дилатирующих сред

получим для состояния текучести

а) при одноосном растяжении

$$\sigma = \frac{1}{3}R_p, \quad T = \frac{1}{\sqrt{3}}R_p; \quad (35)$$

б) при одноосном сжатии

$$\sigma = -\frac{1}{3}R_c, \quad T = \frac{1}{\sqrt{3}}R_c; \quad (36)$$

в) при кручении

$$\sigma = 0, \quad T = R_k. \quad (37)$$

Для определения материальных функций a и b , содержащихся в условиях текучести (31) и (32), достаточно воспользоваться результатами простейших экспериментов двоякого вида с

образцами различной плотности. В итоге будем иметь

а) для условия текучести (29)

$$a = \frac{\sqrt{3}(R_c - R_p)}{R_c + R_p}, \quad b = \frac{2R_p R_c}{\sqrt{3}(R_c + R_p)}, \quad (38)$$

если комбинируются формулы (35) и (36),

$$a = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}R_k - R_p)}{R_p}, \quad b = R_k, \quad (39)$$

если привлекаются формулы (35) и (37), и

$$a = \frac{\sqrt{3}(R_c - \sqrt{3}R_k)}{R_c}, \quad b = R_k, \quad (40)$$

если расчеты выполняются с учетом формул (36) и (37);

б) для условия текучести (30)

$$a = R_c - R_p, \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{R_c R_p}, \quad (41)$$

$$a = \frac{3R_k^2 - R_p^2}{R_p}, \quad b = R_k, \quad (42)$$

$$a = \frac{R_c^2 - R_k^2}{R_c}, \quad b = R_k, \quad (43)$$

если комбинируются, соответственно, выражения (35) и (36), (35) и (37), (36) и (37).

При условии текучести (31) для определения величин a, b, c составляем, используя формулы (35)-(37), три уравнения:

$$\left(\frac{3c + R_p}{3a}\right)^r + \left(\frac{R_p}{\sqrt{3}b}\right)^r = 1,$$

$$\left(\frac{3c + R_c}{3a}\right)^r + \left(\frac{R_c}{\sqrt{3}b}\right)^r = 1,$$

$$\left(\frac{c}{a}\right)^r + \left(\frac{R_k}{b}\right)^r = 1.$$

Исключая из этой системы a и b , приходим к уравнению относительно c :

$$(3c + R_p)^r [R_c^r - (\sqrt{3}R_k)^r] + (3c - R_c)^r [(\sqrt{3}R_k)^r - R_p^r] = (3c)^r (R_c^r - R_p^r). \quad (44)$$

После нахождения c из уравнения (44) вычисляем a и b по формулам

$$a^r = \frac{(3c + R_p)^r R_c^r - (3c - R_c)^r R_p^r}{3^r (R_c^r - R_p^r)}, \quad (45)$$

$$b^r = \frac{(3c + R_p)^r R_c^r - (3c - R_c)^r R_p^r}{\sqrt{3}^r [(3c + R_p)^r - (3c - R_c)^r]}. \quad (46)$$

В частности, при $r = 2$ имеем:

$$\begin{aligned}
c &= \frac{R_k^2(R_c - R_p)}{2(3R_k^2 - R_p R_c)}, \\
a &= \sqrt{c^2 + \frac{2cR_p R_c}{3(R_c - R_p)}}, \\
b &= \frac{aR_k}{\sqrt{a^2 - c^2}}.
\end{aligned} \tag{47}$$

На основе этих результатов можно предсказать для дилатирующего материала той же плотности напряжения текучести при трехосном растяжении R_{3p} , трехосном сжатии R_{3c} , двухосном растяжении одинаковыми напряжениями R_{2p} и в других случаях.

Из условия (31) при $r = 2$, $T = 0$ получаем

$$R_{3p} = a - c, R_{3c} = a + c. \tag{48}$$

Из того же условия при

$$r = 2, \quad \sigma = \frac{2}{3}R_{2p}, \quad T = \frac{1}{\sqrt{3}}R_{2p}$$

,
следует

$$R_{2c} = \frac{3ab\sqrt{3a^2 + 4b^2 - 3c^2} + 6b^2c}{3a^2 + 4b^2}.$$

При радиальном сжатии круглого диска напряжениями R_{2c} имеем

$$\sigma = \frac{2}{3}R_{2c}, \quad T = \frac{1}{\sqrt{3}}R_{2c}$$

,
что позволяет из условия (31) при $r = 2$ найти

$$R_{2c} = \frac{3ab\sqrt{3a^2 + 4b^2 - 3c^2} + 6b^2c}{3a^2 + 4b^2}. \tag{49}$$

При гидравлическом испытании трубчатого образца на радиальный разрыв имеем

$$\sigma_r \approx 0, \quad \sigma_z = \frac{1}{2}\sigma_\varphi = \sigma = T = \frac{1}{4}\alpha q$$

,
где q – давление, вызывающее состояние пластичности; α – отношение диаметра трубы к ее толщине.

Из условия (31) при $r = 2$ далее находим

$$q = \frac{4b(a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} - bc)}{\alpha(a^2 + b^2)}. \tag{50}$$

По этой формуле предсказывается величина давления, вызывающего пластическое состояние в трубе при ее гидравлическом испытании.

Отметим, что для определения материальных функций a, b, c , входящих в условие пластичности (31), можно воспользоваться результатами экспериментов любых трех видов. Система экспериментов, включающая одноосное растяжение, одноосное сжатие и кручение, была рассмотрена выше. Возможны и другие системы, например,

а) одноосное растяжение, кручение, радиальное сжатие круглого диска;
 б) трехосное сжатие, кручение, гидравлическое испытание трубчатого образца;
 в) кручение, гидравлическое испытание трубчатого образца, радиальное сжатие круглого диска.

В случае использования системы б) экспериментально находим R_{3c}, R_k , и q . Далее при $r = 2$ получаем

$$c = R_{3c} - a, \quad b = \frac{aR_k}{\sqrt{R_{3c}(2a - R_{3c})}},$$

что после подстановки в формулу для q приводит к уравнению относительно a :

$$\alpha q [R_k^2 + 3R_{3c}(2a - R_k)] + 4R_k^2(R_{3c} - a) = 4R_k \sqrt{R_{3c}^2(2a - R_{3c})^2 + a^2 R_k^2}.$$

Линеаризуем правую часть полученного уравнения с помощью формулы Понселе [34]

$$\sqrt{x^2 + y^2} \approx K_1|x| + K_2|y|,$$

где K_1 и K_2 — коэффициенты аппроксимации.

При любых x и y — $K_1 = K_2 = 0,82840$ с погрешностью аппроксимации 17,16%. Если известно, что $|x| > |y|$, то $K_1 = 0,96046$, $K_2 = 0,39783$ с погрешностью аппроксимации 3,95%. При $|x| > 2|y|$ — $K_1 = 0,98592$, $K_2 = 0,23270$ с погрешностью 1,41 % и т.д.

Итак, применение формулы Понселе дает

$$\sqrt{R_{3c}^2(2a - R_{3c})^2 + a^2 R_k^2} \approx K_1 R_{3c}(2a - R_{3c}) + K_2 a R_k.$$

Далее получаем

$$\alpha q [R_k^2 + R_{3c}(2a - R_{3c})] + 4R_k^2(R_{3c} - a) = 4R_k [K_1 R_{3c}(2a - R_{3c}) + K_2 a R_k],$$

откуда находим

$$a = \frac{4R_k R_{3c}(K_1 R_{3c} + R_k) - \alpha q (R_{3c}^2 - R_k^2)}{2 [4K_1 R_k R_{3c} + 2(1 + K_2)R_k^2 - \alpha q R_{3c}]} \quad (51)$$

после чего по вышеприведенным формулам рассчитываем b и c .

На рис. 7 дана геометрическая интерпретация всех рассмотренных понятий. При построении эллипса (рис. 7а) приняты следующие числовые данные

$$R_p = 200 \text{ МПа}, R_k = 250 \text{ МПа}, R_c = 600 \text{ МПа},$$

согласующиеся с экспериментальными результатами для некоторых пористых материалов [35-36].

По формулам (49) получаем

$$a = 267 \text{ МПа}, b = 346 \text{ МПа}, c = 185 \text{ МПа}.$$

Формулы (50) дают

$$R_{3p} = 82 \text{ МПа}, R_{3c} = 452 \text{ МПа}.$$

Из формулы (51) следует

$$R_{2c} = 499 \text{ МПа}.$$

Находим

$$\alpha q = 302 \text{ МПа.}$$

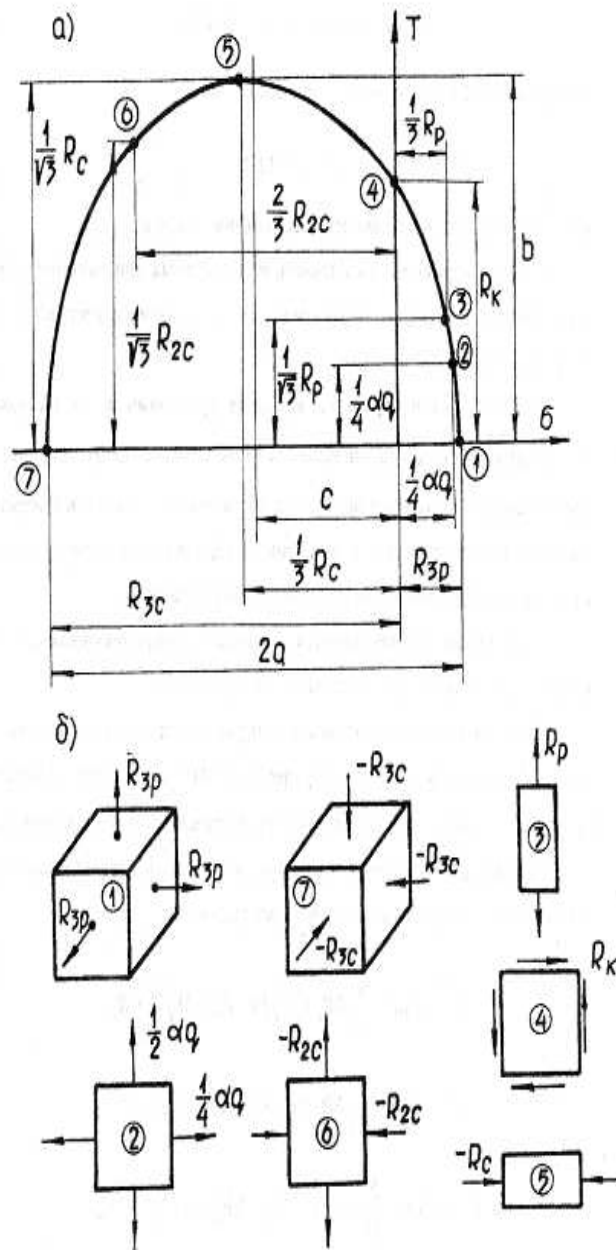


Рис. 7: Геометрическая интерпретация схем напряженных состояний на эллипсе текучести

Выполним проверочные расчеты по формуле (47).

Предварительно находим

$$R_{3c}(2a - R_{3c}) = 37064, \quad aR_k = 66750 > 37064.$$

Поэтому принимаем

$$K_1 = 0,39783, \quad K_2 = 0,96046$$

и по формуле (47) получаем

$$a = 263 \text{ МПа},$$

что хорошо согласуется с вышеуказанным значением a .

Схемы напряженных состояний, используемых при постановке экспериментов и соответствующих точкам 1...7 на эллипсе текучести, изображены на рис. 7б.

Поскольку величины a, b, c являются функциями ρ , то их можно представить, например, полиномами $(n-1)$ -ой степени по ρ . Для определения коэффициентов этих полиномов достаточно осуществить с образцами различной плотности n серий испытаний, каждая из которых состоит из трех рассмотренных выше простейших экспериментов.

Аналогично рассматриваются и другие условия текучести дилатирующих сред, а также другие системы экспериментов.

В частности, для определения четырех независимых материальных функций, входящих в условие текучести (14), можно использовать результаты экспериментов по одноосному растяжению и одноосному сжатию образцов, радиальному сжатию круглого диска и кручению круглого стержня. Тогда получим систему четырех уравнений

$$R_p = \sqrt{3}A + \frac{1}{\sqrt{3}}BR_p + C\sqrt{3a - R_p} + D\sqrt{3b + R_p},$$

$$R_c = \sqrt{3}A + \frac{1}{\sqrt{3}}BR_c + C\sqrt{3a + R_c} + D\sqrt{3b - R_c},$$

$$R_{2c} = \sqrt{3}A + \frac{2}{\sqrt{3}}BR_{2c} + C\sqrt{3a + 2R_c} + D\sqrt{3b - 2R_{2c}},$$

$$R_k = h,$$

где R_p, R_c, R_{2c}, R_k – напряжения текучести в вышеперечисленных опытах.

4. Заключение

При разработке технологических процессов различных материалов современное развитие техники выдвигает все более сложные задачи, эффективное решение которых связано с изучением необратимого изменения объема материала. При составлении основных математических соотношений для теоретического описания изменения объема используются различные математические модели, которые используются в дальнейшем для анализа целого ряда процессов, связанных как с разрыхлением, так и с уплотнением материала. Правильный выбор моделей пластической дилатансии, и определение материальных функций, входящих в условие пластичности с использованием результатов экспериментов различных видов, позволяет повысить точность прогнозирования получаемых результатов для создания ресурсосберегающих процессов обработки порошковых и слитковых металлических систем (чистых металлов, сталей, цветных сплавов и других композиционных металлических и наноструктурных материалов) [37-52].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Определяющие законы механики грунтов: Сб. статей / Под ред. В. Н. Николаевского. – М.: Мир, 1975. – 230 с.
2. Вязов С. С. Реологические основы механики грунтов. – М.: Высшая школа, 1978. – 448 с.

3. Виноградов Г. А., Каташинский В. П. Теория листовой прокатки металлических порошков и гранул. – М.: Металлургия, 1979. – 224 с.
4. Перельман В. Е. Формование порошковых материалов. – М.: Металлургия, 1979. – 232 с.
5. Макаров Э. С. К теории формования металлических порошков в условиях плоской деформации // Известия вузов, Машиностроение. – 1973. – № 10. – С. 158–162.
6. Павлов В. А., Кипарисов С. С., Щербина В. В. Обработка давлением порошков цветных металлов. – М.: Металлургия, 1977. – 176 с.
7. Новые процессы деформации металлов и сплавов / А. П. Коликов, П. И. Полухин, А. В. Крупин и др. – М.: Высшая школа, 1986. – 352 с.
8. Порошковая металлургия и напыленные покрытия / Под ред. Б. С. Митина. – М.: Металлургия, 1987. – 792 с.
9. Экономичные методы формообразования деталей / Под ред. К. Н. Богоявленского и В. В. Риса. – Л.: Лениздат, 1984. – 144 с.
10. Теория пластичности дилатирующих сред: монография / Э. С. Макаров, А. Е. Гвоздев, Г. М. Журавлев; Под ред. проф. А. Е. Гвоздева. 2-е изд. перераб. и доп. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2015. – 337 с.
11. Калужский Я. А., Батраков О. Т. Уплотнение земляного полотна и дорожных одежд. – М.: Транспорт, 1971. – 158 с.
12. Хархута Н. Я. Машины для уплотнения грунтов. – Л.: Машиностроение, 1973. – 176 с.
13. Green R. J. A plasticity theory for porous solids // Int. J. Mech. Sci., vol. 14, 1972, pp. 215–224.
14. Doraivelu S. M., Gegel H. L., Gunasekera J. S., Malas J. C., Morgan J. T., Tomas J. F. A new yield function for compressible P/M materials // Int. J. Mech. Sci., vol. 26, 1984, pp. 527–535.
15. Харр М. Е. Основы теоретической механики грунтов. – М.: Стройиздат, 1971. – 320 с.
16. Макаров Э. С., Толоконников Л. А. Вариант построения теории пластичности дилатирующей среды // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. – 1979. – № 1. – С. 88–93.
17. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
18. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. – М.: Мир, 1964. – 308 с.
19. Механика гранулированных сред: Сб. статей / Под ред. И. В. Ширко. – М.: Мир, 1985. – 280 с.
20. Макаров Э. С., Толоконников Л. А. Плоские задачи теории пластичности ортотропных дилатирующих сред // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. – 1979. – № 5. – С. 139–143.
21. Макаров Э. С., Толоконников Л. А. Теория магнитоэластичности дилатирующих сред // V Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике (аннот. докл.). – Алма-Ата: Наука, 1981. – С. 245.
22. Макаров Э. С., Киселев В. И. Теория электропластичности изотропных дилатирующих сред // Иссл. в обл. пластичности и обработки металлов давлением. – Тула: изд. ТулПИ, 1982. – С. 104–109.

23. Макаров Э. С., Толоконников Л. А. Уравнения теории магнитоупругости изотропной дилатирующей среды // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. – 1983. – № 5. – С. 188–190.
24. Макаров Э. С., Киселев В. И. Задачи теории пластического течения дилатирующих сред в электрических и магнитных полях // Общие задачи и методы исследования пластических и вязкоупругих материалов и конструкций. – Свердловск: изд. УНЦ АН СССР, 1986. – С. 66–71.
25. Макаров Э. С. Пластическое деформирование дилатирующих сред в электростатических и магнитостатических полях // Иссл. в обл. теории, технологии и оборудования штамповочного производства. – Тула: изд. ТулГУ, 1998. – С. 64–69.
26. Макаров Э. С. Вариант построения и некоторые плоские задачи теории хемопластичности // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. – 1989. – № 5. – С. 70–72.
27. Макаров Э. С. Применение теории хемопластичности к расчету предельных состояний корродирующих труб // Физико-химическая механика материалов. – 1989. – № 2. – С. 115–117.
28. Друянов Б. А. Прикладная теория пластичности пористых тел. – М.: Машиностроение, 1989. – 166 с.
29. Люстерник Л. А., Червоненкис О. А., Янпольский А. Р. Математический анализ (вычисление элементарных функций). – М.: Физматгиз, 1963. – 248 с.
30. Павлов В. А., Кипарисов С. С., Щербина В. В. Обработка давлением порошков цветных металлов. – М.: Металлургия, 1977. – 176 с.
31. Технология металлов и сплавов: учебник / Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, Н. Е. Стариков, В. И. Золотухин, А. Н. Сергеев, А. Д. Бреки, О. В. Кузовлева, Г. М. Журавлёв, Д. А. Провоторов; Под ред. проф. Н. Н. Сергеева. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. – 490 с.: ISBN 978-5-7679-3777-6.
32. Гвоздев А. Е., Сергеев Н. Н., Минаев И. В., Тихонова И. В., Колмаков А. Г. Роль процесса зародышеобразования в развитии некоторых фазовых переходов первого рода // Материаловедение. – 2015. – № 1. – С. 15–21.
33. Gvozdev A. E., Golyshev I. V., Minayev I. V., Sergeyev A. N., Sergeyev N. N., Tikhonova I. V., Khonelidze D. M., Kolmakov A. G. Multiparametric optimization of laser cutting of steel sheets // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – Т. 6. – № 4. – С. 305–310.
34. Gvozdev A. E., Bogolyubova D. N., Sergeev N. N., Kolmakov A. G., Provotorov D. A., Tikhonova I. V. Features of softening processes of aluminum, copper, and their alloys under hot deformation // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – Т. 6. – № 1. – С. 32–40.
35. Бреки А. Д., Гвоздев А. Е., Колмаков А. Г. Использование обобщенного треугольника паскаля для описания колебаний силы трения материалов // Материаловедение. – 2016. – № 11. – С. 3–8.
36. Макаров Э. С., Гвоздев А. Е., Журавлев Г. М., Сапожников С. В., Сергеев А. Н., Колмаков А. Г., Бреки А. Д., Малий Д. В., Добровольский Н. Н. Анализ уравнений теории пластичности порошковых металлических систем // Чебышевский сборник. – 2018, 19 (1). – С. 152–166. URL: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-1-152-166>

37. Макаров Э. С., Журавлев Г. М., Гвоздев А. Е., Сапожников С. В., Сергеев А. Н. Свойства уравнений теории пластичности дилатирующих материалов в концепции пластического газа // Чебышевский сборник. – 2018, 19 (2). – С. 163–171.
URL: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-163-171>
38. Журавлев Г. М., Гвоздев А. Е., Колмаков А. Г., Сергеев А. Н., Малий Д. В. Применение математического метода локальных вариаций для решения задач пластического формоизменения металлических, порошковых и нанокмпозиционных материалов // Чебышевский сборник. – 2018, 19 (4). – С. 43–54. URL: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-4-43-54>
39. Макаров Э. С., Гвоздев А. Е., Журавлев Г. М., Сергеев А. Н., Минаев И. В., Бреки А. Д., Малий Д. В. Применение теории пластичности дилатирующих сред к процессам уплотнения порошков металлических систем // Чебышевский сборник. – 2017, 18(4). – С. 268–284. URL: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-4-268-284>
40. Гвоздев А. Е., Журавлев Г. М., Сапожников С. В. К теоретическому анализу процесса компактирования порошковых материалов прессованием // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. – 2017. – № 4. – С. 273–283.
41. Breki A. D., Aleksandrov S. E., Tyurikov K. S., Kolmakov A. G., Gvozdev A. E., Kalinin A. A. Antifriction properties of plasma-chemical coatings based on SiO₂ with MoS₂ nanoparticles under conditions of spinning friction on SHKH15 steel // Inorganic Materials: Applied Research. – 2018. – Т. 9. № 4. – С. 714–718.
42. Breki A. D., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G., Starikov N. E., Provotorov D. A., Sergeyev N. N., Khonelidze D. M. On friction of metallic materials with consideration for superplasticity phenomenon // Inorganic Materials: Applied Research. – 2017. – Т. 8. № 1. – С. 126–129.
43. Gvozdev A. E., Sergeyev N. N., Minayev I. V., Tikhonova I. V., Sergeyev A. N., Khonelidze D. M., Maliy D. V., Golyshev I. V., Kolmakov A. G., Provotorov D. A. Temperature distribution and structure in the heat-affected zone for steel sheets after laser cutting // Inorganic Materials: Applied Research. – 2017. – Т. 8. № 1. – С. 148–152.
44. Breki A. D., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G. Application of generalized pascal triangle for description of oscillations of friction forces // Inorganic Materials: Applied Research. – 2017. – Т. 8. № 4. – С. 509–514.
45. Gvozdev A. E., Sergeyev N. N., Minayev I. V., Kolmakov A. G., Tikhonova I. V. Role of nucleation in the development of first-order phase transformations // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – Т. 6. № 4. – С. 283–288.
46. Gvozdev A. E., Bogolyubova D. N., Sergeev N. N., Kolmakov A. G., Provotorov D. A., Tikhonova I. V. Features of softening processes of aluminum, copper, and their alloys under hot deformation // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – Т. 6. № 1. – С. 32–40.
47. Gvozdev A. E., Minaev I. V., Sergeyev N. N., Kolmakov A. G., Provotorov D. A., Tikhonova I. V. Grain size effect of austenite on the kinetics of pearlite transformation in low- and medium-carbon low-alloy steels // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – Т. 6. № 1. – С. 41–44.

REFERENCES

1. Defining the laws of soil mechanics: Sat. articles / ed. V. N. Nicholas. – М.: Mir, 1975. – 230 p.
2. Vyalov S. S. Rheological basis of soil mechanics. – М.: Higher School, 1978. – 448 p.

3. Vinogradov G. A., Katashinsky V. P. The theory of sheet rolling of metal powders and granules. – M.: Metallurgy, 1979. – 224 p.
4. Perelman V. E. Forming powder materials. – M.: Metallurgy, 1979. – 232 p.
5. Makarov E. S. To the theory of the formation of metal powders under conditions of plane deformation // News of universities, Mashinostroenie. – 1973. – № 10. – P. 158–162.
6. Pavlov V. A., Kiparisov S. S., Shcherbina V. V. Pressure treatment of non-ferrous metal powders. – M.: Metallurgy, 1977. – 176 p.
7. New deformation processes of metals and alloys / A. P. Kolikov, P. I. Polukhin, A. V. Krupin et al. – M.: Higher School, 1986. – 352 p.
8. Powder metallurgy and sprayed coatings. Ed. B. S. Mitin. – M.: Metallurgy, 1987. – 792 p.
9. Economical methods of forming parts / Ed. K. N. Bogoyavlenskogo and V. V. Rice. – L.: Lenizdat, 1984. – 144 p.
10. The theory of plasticity of dilating media: monograph / E. S. Makarov, A. E. Gvozdev, G. M. Zhuravlev; under ed. prof. A. E. Gvozdev. 2nd ed. reclaiming and add. – Tula: Publishing House of TSU, 2015. – 337 p.
11. Kaluzhsky Ya. A., Batrakov O. T. Seal roadbed and pavement. – M.: Transport, 1971. – 158 p.
12. Kharkhut N. Ya. Soil compaction machines. – L.: Mechanical Engineering, 1973. – 176 p.
13. Green R. J. A plasticity theory for porous solids // Int. J. Mech. Sci., vol. 14, 1972, pp. 215–224.
14. Doraivelu S. M., Gegel H. L., Gunasekera J. S., Malas J. C., Morgan J. T., Tomas J. F. A new yield function for compressible P/M materials // Int. J. Mech. Sci., vol. 26, 1984, pp. 527–535.
15. Harr M. E. Fundamentals of theoretical soil mechanics. – M.: stroiizdat, 1971. – 320 p.
16. Makarov E. S., Tolokonnikov L. A. Version of the theory of plasticity dilating medium // Izv. USSR Academy of Sciences, Solid Mechanics. – 1979. – № 1. – p. 88–93.
17. Kachanov L. M. Fundamentals of the theory of plasticity. – M.: Science, 1969. – 420 p.
18. Thomas T. Plastic flow and destruction in solids. – M.: Mir, 1964. – 308 p.
19. Mechanics of granular media: Sat. articles / ed. I. V. Wide. – M.: Mir, 1985. – 280 p.
20. Makarov E. S., Tolokonnikov L. A. Flat problems of the theory of plasticity of orthotropic dilating media // Izv. USSR Academy of Sciences, Solid Mechanics. – 1979. – № 5. – p. 139–143.
21. Makarov E. S., Tolokonnikov L. A. The theory of magnetoplasticity of dilating media // V All-Union Congress on Theoretical and Applied Mechanics (annotated report). – Alma-Ata: Science, 1981. – p. 245.
22. Makarov E. S., Kiselev V. I. Theory of electroplasticity of isotropic dilating media // Issl. in the region plasticity and metal forming. – Tula: ed. TulPI, 1982. – p. 104–109.
23. Makarov E. S., Tolokonnikov L. A. The equations of the theory of magnetoplasticity of an isotropic dilating medium // Izv. USSR Academy of Sciences, Solid Mechanics. – 1983. – № 5. – p. 188–190.

24. Makarov E. S., Kiselev V. I. Problems of the theory of plastic flow of dilating media in electric and magnetic fields // General problems and methods for the study of plastic and viscoelastic materials and structures. – Sverdlovsk: ed. UC AN SSSR, 1986. – p. 66–71.
25. Makarov E. S. Plastic deformation of dilating media in electrostatic and magnetostatic fields // Essl. in the region theories, technologies and equipment of stamping production. – Tula: ed. TSU, 1998. – p. 64–69.
26. Makarov E. S. A variant of construction and some flat problems of the theory of chemoplasticity // Izv. USSR Academy of Sciences, Solid Mechanics. – 1989. – № 5. – p. 70–72.
27. Makarov E. S. The application of the theory of chemoplasticity to the calculation of the limiting states of corroding pipes // Physico-chemical mechanics of materials. – 1989. – № 2. – p. 115–117.
28. Druyanov B. A. Applied theory of plasticity of porous bodies. – M.: Mashinostroenie, 1989. – 166 p.
29. Lyusternik L. A., Chervonenkis O. A., Yanpolsky A. R. Mathematical analysis (calculation of elementary functions). – M.: Fizmatgiz, 1963. – 248 p.
30. Pavlov, V. A., Kiparisov, S. S., Shcherbina, V. V. Pressure treatment of non-ferrous metal powders. – M.: Metallurgy, 1977. – 176 p.
31. Technology of metals and alloys: textbook / N. N. Sergeev, A. E. Gvozdev, N. E. Starikov, V. I. Zolotukhin, A. N. Sergeev, A. D. Brecky, O. V. Kuzovlev, G. M. Zhuravlev, D. A. Provotorov; Ed. prof. N. N. Sergeyeva. – Tula: TSU, 2017. – 490 p.: ISBN 978-5-7679-3777-6.
32. Gvozdev A. E., Sergeev N. N., Minaev I. V., Tikhonova I. V., Kolmakov A. G. The role of the nucleation process in the development of some phase transitions of the first kind // Material Science. – 2015. – No. 1. – P. 15–21.
33. Gvozdev A. E., Golyshev I. V., Minayev I. V., Sergeyev A. N., Sergeyev N. N., Tikhonova I. V., Khonelidze D. M., Kolmakov A. G. Multiparametric optimization of laser cutting of steel sheets // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – T. 6. № 4. – C. 305–310.
34. Gvozdev A. E., Bogolyubova D. N., Sergeev N. N., Kolmakov A. G., Provotorov D. A., Tikhonova I. V. Features of softening processes of aluminum, copper, and their alloys under hot deformation // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – T. 6. № 1. – C. 32–40.
35. Breki A. D., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G. Using the generalized Pascal triangle to describe the fluctuations of the friction force of materials // Math-rial Studies. – 2016. – No. 11. – P. 3–8.
36. Makarov E. S., Gvozdev A. E., Zhuravlev G. M., Sapozhnikov S. V., Sergeev A. N., Kolmakov A. G., Breki A. D., Maliy D. V., Dobrovolsky N. N. Analysis of the equations of the theory of plasticity of powder metal systems // Chebyshevsky collection. – 2018, 19 (1), c. 152–166. URL: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-1-152-166>
37. Makarov, E. S., Zhuravlev, G. M., Gvozdev, A. E., Sapozhnikov, S. V., Sergeev, A. N. Properties of equations of the theory of plasticity of dilating materials in the concept of plastic gas // Chebyshevsky collection. – 2018, 19 (2), p. 163–171. URL: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-163-171>

38. Zhuravlev G. M., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G., Sergeev A. N., Maliy D. V. The use of the mathematical method of local variations for solving the problems of plastic forming metal, powder and nanocomposite materials // Chebyshevsky collection. – 2018, 19 (4), p. 43–54. URL: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-4-43-54>
39. Makarov E. S., Gvozdev A. E., Zhuravlev G. M., Sergeev A. N., Minaev I. V., Breki A. D., Maliy D. V. Application of the theory of plasticity of dilating media to the processes of compaction of powders of metal systems // Chebyshevsky collection. – 2017, 18 (4), p. 268–284. URL: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-4-268-284>
40. Gvozdev A. E., Zhuravlev G. M., Sapozhnikov S. V. To the theoretical analysis of the process of compacting powder materials by pressing // Izvestiya Tula State University. Earth Sciences. – 2017. – No. 4. – P. 273–283.
41. Breki A. D., Aleksandrov S. E., Tyurikov K. S., Kolmakov A. G., Gvozdev A. E., Kalinin A. A. Antifriction properties of plasma-chemical coatings based on SiO_2 with MoS_2 nanoparticles under conditions of spinning friction on SHKH15 steel // Inorganic Materials: Applied Research. – 2018. – T. 9. № 4. – С. 714–718.
42. Breki A. D., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G., Starikov N. E., Provotorov D. A., Sergeyev N. N., Khonelidze D. M. On friction of metallic materials with consideration for superplasticity phenomenon // Inorganic Materials: Applied Research. – 2017. – T. 8. № 1. – С. 126–129.
43. Gvozdev A. E., Sergeyev N. N., Minayev I. V., Tikhonova I. V., Sergeyev A. N., Khonelidze D. M., Maliy D. V., Golyshv I. V., Kolmakov A. G., Provotorov D. A. Temperature distribution and structure in the heat-affected zone for steel sheets after laser cutting // Inorganic Materials: Applied Research. – 2017. – T. 8. № 1. – С. 148–152.
44. Breki A. D., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G. Application of generalized pascal triangle for description of oscillations of friction forces // Inorganic Materials: Applied Research. – 2017. – T. 8. № 4. – С. 509–514.
45. Gvozdev A. E., Sergeyev N. N., Minayev I. V., Kolmakov A. G., Tikhonova I. V. Role of nucleation in the development of first-order phase transformations // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – T. 6. № 4. – С. 283–288.
46. Gvozdev A. E., Bogolyubova D. N., Sergeev N. N., Kolmakov A. G., Provotorov D. A., Tikhonova I. V. Features of softening processes of aluminum, copper, and their alloys under hot deformation // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – T. 6. № 1. – С. 32–40.
47. Gvozdev A. E., Minaev I. V., Sergeev N. N., Kolmakov A. G., Provotorov D. A., Tikhonova I. V. Grain size effect of austenite on the kinetics of pearlite transformation in low- and medium-carbon low-alloy steels // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – T. 6. № 1. – С. 41–44.

Получено 18.03.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.