УДК 511.3

Владимир Григорьевич Чирский
(к 70-летию со дня рождения)

Н. М. Добровольский, Т. К. Иконникова, Е. С. Крупицын, В. Ю. Матвеев,
Ю. В. Нестеренко, В. Н. Чубариков, М. В. Шамолин

Владимир Григорьевич Чирский родился в Москве 30 июня 1949 года. Его родителями были Григорий Михайлович Чирский, начальник одного из управлений МПС и Елена Ивановна Фирстова, преподаватель английского языка на Госкурсах «Иняз». Его брат, Алексей Григорьевич Чирский, 1932 года рождения, был горным инженером. У него прекрасная семья, жена – Галина Владимировна, две дочери, Наталья и Ольга, четыре внука и внучка.

Владимир Григорьевич окончил среднюю школу №710 с серебряной медалью. Он учился на механико – математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова и на третьем курсе начал изучать теорию чисел под руководством профессора А. Б. Шидловского, заведующего кафедрой теории чисел МГУ. По окончании факультета был рекомендован в аспирантуру отделения математики. К этому моменту им были опубликованы 4 статьи. С 1973 года начал работать на кафедре математического анализа сначала почасовиком, с 1975 года ассистентом кафедры. Защитил кандидатскую диссертацию в 1978 году и с 1983 года работал доцентом кафедры математического анализа. После защиты в 2000 году докторской диссертации работает профессором этой кафедры с 2001 года по настоящее время. С 1998 г. по 2006 г. работал заместителем декана механико–математического факультета по учебной работе. С 2007 года исполняет обязанности заведующего кафедрой теории чисел МПГУ, с 2006 года работает профессором в РАНХиГС. Кроме того, он является редактором раздела «Теория чисел» РЖ «Математика» ВИНТИ РАН.

В. Г. Чирский преподавал и читал лекции на различных факультетах МГУ: механико-математическом, химическом, геологическом, факультете психологии. Он является ответственным на кафедре за преподавание на химическом факультете. Он участвовал в издании 5 учебных пособий по математическому анализу и приложениям математики к задачам естествознания. Кроме того, он многие годы был старшим экзаменатором на вступительных

экзаменах по математике на различных факультетах МГУ. Опыт этих экзаменов нашел отражение в 6 пособиях по элементарной математике. Под его руководством защищены две кандидатские диссертации, подготовлены к защите диссертации еще двух его учеников.

Научные интересы В. Г. Чирского относятся к теории трансцендентных чисел в p -адических полях и прямых произведений этих полей. Используемый им метод представляет собой некоторую модификацию метода Зигеля-Шидловского в теории трансцендентных чисел. Изначально этот метод использовался для исследования арифметической природы E -функций. Целая функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n \quad (1)$$

называется E -функцией, если выполнены следующие условия:

- (i) Все коэффициенты c_n принадлежат некоторому алгебраическому числовому полю $\mathbb{K}$ конечной степени $\varkappa$ над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.
- (ii) Максимумы абсолютных величин алгебраически сопряжённых с числом c_n чисел для любого $\varepsilon > 0$ представляют собой $O(n^{\varepsilon n})$, $n \rightarrow \infty$. Для так называемой E -функции в узком смысле это соотношение заменяется на $O(C^n)$, $n \rightarrow \infty$ с некоторой постоянной $C > 1$.
- (iii) Существует последовательность натуральных чисел d_n такая, что при $k = 0, 1, \dots, n$ числа $d_n c_k$ принадлежат кольцу целых чисел $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ поля $\mathbb{K}$ и $d_n = O(n^{\varepsilon n})$, $n \rightarrow \infty$. (Для E -функции в узком смысле это соотношение заменяется на $O(C^n)$, $n \rightarrow \infty$ с некоторой постоянной $C > 1$.)

В работах А. Б. Шидловского были получены основные теоремы о значениях E -функций, получившие широкую известность. Сформулируем одну из них.

ТЕОРЕМА. (А. Б. Шидловский) Пусть E -функции $f_1(z), \dots, f_m(z)$ составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$y'_i = Q_{i,0}(z) + \sum_{j=1}^m Q_{i,j}(z) y_j, \quad i = 1, \dots, m \quad (2)$$

с коэффициентами из поля $\mathbb{C}(z)$ рациональных функций от z и алгебраически независимы над этим полем. Пусть α – алгебраическое число, отличное от нуля и особых точек системы (2). Тогда числа $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ алгебраически независимы, т.е. для любого отличного от нулевого многочлена $P(y_1, \dots, y_m)$ выполняется неравенство

$$P(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) \neq 0.$$

Эта теорема имеет многочисленные приложения к обобщённым гипергеометрическим E -функциям вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_l)_n}{(b_1)_n \dots (b_m)_n} \left(\frac{z}{m-l} \right)^{(m-l)n}, \quad (3)$$

где все числа $a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m$ – рациональные, причём каждое из чисел $b_1, \dots, b_m$ отлично от нуля и целых отрицательных чисел, число $m-l$ положительное, а символ $(c)_n$ определён равенствами: $(c)_0 = 1$, $(c)_n = c(c+1) \dots (c+n-1)$, $n = 1, 2, \dots$. Практически полное решение

задачи об условиях, при которых обобщённые гипергеометрические E – функции алгебраически независимы над полем $\mathbb{C}(z)$, получено в работах ученика А. Б. Шидловского, профессора В. Х. Салихова.

В основополагающей работе К. Зигеля отмечена возможность применения этого метода к другому классу G – функций. Ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (4)$$

называется G – функцией, если все коэффициенты c_n принадлежат некоторому алгебраическому числовому полю $\mathbb{K}$ конечной степени $\varkappa$ над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и удовлетворяют тем же условиям, что и коэффициенты E – функции в узком смысле. Исследуя арифметические свойства значений функций этого класса, Э. Бомбиери в 1981 году ввёл понятие глобального (алгебраического) соотношения. Пусть $P(y_1, \dots, y_m)$ – отличный от нулевого многочлен с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$ и пусть степенные ряды $f_1(z), \dots, f_m(z)$ имеют коэффициенты из поля $\mathbb{K}$ и точка $\alpha \in \mathbb{K}$. Соотношение

$$P(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) = 0$$

называется *глобальным*, если оно выполняется во всех полях $\mathbb{K}_v$, в которых сходятся все ряды $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$.

В работах В. Г. Чирского введён в рассмотрение новый класс степенных рядов, к которому удалось применить метод Зигеля–Шидловского для исследования глобальных соотношений, класс F –рядов. Естественным шагом стало исследование рядов вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n! \cdot z^n. \quad (5)$$

Будем говорить, что этот ряд принадлежит классу $F(\mathbb{K}, C_1, C_2, C_3, q)$, если

- (i) Все коэффициенты c_n принадлежат некоторому алгебраическому числовому полю $\mathbb{K}$ конечной степени $\varkappa$ над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.
- (ii) Максимумы абсолютных величин алгебраически сопряжённых с числом c_n чисел представляют собой $O(e^{C_1 n})$, $n \rightarrow \infty$ с некоторой постоянной C_1 .
- (iii) Существует последовательность натуральных чисел d_n такая, что при $k = 0, 1, \dots, n$ числа $d_n c_k$ принадлежат кольцу целых чисел $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ поля $\mathbb{K}$ и $d_n = q^n d_{0,n}$, $q \in \mathbb{N}$ а числа $d_{0,n}$ делятся только на простые числа p , не превосходящие $C_2 n$ и для всех таких простых p выполняется неравенство $v_p(d_{0,n}) \leq C_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2} \right)$.

Из свойства 3 следует, что если простое число p не делит число q , то ряд (5), например, с рациональными коэффициентами c_n , имеет в поле $\mathbb{Q}_p$ радиус сходимости, равный $p^{\frac{1}{p-1}} > 1$. Именно это обстоятельство позволяет применить к исследованию арифметических свойств значений таких рядов формулу произведения.

Известным примером F –ряда является ряд Эйлера $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot (-z)^n$. Разумеется, если ряд (5) отличен от многочлена, он имеет в поле $\mathbb{C}$ нулевой радиус сходимости.

Легко заметить также, что если коэффициенты c_n ряда (5) удовлетворяют перечисленным условиям, то ряд (4) с теми же коэффициентами c_n является G – функцией, а ряд (1) с теми же коэффициентами c_n является E – функцией в узком смысле.

Сформулированные ниже теоремы представляют собой некоторые аналоги основных теорем А. Б. Шидловского, справедливые для F – рядов.

ТЕОРЕМА 1 (Теорема 1.1 из (7)). Пусть F – ряды $f_1(z) \equiv 1, f_2(z), \dots, f_m(z)$ линейно независимы над полем $\mathbb{K}(z)$ и составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$y'_i = Q_{i,0}(z) + \sum_{j=1}^m Q_{i,j}(z) y_j, i = 1, \dots, m \quad (6)$$

с коэффициентами из поля $\mathbb{C}(z)$ рациональных функций от z .

Пусть $\xi \neq 0$, $\xi \in \mathbb{K}$ – регулярная точка системы (6). Пусть

$$L(y_1, \dots, y_m) = h_1 y_1 + \dots + h_m y_m -$$

ненулевая линейная форма, $h_i \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $i = 1, \dots, m$. Пусть $H(L) = \max H(h_i)$.

Существует эффективно вычисляемая постоянная H_0 такая, что для любого

$$H \geq \max(H_0, H(L))$$

существуют эффективно вычисляемая постоянная C_0 , простое число p , удовлетворяющие неравенствам

$$P_l(H) = l \left(\frac{\ln H}{\ln \ln H} \right) \leq p \leq u \left(\frac{\ln H}{\ln \ln H} \left(1 + \frac{C_0}{\sqrt{\ln \ln H}} \right) \right) = P_u(H)$$

и нормирование v поля $\mathbb{K}$, продолжающее p – адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$ такие, что имеет место неравенство

$$L(\xi) = L(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0.$$

Замечание. Можно также для хотя бы одного v , продолжающее p – адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$ установить оценку

$$|L(\xi)|_v \geq H^{-m - \frac{m+3+2mC_5}{\sqrt{\ln \ln H}}}.$$

Эта теорема допускает формулировку в несколько иных терминах. Рассмотрим множество точек вида:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots),$$

образующих бесконечномерное пространство. Это пространство представляет собой прямое произведение полей p – адических чисел. Именно, координата с номером n этого вектора представляет собой p_n – адическое число, где p_n – простое число с номером n . Напомним, что p – адические числа являются пополнением поля рациональных чисел по p – адическому нормированию. Для рационального числа a символ $|a|_p$ обозначает величину p – адического нормирования, т.е. $|a|_p = p^{-\vartheta_p(a)}$, где, в свою очередь, символ $\vartheta_p(a)$ обозначает степень, в которой простое число p входит в разложение числа a на простые множители. Это прямое произведение имеет естественную структуру коммутативного кольца с единицей (и с делителями нуля). Его принято называть кольцом полиадических чисел. Элементы $\mathbf{a}$ кольца целых полиадических чисел имеют каноническое представление в виде

$$\mathbf{a} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m m!, \quad a_m \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq a_m \leq m. \quad (7)$$

Степень, в которой простое число p входит в разложение числа $n!$ на простые множители равна $\frac{n-S_n}{p-1}$, где S_n обозначает сумму цифр в p – ичном разложении числа n . Следовательно, для любого p при $n \rightarrow \infty$ выполняется соотношение $|a_n n!|_p \rightarrow 0$. Это – достаточное условие для

того, чтобы ряд (7) сходился в поле $\mathbb{Q}_p$. Сумму этого ряда (7) в поле $\mathbb{Q}_p$ обозначаем $\mathbf{a}^{(p)}$. Как отмечено выше, полиадическое число $\mathbf{a}$ можно рассматривать, как точку бесконечномерного пространства с координатами $\mathbf{a}^{(p)^n}$, где p_n – простое число с номером n . Следует отметить, что ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!$, $a_n \in \mathbb{Q}$ могут сходиться не во всех полях $\mathbb{Q}_p$. В случае, когда такой ряд расходится лишь в конечном множестве полей $\mathbb{Q}_p$, мы говорим о *почти полиадических* числах и отождествляем их с элементами прямого произведения всех полей $\mathbb{Q}_p$, кроме упомянутого выше конечного множества.

Можно рассмотреть и прямое произведение полей $\mathbb{K}_v$, где v продолжает p – адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$ на поле $\mathbb{K}$ алгебраических чисел конечной степени $\varkappa$. Если v продолжает p – адическое нормирование, то поле $\mathbb{K}_v$ представляет собой алгебраическое расширение поля p – адических чисел $\mathbb{Q}_p$ степени $\varkappa_v$ и справедливо равенство $\sum_v \varkappa_v = \varkappa$, где суммирование производится по всем нормированиям v , продолжающим p – адическое нормирование. Мы рассматриваем нормализованные нормирования, для которых $|p|_v = p^{-\frac{\varkappa_v}{\varkappa}}$. Если нормирование v продолжает обычную абсолютную величину, то ему соответствует алгебраически сопряжённое поле $\mathbb{K}^{(i)}$ и $\varkappa_v = 1$, если $\mathbb{K}^{(i)}$ – подполе поля действительных чисел и $\varkappa_v = 2$, если нет. Равенство $\sum_v \varkappa_v = \varkappa$ выполняется и в этом случае.

При этом мы будем говорить о $\mathbb{K}$ – *полиадических* и, соответственно, о $\mathbb{K}$ – *почти полиадических* числах. Для элемента $\mathbf{a}$ этого прямого произведения обозначаем $\mathbf{a}^{(v)}$ его координату в поле $\mathbb{K}_v$.

Если существует $P(x)$ – многочлен с рациональными коэффициентами, отличный от тождественного нуля такой, что $P(\mathbf{a}) = 0$ (иными словами, $P(\mathbf{a}^{(v)}) = 0$ в каждом поле $\mathbb{K}_v$ этого прямого произведения), то говорим, что $\mathbf{a}$ – *алгебраический элемент*. Если элемент $\mathbf{a}$ не является алгебраическим, то его называют *трансцендентным*. Трансцендентность элемента означает, что для любого $P(x)$ – многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, существует простое число p и нормирование v поля $\mathbb{K}$, продолжающее p – адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$ такие, что $P(\mathbf{a}^{(v)}) \neq 0$ в поле $\mathbb{K}_v$. Назовём элемент $\mathbf{a}$ *бесконечно трансцендентным*, если для любого $P(x)$ – многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, существует бесконечное множество простых чисел p , для каждого из которых есть нормирование v поля $\mathbb{K}$, продолжающее p – адическое нормирование такое, что $P(\mathbf{a}^{(v)}) \neq 0$ в поле $\mathbb{K}_v$. Элемент $\mathbf{a}$ называется *глобально трансцендентным*, если для любого $P(x)$ – многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, неравенство $P(\mathbf{a}^{(v)}) \neq 0$ выполняется во всех полях $\mathbb{K}_v$ рассматриваемого прямого произведения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть F – ряды $f_1(z) \equiv 1, f_2(z), \dots, f_m(z)$ составляют решение системы (6) и линейно независимы над полем $\mathbb{K}(z)$. Пусть $\xi \in \mathbb{K}$ – регулярная точка системы (6). Пусть

$$L(y_1, \dots, y_m) = h_1 y_1 + \dots + h_m y_m -$$

ненулевая линейная форма, $h_i \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $i = 1, \dots, m$. Тогда существует бесконечное множество простых чисел p и нормирований v поля $\mathbb{K}$, продолжающих p – адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$, таких, что в поле $\mathbb{K}_v$

$$L(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0.$$

Иными словами, ряды $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$ бесконечно линейно независимы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть F – ряды $f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z)$ составляют решение системы (6) и алгебраически независимы над полем $\mathbb{K}(z)$. Пусть $\xi \in \mathbb{K}$ – регулярная точка системы (6). Пусть $P(y_1, \dots, y_m)$ – ненулевой многочлен с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$. Тогда существует бесконечное множество простых чисел p и нормирований v поля $\mathbb{K}$, продолжающих p – адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$, таких, что в поле $\mathbb{K}_v$

$$P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0.$$

Иными словами, ряды $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$ бесконечно алгебраически независимы

Сформулированные теоремы имеют приложения к обобщенным гипергеометрическим рядам. Символ Похгаммера определён равенствами

$$(a)_0 = 1, (a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1), n \geq 1.$$

Для множества действительных чисел $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_s\}$, относительно которых предполагаем, что числа $\beta_1, \dots, \beta_s$ – не целые неположительные, принято обозначать

$${}_rF_s \left(\begin{matrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_r \\ \beta_1 & \dots & \beta_s \end{matrix} ; z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_s)_n n!} z^n \quad (8)$$

так называемый обобщённый гипергеометрический ряд. Можно рассматривать несколько более общие ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_s)_n} z^n. \quad (9)$$

Ряды (8) и (9) относятся к так называемым рядам Жевре порядков $s+1-r$ и $s-r$, соответственно.

Если $r-s < 0$, то рассматриваемый ряд (9) представляет собой целую функцию (ряд (8) представляет целую функцию при $r-s \leq 0$). К этим случаям относятся показательная функция, функции Бесселя, функции Куммера и большое количество других, важных в математике функций. При условии рациональности чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_s$ они входят в класс E – функций Зигеля и к исследованию их значений применим известный метод Зигеля-Шидловского в теории трансцендентных чисел [1]. Применению этого метода к гипергеометрическим E – функциям посвящены работы В. Х. Салихова [8]–[10], в которых получено близкое к полному решение проблемы. При $r-s = 0$ ряд (9) имеет конечный радиус сходимости (ряд (8) имеет конечный радиус сходимости при $r-s = -1$). К таким функциям относятся логарифмическая функция, гипергеометрическая функция Гаусса, многие алгебраические функции, неполные эллиптические интегралы и др. При условии рациональности чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_s$ они входят в класс G – функций Зигеля и исследованию их посвящены работы А. И. Галочкина [11], Г. В. Чудновского [10], Э. Бомбьери [5], И. Андре [13] и др.

Если же $r-s > 0$, то ряд (9), отличный от многочлена, имеет нулевой радиус сходимости в поле $\mathbb{C}$. (Ряд (8) имеет нулевой радиус сходимости при $r-s \geq 0$). В этом случае получаются F – ряды. Исследованию свойств таких рядов посвящены, например, работы [17]–[20]. В случае, когда среди параметров рассматриваемых гипергеометрических рядов содержатся иррациональные алгебраические числа, используя аппроксимации Эрмита–Паде, приведенные в [21], удастся доказать бесконечную линейную независимость значений таких рядов в алгебраических точках [22].

Ещё одно направление исследований – вопросы алгебраической независимости элементов $\mathbb{C}_p$ над полем $\mathbb{Q}_p$. В работах В. Г. Чирского и П. Бундшу [34], [35], [46], [59] установлены теоремы, дающие достаточные условия алгебраической независимости над полем $\mathbb{Q}_p$ совокупностей рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^{r_n},$$

где a_n – единицы кольца $\mathbb{Z}_p$, а r_n – возрастающая последовательность рациональных чисел. Рассмотрены также задачи об алгебраической независимости над полем $\mathbb{Q}_p$ значений аналитических функций в точках такого вида.

СПИСОК НАУЧНЫХ РАБОТ ЧИРСКОГО В. Г.

1. Об арифметических свойствах значений некоторых функций.
Совместно с М. С. Нурмагомедовым // Вестн. Моск. Ун-та.- Сер.1, матем., механ.-1973.- №1. -с.19 – 26.
2. Об арифметических свойствах значений некоторых функций.
Совместно с М. С. Нурмагомедовым // Вестн. Моск. Ун-та.- Сер.1, матем., механ.-1973.- №2. -с.38 – 45.
3. Об арифметических свойствах значений аналитических функций, связанных алгебраическими уравнениями над полем рациональных функций.// Матем. заметки.-1973.-т.14.- вып.1. -с.83 – 94.
4. Об арифметических свойствах значений эллиптических интегралов. // Вестн. Моск. Ун-та.- Сер.1, матем., механ.-1973.-№5. -с.57 – 64.
5. Об арифметических свойствах значений эллиптических интегралов. // Успехи матем. наук.-1977.-т.32.-№1(193). -с.211 – 212.
6. Об арифметических свойствах значений аналитических функций с алгебраическими коэффициентами рядов Тейлора. // Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем., механ.-1978.-№2. -с.41 – 47.
7. Об арифметических свойствах значений аналитических функций с алгебраическими иррациональными коэффициентами рядов Тейлора. // Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем., механ.-1978.-№3. -с.29 – 34.
8. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем.,механ.-1978.-№3. -с.29 – 34.
9. Об арифметических свойствах значений эллиптических интегралов. // Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем.,механ.-1979.-№1. -с.3 – 11.
10. Оценки линейных форм с алгебраическими коэффициентами. // Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем.,механ.-1984.-№3. -с.32 – 35.
11. Оценки многочленов от значений эллиптических интегралов.// Диофантовы приближения, ч.1, МГУ.-1985. -с.106 – 109.
12. О нетривиальных глобальных соотношениях. // Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем., механ. — 1989. — №5. -с.33 – 36
13. О глобальных соотношениях.// Матем. заметки.-1990.-т.48.-вып.2 -с.123 – 127.
14. Об алгебраических соотношениях в локальных полях. // Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем.,механ.-1990.-№3. -с.92 – 95.
15. Глобальные соотношения и гипергеометрические ряды.// Успехи матем. наук.-1991.-т.46.- вып.6(282). -с.221 – 222.
16. Об арифметических свойствах значений G-функций.// Вестн. Моск. ун-та. — Сер.1, матем., механ. — 1991. —№4. - с.84 – 86.

17. Об арифметических свойствах значений некоторых функций. // Вестн. Моск. Ун-та.- Сер.1, матем.,механ.-1992.-№4. -с.93 – 95.
18. Об алгебраических соотношениях в неархимедовски нормированных полях.// Функциональный анализ и прилож.-1992.-т.26.-вып.2. -с.41 – 50.
19. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций. // Матем. заметки. -1992. -т.52. -вып.2. -с.125 – 131.
20. О рядах, алгебраически независимых во всех локальных полях.// Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем.,механ.-1978.-№3. -с.29 – 34.
21. Оценки многочленов и линейных форм в прямых произведениях полей// Вестн.Моск.ун-та.-сер.1.матем. механ.-1994.-№4. -с.35 – 39.
22. Арифметические свойства значений гипергеометрических рядов.// Труды Матем. ин-та РАН.-1994.-т.207. -с.347 – 352.
23. О глобальных соотношениях для гипергеометрических рядов.// Труды Семина. Им. И.Г. Петровского.-1995.-№18. -с.204 – 212.
24. Об арифметических свойствах значений некоторых рядов.// Матем.записки.-1996.-т.2. -с.110 – 113.
25. Об арифметических свойствах значений некоторых рядов.// Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем.,механ.-1997.-№2. -с.53 – 55.
26. Об алгебраической независимости значений функций, удовлетворяющих системам функциональных уравнений.// Труды Матем. ин-та РАН.-1997.-т.218. -с.433 – 438.
27. Об арифметических свойствах значений некоторых функций.// Фундамент. и прикл. матем.-1998.-т.4.-№2. -с.725 – 732.
28. О линейных глобальных соотношениях.// Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем.,механ.-1998.-№4. -с.70 – 72.
29. Линейная независимость p -адических значений некоторых q -базисных гипергеометрических рядов.// Фундамент. и прикл.матем.-1999.-т.5,№2. -с.619 – 625.
30. Арифметические свойства некоторых p -адических чисел.// Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем.,механ.-1999.-№6. -с.16 – 19.
31. Приближения Эрмита–Паде для некоторых q -базисных гипергеометрических рядов.// Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем.,механ.-2000.-№2. -с.7 – 11.
32. Арифметические свойства рядов в полях с неархимедовскими нормированиями. Москва.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ.-2000.-120стр.
33. Algebraic independence of elements from C_p over Q_p . Совместно с P.Bundschuh //Arch.der Math.,79(2002), 345 – 352.
34. Algebraic independence of elements from C_p over Q_p , II, Acta Arithmetica,113.4(2004), 309 – 326, совместно с P.Bundschuh.
35. Effective estimates for global relations on Euler-type series, Ann. Fac.Sci. Toulouse, Vol XIII, №2, 2004, 241 – 260. Совместно с D.Bertrand, J.Yebbou.

36. Метод Зигеля в p -адической области. Фундам. и прикл. Матем, 2005, том 11, №6, 221 – 230.
37. Обобщение понятия глобального соотношения. Записки научных семинаров ПОМИ, Том 322, 2005. Стр. 220 – 238.
38. Рекуррентные соотношения для некоторых определителей. Фундаментальная и прикладная математика, 2010, т.16, №6, 173 – 175.
39. Алгебраическая независимость над $\mathbb{Q}_p$ значений аналитических функций в точках из C_p . Вестник МГУ, сер 1.,матем.мех.,2010, №6, 25 – 27. Совм. с О.Ю.Баженовой.
40. Оценки линейных форм и многочленов от совокупностей полиадических чисел. Чебышевский сборник, 2011, №4.
41. Оценки многочленов от некоторых g -адических чисел. Вестник МГУ, сер.1, матем.,механ, 2012, №2, 58 – 59. Совм. С Е.С.Крупицыным.
42. Арифметические свойства некоторых полиадических рядов. Вестник МГУ, сер.1, матем.,механ, 2012, №5
43. Recurrent relations for certain determinants.в журнале Journal of Mathematical Sciences, издательство Plenum Publishers (United States), 2012, том 182, №4, с. 565 – 566 DOI
44. О некоторых свойствах полиадических разложений (совм. с В. Ю. Матвеевым). // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, №2, с. 163 – 171.
45. Values of Analytic Functions at points of C_p . Russian Journal of Mathematical Physics, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), 2013.-том 20, №2, с. 149 – 154
46. On the Arithmetic Properties of Polyadic Integers. International Mathematical Forum, том 8, №37, с. 1793 – 1796
47. Об арифметических свойствах обобщённых гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами. Известия РАН. Серия математическая, 2014.том 78, № 6, с. 193 – 210
48. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами. Доклады Академии наук, издательство Наука (М.), 2014. том 459, №6, с. 677 – 679
49. On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters. *Izvestiya. Mathematics*, издательство *American Mathematical Society(United States)*, 2014. том 78, №6, с. 1244– 1260
50. Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients. Doklady Mathematics, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (*Russian Federation*), 2014.-том 90, № 3, с. 766 – 768
51. Об одном подходе к преобразованию периодических последовательностей. совм. с Нестеренко А.Ю. Дискретная математика, издательство Наука(М.), 2015.-том 27, №4, с. 150 – 157
52. Арифметические свойства целых полиадических чисел. Чебышевский сборник, издательство Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого"(Тула), 2015.- том 16, №1, с. 254 – 264

53. Estimating polynomials over Z_p at points from C_p . (совм. с Bundschuh P.). *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, 2015. том 5, №1-2, с. 14–20
54. Arithmetic properties of Euler series. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2015. том 70, №1, с. 41 – 43
55. О преобразованиях периодических последовательностей. *Чебышевский сборник, издательство Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого"*(Тула), 2016. том 17, №3, с. 180 – 185
56. Представление натуральных чисел слагаемыми определённого вида. *Современные проблемы математики*, 2016. -№24, с. 81 – 84
57. Периодические и непериодические конечные последовательности. *Чебышевский сборник, издательство Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого"*(Тула), 2017. -том 18, №2, с. 275 – 278
58. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами. Известия РАН. Серия математическая, 2017.-том 81, № выпуск 2, с. 215 – 232
59. Topical problems of the theory of Transcendental numbers: Developments of approaches to their solutions in the works of Yu.V. Nesterenko. *Russian Journal of Mathematical Physics, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation)*, 2017. том 24, №2, с. 153 – 171
60. Representation of positive integers by summands of a certain form. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, издательство Springer Verlag (Germany)*, 2017.- том 298, №1, с. 70 – 73
61. Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients. *Izvestiya. Mathematics, издательство American Mathematical Society (United States)*, 2017. -том 81, №2, с. 444 – 461
62. An approach to the transformation of periodic sequences. (совм.с Nesterenko A.Yu). *Discrete Mathematics and Applications, издательство V S P (Netherlands)*, 2017. том 27, №1, с. 1 – 6.
63. Арифметические свойства обобщенных гипергеометрических F -рядов. Доклады академии наук, 2018, том 483, №3. с. 252 – 254.
64. Arithmetic Properties of Generalized Hypergeometric F -series. *Doklady Mathematics*. 2018. Vol.98.-No 3. -589 – 591.

Книги по элементарной математике

65. Уравнения элементарной математики. Совместно с Е.Т. Шавгулидзе. Москва, «Наука», 1992.
66. Методы решения задач по алгебре. Совместно с С.В.Кравцевым, Ю.Н.Макаровым, В.Ф.Максимовым, М.И.Нараленковым. Москва, «Экзамен», 2001.
67. Математика. Письменный экзамен. М. «Экзамен», 2006.511 стр. Совместно с А.И.Козко и Ю.Н. Макаровым.

68. Задачи с параметрами и другие сложные задачи. М.МЦНМО, 2007, 2008, 296 стр. Совместно с А.И.Козко.
69. Математика. Задача С5. М.МЦНМО, 2010–2013. Совместно с А.И.Козко, В.С. Панфёровым, И.Н. Сергеевым.
70. Задачи с параметрами, сложные и нестандартные задачи. М.МЦНМО, 2016, 229 стр. Совместно с А.И.Козко, В.С. Панфёровым, И.Н. Сергеевым.

Учебники и учебные пособия

71. Математический анализ. М.: «Академия», 2013, 336 стр. Совместно с В.И. Гавриловым и Ю.Н. Макаровым.
72. Математические методы решения химических задач. М.: «Академия», 2013, 367 стр. Совместно с А.И.Козко, С.В. Кравцевым, Н.Б. Малышевой, Е.С. Соболевой, А.В. Субботиным, Г.М. Фатеевой.
73. Дифференциальные уравнения и математические модели химических задач. М: МЦНМО, 2019, 168 стр. Совместно с А.И.Козко.
74. Математический анализ и инструментальные методы решения задач. Книга 1: учебник / В. Г. Чирский, К. Ю. Шилин. — М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2019. 463 с. — (Учебники Президентской академии).
75. Математический анализ и инструментальные методы решения задач. Книга 2: учебник / В. Г. Чирский, К. Ю. Шилин. — М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2019. 258 с. — (Учебники Президентской академии).

Получено 18.03.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.