ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 1 (2013)

Проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении бесконечных циклических групп

Е. С. Логачева (г. Тула)

Аннотация

В работе рассматривается проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении циклических групп с объединением по циклическим подгруппам и в HNN-расширении свободного произведения циклических групп с объединением.

Ключевые слова: группа, подгруппа, проблема сопряженности.

Abstract

This article solved the problem of conjugacy of subgroups of cyclic groups in a free product with amalgamation of cyclic subgroup and the HNN-extension of cyclic groups with the Union.

Keywords: the group, the subgroup, the problem of conjugate.

Определение 1. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема сопряженности подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечно порожденных подгрупп H_1, H_2 из G установить, существует ли элемент $z \in G$ такой, что $z^{-1}H_1z = H_2$.*

Проблема сопряженности подгрупп является обобщением проблемы сопряженности слов. Новиковым П.С. было доказано, что в классе конечно определенных групп проблема сопряженности не разрешима.

В исследовании проблемы сопряженности подгрупп были получены следующие результаты:

- проблема была рассмотрена Ремесленниковым В.Н. в 1967 году в классе нильпотентных групп;

- Гриндлингером М.Д. (1966г.) указано в каких случаях любые две подгруппы ранга 2 сопряжены в свободных группах;

- Молдаванским Д.И. доказана разрешимость проблемы сопряженности в свободных произведениях;

- Безверхним В.Н. и Молдаванским Д.И. независимо друг от друга была решена проблема сопряженности подгрупп для свободного произведения при условии, что в сомножителях разрешены проблемы вхождения и сопряженности подгрупп;

- в [1] решена проблема сопряженности подгрупп в HNN-расширении по изоморфным конечным ассоциированным подгруппам;
- в [2] решена проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении двух свободных групп с объединением по циклической подгруппе.

Известно, что в свободном произведении двух свободных групп, объединенных по подгруппе ранга 4, проблема сопряженности подгрупп неразрешима (В.Н. Безверхний, 1975г.).

При рассмотрении свободного произведения циклических групп с объединением по циклической подгруппе были получены следующие результаты:

I. Проблема сопряженности подгрупп в древесном произведении трех циклических групп с объединением по циклической подгруппе

Пусть группа

$$G = \langle a, b, c | a^m = b^n, b^k = c^s \rangle,$$

где $|m|, |n|, |k|, |s| > 1$ является древесным произведением трех циклических групп с объединением по циклической подгруппе.

Теорема 1. . *[4] В группе G разрешима проблема сопряженности подгрупп.*

Для доказательства представим группу G как свободное произведение групп с объединением по циклической подгруппе:

$$G = G_1 *_{b^k=c^s} \langle c \rangle,$$

где G_1 - так называемая, группа торического узла:

$$G_1 = \langle a, b | a^m = b^n \rangle, |m|, |n| > 1.$$

При доказательстве Теоремы 1 используется понятие специального множества и его свойства.

Любой элемент g группы G, являющейся свободным произведением, мы можем единственным образом представить в виде [6]:

$$g = l_{1g} \dots l_{ng} K_g r_{ng} \dots r_{1g}, \tag{1}$$

где r_{ig}, l_{ig}^{-1}- представители правых классов смежности группы G_1 по $\langle b^k \rangle$ или $\langle c \rangle$ по $\langle c^s \rangle$, причем r_{ig}, $r_{i+1,g}$ (аналогично l_{ig}, $l_{i+1,g}$) принадлежат разным сомножителям группы G. Слог K_g - называется ядром. Если K_g не принадлежит объединяемой подгруппе $\langle b^k \rangle = \langle c^s \rangle$, то слоги l_{ng} и r_{ng} принадлежат одному сомножителю группы G, а K_g другому. В таком случае слоговая длина слова (1) равна $L(g) = 2n + 1$. Если $r_{ng} \dots r_{1g} = (l_{1g} \dots l_{ng})^{-1}$, то слово

$$g = r_{1g}^{-1} \dots r_{ng}^{-1} K_g r_{ng} \dots r_{1g} \tag{2}$$

называется трансформой. Если K_g принадлежит объединяемой подгруппе, то в (1) l_{ng} и r_{ng} принадлежат разным сомножителям группы G и длина слова

$$g = l_{1g} \dots l_{ng} h_g r_{ng} \dots r_{1g}, \tag{3}$$

где $h_g = K_g$, равная $l(g) = 2n$. Слова вида (1), (3) - нетрансформы, причем слова вида (1) - нетрансформы нечетной длины, слова вида (3) - нетрансформы четной длины. Подслова $l_{1g} \dots l_{ng}$ - называются левой половиной слов (1), (3) .

Рассмотрим конечное множество слов $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ группы G, каждое из которых приведено к виду (1), (2) или (3).

Определение 2. *Левая (правая) половина слова*

$$w_i = l_{1w_i} \dots l_{mw_i} K_{w_i} r_{mw_i} \dots r_{1w_i}$$

называется изолированной в множестве $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$, если ни у одного из слов $w_j^{\varepsilon}(\varepsilon = \pm 1)$ множества $(\{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \backslash w_i) \cup (\{w_i^{-1}\}_{i=\overline{1,N}} \backslash w_i^{-1})$ нельзя выделить $l_{1w_i} \dots l_{mw_i}$ $(r_{mw_i} \dots r_{1w_i})$ в качестве начального (конечного) подслова, то есть

$$w_j^{\varepsilon} \neq l_{1w_i} \dots l_{mw_i} l_{m-1,w_j} w_{j_n}^{\varepsilon}, (w_j^{\varepsilon} \neq w_{j_1}^{\varepsilon} r_{m+1,w_j} r_{mw_j} \dots r_{1w_j}).$$

Определение 3. *[2] Назовем конечное множество $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ слов группы G специальным, если оно удовлетворяет условиям:*

1) левая половина нетрансформы множества $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ изолирована в нем; если нетрансформа есть слово четной длины, то изолированы и левая, и правая половины;

2) длину нетрансформы w_{i_0} нельзя уменьшить, умножая слева и справа на слова из подгруппы, порожденной множеством $\{\{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \backslash w_{i_0}\}$; длину произвольного элемента $w_{i_0} \in \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ нельзя уменьшить умножая на слово w длины меньше $l(w_{i_0})$, принадлежащее подгруппе $\langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \rangle$;

3) пусть $w_{i_0}^{\varepsilon} = l_{1w_0} \dots l_{nw_0} K_{w_0} r_{nw_0} \dots r_{j+1,w_0} r_{jw_0} \dots r_{1w_0}$, $\varepsilon = \pm 1$, $j < n$ - нетрансформа из множества $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ и

$$\{w_{\alpha_i}^{\varepsilon_i} = l_{1w_{\alpha_i}} \dots l_{n_i w_{\alpha_i}} K_{\alpha_i} r_{n_i w_{\alpha_i}} \dots r_{jw_0} \dots r_{1w_0}\}_{i=\overline{1,N}}$$

$\varepsilon_i = \pm 1$ - подмножество нетрансформ из множества $(\{w_i\} \backslash w_{i_0}) \cup (\{w_i^{-1}\} \backslash w_{i0}^{-1})$, правая половина которых оканчивается подсловом $r_{jw_0} \dots r_{1w_0}$, тогда, если подгруппа $\langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \rangle \cap r_{1w_0}^{-1} \dots r_{jw_0}^{-1} D r_{jw_0} \dots r_{1w_0} = B$, где $D \in G_1$, когда $r_{j+1,w_0} \in \langle c \rangle$ либо $D \in \langle c \rangle$, когда $r_{j+1,w_0} \in G_1$, и D не единична, то $l(w_{i_0} u) \geq l(w_{i_0})$, где $u \in B, l(w_{i_0} u w_{\alpha_i}^{-\varepsilon_i}) \geq l(w_{i_0})$;

4) пусть

$$w_i = l_{1w_i} \dots l_{sw_i} l_{s+1,w_i} \dots l_{nw_i} K_{w_i} r_{nw_i} \dots r_{s+1,w_i} r_{sw_i} \dots r_{1w_i}$$

$$w_j = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l_{s+1,w_j} \dots l_{nw_j} K_{w_j} r_{nw_j} \dots r_{s+1,w_j} r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$$

- слова из $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$, не обязательно различные, $m \le n$, $s \le m$, тогда не существует слова $g \ne 1$ длины меньше $2s$ из подгруппы $\langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \rangle$ такого, что если $l_{1w_i} \dots l_{sw_i} \ne l_{1w_j} \dots l_{sw_j}$, то

$$gw_i = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l'_{s+1,w_i} \dots l'_{nw_i} K'_{w_i} r_{nw_i} \dots r_{s+1,w_i} r_{sw_i} \dots r_{1w_i},$$

либо, если $r_{sw_i} \dots r_{1w_i} \ne r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$, то

$$w_i g = l_{1w_i} \dots l_{nw_i} K'_{w_i} r'_{nw_i} \dots r'_{s+1,w^i} r_{iw_j} \dots r_{1w_j},$$

либо, если $r^{-1}_{1w_i} \dots r^{-1}_{sw_i} \ne l_{nw_j} \dots l_{sw_j}$, то

$$gw_i^{-1} = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} (r'_{s+1,w_i})^{-1} \dots (r'_{nw_i})^{-1} (K'_{w_i})^{-1} l^{-1}_{nw_i} \dots l^{-1}_{1w_i},$$

либо, если $l^{-1}_{sw_i} \dots l^{-1}_{1w_i} \ne r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$, то

$$w_i^{-1} g = r^{-1}_{1w_i} \dots r^{-1}_{nw_i} (K'_{w_i})^{-1} (l'_{nw_i})^{-1} \dots (l'_{s+1,w_i})^{-1} r_{sw_j} \dots r_{1w_j}.$$

Теорема 2. *. [1] Пусть группа*

$$G = \langle \prod_{s=1}^{n} * G_s; retG_1, ..., retG_s, \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji} \rangle$$

- древесное произведение групп G_s, $1 \le s \le n$, объединенных по изоморфным подгруппам $U_{ij} < G_i$, $U_{ji} < G_j$ с помощью фиксированного набора конструктивных изоморфизмов $\{\varphi_{ij}\}, \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji}$.

Тогда, если подгруппы U_{ij}, U_{ji}, $i \in I_1$, $j \in I_2$, обладают условием максимальности и в сомножителях G_s, $1 \le s \le n$ разрешимы:

1) проблема вхождения;

2) проблема пересечения класса смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < G_s$ с подгруппой $U\gamma$, $\gamma = \pm 1$;

3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G_s$ с подгруппой $U\gamma$, $\gamma = \pm 1$;

то существует алгоритм, преобразующий любое конечное множество слов группы G в специальное, порождающее подгруппу, совпадающую с подгруппой, порожденной исходным множеством.

Доказано, что для группы G справедливы условия Теоремы 2, значит любое конечное множество слов группы G может быть приведено к специальному.

Разобьем все слова специального множества слов $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ из G на множества: M_0 - нетрансформы и M_i - трансформы одного типа, содержащиеся в одной подгруппе, сопряженной некоторой подгруппе из G_1 или $\langle c \rangle$. Каждое из этих подмножеств порождает подгруппу (M_i), $i = 0, 1, \ldots, k$. для $i = \overline{1, N}$ подгруппа (M_i) имеет вид

$$(M_i) = r_{1i}^{-1} \ldots r_{ni}^{-1} C_i r_{ni} \ldots r_{1i},$$

здесь C_i - подгруппы из сомножителей группы G, порожденные ядрами трансформ.

Подгруппы, порожденные трансформами, упорядочиваем по длинам крыльев их трансформ, получаем ряд:

$$(M_1) \leq (M_2) \leq \ldots \leq (M_k). \tag{4}$$

Лемма 1. . *[1] Ряд (4) можно преобразовать в ряд (5)*

$$(M_1^{'}) \leq (M_2^{'}) \leq \ldots \leq (M_{k'}^{'}) \tag{5}$$

со следующими свойствами:

1) $gp((M_0), (M_1), ..., (M_k) = gp((M_0), (M_1^{'}), ..., (M_{k'}^{'});$

2)если подгруппе $(M_j') = r_{1x}^{-1} \ldots r_{nx}^{-1} C_j' r_{nx} \ldots r_{1x}$, $1 \leq j'$, *ряда (5) принадлежит трансформа* $u = r_{1x}^{-1} \ldots r_{nx}^{-1} h r_{nx} \ldots r_{1x}$, *где* h *принадлежит объединяемой подгруппе, то среди подгрупп ряда (5) имеется подгруппа*

$$(M_i^{'}) = r_{1x}^{-1} \ldots r_{n-1,x}^{-1} C_i^{'} r_{n-1,x} \ldots r_{1x},$$

содержащая u*;*

3) если для некоторой трансформы $u = r_{1x}^{-1} \ldots r_{nx}^{-1} K_x r_{nx} \ldots r_{1x}$, *принадлежащей подгруппе* $(M_j^{'}) = r_{1x}^{-1} \ldots r_{nx}^{-1} C_j^{'} r_{nx} \ldots r_{1x}$, *и нетрансформы*

$$y = l_{1y} \ldots l_{n_1 y} K_y r_{n_1 y} \ldots r_{1y}$$

из M_0, $n_1 \geq n$, *(левая половина* y *изолирована) выполняется соотношение* $l(y^{-1} u y) \leq l(y)$, *то существует подгруппа* $(M_s^{'})$ *ряда (4), содержащая трансформу* $y^{-1}(r_{1x}^{-1} \ldots r_{nx}^{-1} K_x r_{nx} \ldots r_{1x}) y^{-1}$*; если* $l(y u y^{-1}) < l(y)$, *то существует подгруппа* (M_s'), *содержащая трансформу* $y u y^{-1}$*;*

4) если $(M_j^{'}) = r_{1x}^{-1} \ldots r_{n_1 x}^{-1} C_j^{'} r_{n_1 x} \ldots r_{1x}$,

$$(M_s^{'}) = r_{1x}^{-1} \ldots r_{n_1 x}^{-1} r_{n_1+1,y}^{-1} \ldots r_{n_2 y}^{-1} C_s^{'} r_{n_2 y} \ldots r_{1x}$$

- подгруппы ряда (4) $n_2 > n_1$, *и подгруппа* $(M_j^{'})$ *содержит трансформу* $u = r_{1x}^{-1} \ldots r_{n_1 x}^{-1} h r_{n_1 x} \ldots r_{1x}$ *либо* $u^{'} = r_{1x}^{-1} \ldots r_{n_1 x}^{-1} K r_{n_1 x} \ldots r_{1x}$, *где* $K = r_{n_1+1,y}^{-1} h r_{n_1+1,y}$ *то существует подгруппа ряда (5)*

$$(M_k^{'}) = r_{1x}^{-1} \ldots r_{n_1 x}^{-1} r_{n_1+1,y}^{-1} C_k^{'} r_{n_1+1,y} \ldots r_{1x},$$

содержащая в первом случае трансформу u*, во втором -* $u^{'}$*;*

5) если $(M'_s) = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} C'_x r_{n_1,x} \dots r_{1x}$ *- подгруппа из ряда (5) и*

$$y^\varepsilon = l_{1y} \dots l_{n_2y} K r_{n_2y} \dots r_{n_1+1,y} r_{n_1x} \dots r_{1x},$$

$\varepsilon = \pm 1$ *- элемент специального множества, причем подслово* $r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} r_{n_1+1,y}^{-1}$ *не является изолированной левой половиной некоторой нетрансформы* $w^\varepsilon (\varepsilon = \pm 1)$ *и если подгруппа* (M'_s) *содержит трансформу* $r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} h r_{n_1x} \dots r_{1x}$ *либо трансформу* $r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} K r_{n_1x} \dots r_{1x}$*, где* $K = r_{n_1+1,y}^{-1} h r_{n_1+1,y}$*, то существует в ряде (4) подгруппа* $(M'_j) = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} r_{n_1+1,y}^{-1} C_j r_{n_1+1,y} \dots r_{1x}$*, содержащая эту трансформу.*

Рассмотрим утверждения, имеющие важное значение при доказательстве Теоремы 1.

Лемма 2. . *[4] Всякое простое слово* $w \in gp(M_0, S)$ *группы* G *имеющее своей несократимой записью трансформу* $w = gag^{-1}$ *может быть приведено к виду* $gag^{-1} = u_1^{-1} u_2^{-1} ... u_n^{-1} u_0 u_n ... u_2 u_1$*, где* u_0 *- трансформа, принадлежащая одной из подгрупп ряда* (5)*,* $u_i \in gp(M_0, S)$*,* $u_1^{-1} u_2^{-1} ... u_n^{-1} u_0 u_n ... u_2 u_1$ *- слово подгруппы* $gp(M_0, S)$*.*

Пусть H - конечно порожденная подгруппа группы G, порожденная двумя различными специальными множествами, то есть различными в общем случае системами порождающих подгрупп: $H = gp(M_0, S_1)$ и $H = gp(M'_0, S'_1)$, где S_1 - подгруппа, порожденная подгруппами ряда

$$(M_1) \le (M_2) \le \dots \le (M_k); \tag{6}$$

S'_1 - подгруппа, порожденная подгруппами ряда

$$(M'_1) \le (M'_2) \le \dots \le (M'_k); \tag{7}$$

$(M_i) = v_i^{-1} C_i v_i$, $(M'_j) = g_j^{-1} C_j g_j$, где каждая из подгрупп C_i и C_j одновременно принадлежит либо сомножителю $G_1 = \langle a, b | a^m = b^n \rangle$, $|m|, |n|, |k|, |s| > 1$ либо сомножителю $\langle c \rangle$ группы G.

Лемма 3. . *[4] Пусть группа* H *порождена двумя различными специальными множествами* $H = gp(M_0, S_1)$ *и* $H = gp(M'_0, S'_1)$*, где* S_1 *- древесное произведение подгрупп ряда* (6)*, а* S'_1 *- древесное произведение подгрупп ряда* (7)*. Тогда для каждой подгруппы* $(M_i) = v_i^{-1} C_i v_i$ *ряда* (6) *существует* (M'_j) *из* (7) *и слово* $w_{ij} \in H$*, такое что* $(M_i) \subseteq w_{ij}^{-1} (M'_j) w_{ij}$*.*

Лемма 4. . *[4] Пусть группа* H *порождена двумя различными специальными множествами* $H = gp(M_0, S_1)$ *и* $H = gp(M'_0, S'_1)$*, где* S_1 *- древесное произведение подгрупп ряда* (5)*, а* S'_1 *- древесное произведение подгрупп ряда* (7)*. Тогда существует подгруппа* $(M_i) = v_i^{-1} C_i v_i$ *из ряда* 6)*, существует* (M'_j) *из ряда* (7) *и слово* $w_{ij} \in H$*, такое что* $(M_i) = w_{ij}^{-1} (M'_j) w_{ij}$*.*

Лемма 5. . *[4] Пусть $H_1 = gp(M_0, S_1)$ и $H_2 = gp(M_0', S_1')$ - две конечно порожденные подгруппы группы G. Основа S_1 подгруппы H_1 порождена подгруппами ряда*

$$(M_1) \leq (M_2) \leq \ldots \leq (M_{k_1}), \tag{8}$$

основа S_1' подгруппы H_2 порождена подгруппами ряда

$$(M_1') \leq (M_2') \leq \ldots \leq (M_{k_2}'). \tag{9}$$

Тогда, если H_1 и H_2 сопряжены в G, то есть существует $z \in G$ такой что $z^{-1}H_1z = H_2$, то существуют $w \in gp(M_0', S_1')$, $j = \overline{1, k_1}$, $s = \overline{1, k_2}$ такие, что $w^{-1}z^{-1}(M_j)zw = (M_s')$, где (M_j) - подгруппа ряда (8), (M_s') - подгруппа ряда (9).

В [4] построен алгоритм, позволяющий эффективно определить, сопряжены ли любые две конечно порожденные подгруппы H_1 и H_2 группы G.

II. Проблема сопряженности подгрупп в древесном произведении конечного числа циклических групп с объединением по циклической подгруппе

Рассмотренный выше результат получил следующее обобщение: пусть некоторой группе G_n соответствует конечный связный дерево - граф Γ, в вершинах которого находятся циклические группы $\langle a_i \rangle$, $i = \overline{1, n}$, такой что, если вершинам некоторого ребра e графа Γ соответствуют образующие $\langle a_i \rangle$ и $\langle a_j \rangle$, то самому ребру соответствуют ассоциированные подгруппы $\langle a_i^{m_i} \rangle = \langle a_j^{s_j} \rangle$. Копредставление группы G_n имеет вид:

$$G_n = \langle \prod_{k=1}^{n} * \langle a_k \rangle; a_i^{m_i} = a_j^{s_j} \rangle, |m_i|, |s_j| > 1, i \neq j, i \in I_1, j \in I_2, \tag{10}$$

где вершины, соответствующие подгруппам $\langle a_i^{m_i} \rangle$ и $\langle a_j^{s_j} \rangle$ в древесном произведении соединены ребром.

Теорема 3. . *В группе G_n разрешима проблема сопряженности подгрупп.*

Выделяем в дереве группы G_n конечную вершину a_n и представляем группу в виде:

$$G_n = G_{n-1} *_{a_{n-1}^{m_{n-1}} = a_n^{s_n}} \langle a_n \rangle,$$

где $G_{n-1} = \langle \prod_{k=1}^{n-1} * \langle a_k \rangle; a_i^{m_i} = a_j^{s_j} \rangle$, где $|m_i|, |s_j| > 1, i \neq j, i \in I_1, j \in I_2$ и группе G_{n-1} соответствует граф Γ_1 со свойствами графа Γ.

Доказательство теоремы проводится по индукции. Базу индукции обеспечивает предыдущий результат. Допускаем, что утверждение теоремы справедливо для группы G_{n-1} и доказываем для группы G_n.

Образующие группы G_n приводим к специальным образующим, которые позволяют используя доказанные ранее утверждения, положительно решить рассматриваемую проблему.

III. Проблема сопряженности подгрупп в $HNN-$расширении циклической группы

Рассмотрим группу Баумслага

$$G^* = \langle a, t; t^{-1}a^m t = a^n \rangle,$$

являющуюся HNN-расширением бесконечной циклической группы $\langle a \rangle$ с помощью проходной буквы t.

Данная проблема является обобщением результата, полученного Молдаванским Д.И. для группы $\langle a, t; t^{-1}at = a^n \rangle, |n| > 1$, так называемое ниспадающее HNN-расширение.

Теорема 4. . *[5] В группе G^* разрешима проблема сопряженности подгрупп.*

Для доказательства, как и в предыдущих случаях, используется метод специального множества.

IV. Проблема сопряженности подгрупп в $HNN-$расширении свободного произведения циклических групп с объединением

Теорема 4 допускает следующее обобщение: рассмотрим группу

$$G_n^* = \langle G_n, t; rel(G_n), t^{-1}a_s^{m_s}t = a_k^{n_k} \rangle,$$

являющуюся $HNN-$расширением группы G_n вида (10), t - правильная проходная буква.

Теорема 5. . *В группе G_n^* разрешима проблема сопряженности подгрупп.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп и их приложение. Тула: ТГПИ им. Л. Н. Толстого, 1983. С. 50—80.

2. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения для одного класса групп. // Вопросы теории групп и полугрупп. Тула: ТГПИ им. Л. Н. Толстого, 1972. С. 3—86.

3. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности подгрупп для одного класса групп. I-II // Современная алгебра. Вып. IV. Л: 1977. С. 16—32.

4. Безверхний В. Н., Логачева Е. С. Проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении циклических групп с объединением // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13. Вып. 1(41). С. 20—45.

5. Безверхний В. Н., Логачева Е. С. Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12. Вып. 1. С. 83—101.

6. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная терия групп. М.: Мир, 1980.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Поступило 22.03.2013