

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 3.

УДК 51-7, 519.816

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-92-106

Стохастические тренды на основе нечеткой математики<sup>1</sup>

С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов, Д. А. Камаев, М. Н. Добровольский

**Агаян Сергей Мартикович** — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Геофизический центр РАН (г. Москва).

*e-mail: s.agayan@gcras.ru*

**Богоутдинов Шамиль Рафекович** — кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Геофизический центр РАН; старший научный сотрудник, Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта (г. Москва).

*e-mail: shm@gcras.ru*

**Камаев Дмитрий Альфредович** — доктор технических наук, заведующий лабораторией, Научно-производственное объединение «Тайфун» (г. Обнинск).

*e-mail: kda@feerc.ru*

**Добровольский Михаил Николаевич** — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Геофизический центр РАН (г. Москва).

*m.dobrovolsky@gcras.ru*

## Аннотация

В настоящее время существует ряд способов определения трендов и экстремумов на стохастических временных рядах, что неудивительно, поскольку тренды временного ряда являются фундаментальной характеристикой динамики процесса, стоящего за ним.

Реальные стохастические тренды совсем не похожи на идеальные математические, поскольку в них случаются сбои. Это не смущает исследователя, изначально обладающего адаптивным восприятием фундаментальных свойств предельности, непрерывности, связности, тренда и т. д. Он поймет, когда нарушение несущественно и тренд продолжается, а когда нарушение прерывает тренд.

В настоящей работе предлагается новый подход к распознаванию стохастических трендов, основанный на математической конструкции регрессионных производных для конечного временного ряда. Тренды ищутся с помощью производной по сценарию классического математического анализа.

*Ключевые слова:* нечеткая математика, меры близости, регрессионные производные, тренды.

*Библиография:* 8 названий.

## Для цитирования:

С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов, Д. А. Камаев, М. Н. Добровольский. Стохастические тренды на основе нечеткой математики // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 92–106.

<sup>1</sup>Исследование выполнено в рамках государственного задания Геофизического центра РАН, утвержденного Минобрнауки России.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 51-7, 519.816

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-92-106

**Stochastic trends based on fuzzy mathematics<sup>2</sup>**

S. M. Agayan, Sh. R. Bogoutdinov, D. A. Kamaev, M. N. Dobrovolsky

**Agayan Sergey Martikovich** — doctor of physical and mathematical Sciences, Principal research scientist, Geophysical Center RAS (Moscow).

*e-mail: s.agayan@gcras.ru*

**Bogoutdinov Shamil Rafekovich** — candidate of physical and mathematical Sciences, Leading research scientist, Geophysical Center RAS; Senior research scientist, Schmidt Institute of Physics of the Earth RAS (Moscow).

*e-mail: shm@gcras.ru*

**Kamaev Dmitry Alfredovich** — doctor of engineering, Chief of laboratory, NPO «Taifun», Russian Federal Survey for Hydro meteorology and Environmental Monitoring (Obninsk).

*e-mail: kda@feerc.ru*

**Dobrovolsky Mikhail Nikolaevich** — candidate of physical and mathematical Sciences, Senior research scientist, Geophysical Center RAS (Moscow).

*m.dobrovolsky@gcras.ru*

**Abstract**

Currently, there are a number of ways to determine trends and extremes in stochastic time series, which is not surprising, since time series trends are a fundamental characteristic of the dynamics of the process behind it.

Real stochastic trends are not at all like ideal mathematical ones, because they contain violations. This does not bother the researcher, who initially has an adaptive perception of the fundamental properties of extremeness, continuity, connectedness, trend, etc. He will understand when the violation is insignificant and the trend continues, and when the violation interrupts the trend.

In this paper, we propose a new approach to the recognition of stochastic trends, based on the mathematical construction of regression derivatives for a finite time series. Trends are sought using the derivative from the scenario of classical mathematical analysis.

*Keywords:* fuzzy mathematics, nearness measures, regression derivatives, trends.

*Bibliography:* 8 titles.

**For citation:**

S. M. Agayan, Sh. R. Bogoutdinov, D. A. Kamaev, M. N. Dobrovolsky, 2019, "Stochastic trends based on fuzzy mathematics", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 92–106.

**1. Введение**

В настоящее время существует ряд способов определения трендов и экстремумов на стохастических временных рядах [1, 2, 3, 4], что неудивительно, поскольку тренды временного ряда являются фундаментальной характеристикой динамики процесса, стоящего за ним.

<sup>2</sup>The study was carried out within the framework of the state task of The geophysical center of the Russian Academy of Sciences, approved by the Ministry of education and science of Russia.

Реальные стохастические тренды совсем не похожи на идеальные математические, поскольку в них случаются сбои. Это не смущает исследователя, изначально обладающего адаптивным восприятием фундаментальных свойств предельности, непрерывности, связности, тренда и т. д. Он поймет, когда нарушение несущественно и тренд продолжается, а когда нарушение прерывает тренд.

Таким образом, если идеальные математические тренды однозначны и строги, то стохастические зависят от точки зрения исследователя и для разных точек зрения или разных исследователей они, вообще говоря, могут различаться.

Следовательно, формализация стохастических рядов должна быть разномасштабной, подобно взрывлет-спектру, а потому необходимо многопараметрической. Меняя параметры, исследователь получит полное представление о трендах и выберет нужный.

Перечислим параметры такой формализации: локальная конструкция тренда, уровень значимости тренда, уровень нарушения тренда, способ поиска четкого экстремума между противоположными трендами. Их (тренды) мы трактуем как нечеткие множества, и потому стохастические тренды получаются как результат нечеткого моделирования.

В настоящей работе мы рассматриваем один подход к такой формализации стохастических трендов. Основывается он на новой математической конструкции регрессионных производных для конечного временного ряда. Тренды ищутся с помощью производной по сценарию классического математического анализа.

## 2. Исходные данные, соглашения и обозначения

2.1 Пространство  $T = [a, b]$  – дискретный отрезок с узлами  $t_i$ :

$$t_i = a + (i - 1)h, \quad i = 1, \dots, N, \quad h = \frac{b - a}{N - 1}$$

2.2 Если  $t \in T$ , то  $t^+$  ( $t^-$ ) – следующий за  $t$  (предшествующий  $t$ ) в  $T$  узел. Таким образом

$$\begin{aligned} t^+ &= t_{i+1}, & \text{если } t &= t_i, \quad 1 \leq i \leq N - 1 \\ t^- &= t_{i-1}, & \text{если } t &= t_i, \quad 2 \leq i \leq N \end{aligned}$$

2.3 Отрезок  $\tau$  в  $T$  это пересечение  $T$  с обычным отрезком в  $\mathbb{R}$ , то есть

$$\begin{aligned} \tau &= [t_i, t_j] = \{t_i < \dots < t_j\} \text{ для некоторых } 1 \leq i \leq j \leq N \\ t_i &= b\tau \text{ (начало } \tau), \quad t_j = e\tau \text{ (конец } \tau) \end{aligned}$$

в частности,

$$t_1 = bT, \quad t_N = eT.$$

Отрезок  $[(b\tau)^+, (e\tau)^-] = \text{int}\tau$  – внутренность  $\tau$ .

2.4 Если  $S$  подмножество в  $T$ , то  $C(S)$  – совокупность компонент "связности"  $S$ , а именно: максимальных в  $S$  отрезков из  $T$ .

2.5 Примеры:

1. Если  $S = T$ , то  $C(S) = T$
2.  $t$  – "внутренний" узел  $T$ :  $t \in T \setminus \{t_1, t_N\}$ ,  $S = T_t = T \setminus \{t\}$ , тогда  $C(T_t) = \{\tau_1, \tau_2\}$ , где  $\tau_1 = [t_1, t^-]$ ,  $\tau_2 = [t^+, t_N]$ .

2.6  $f(t)$  – любая действительная функция на  $T$ ,  $F(T)$  – пространство действительных функций на  $T$ ,  $F(T) \cong \mathbb{R}^N$

### 3. Близость на $T$

3.1 Близость на  $T \equiv$  нечеткое бинарное отношение на  $T$  [5] с функцией принадлежности (мерой близости)  $\delta$ . В работе используются два варианта близости  $\delta_t(\bar{t})$  узла  $\bar{t}$  к узлу  $t$  в  $T$ , зависящие от положительных параметров  $r$  и  $p$ .

3.2 Глобальная мера близости (рис. 1)

$$\delta_t(r, p)(\bar{t}) = \delta_t(\bar{t}) = \left(1 - \frac{|\bar{t} - t|}{\max(t_N - t, t - t_1) + r}\right)^p \quad (1)$$

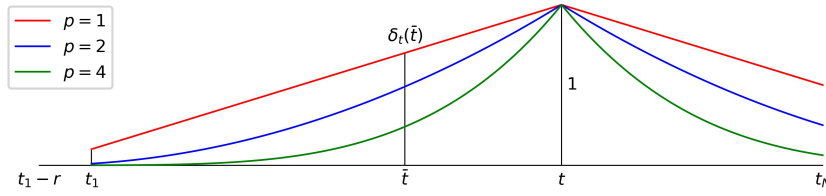


Рис. 1: Глобальная мера близости

3.3 Локальная мера близости (рис. 2)

$$\delta_t(r, p)(\bar{t}) = \delta_t(\bar{t}) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|\bar{t} - t|}{r}\right)^p, & \text{если } |\bar{t} - t| \leq r \\ 0, & \text{если } |\bar{t} - t| > r \end{cases} \quad (2)$$

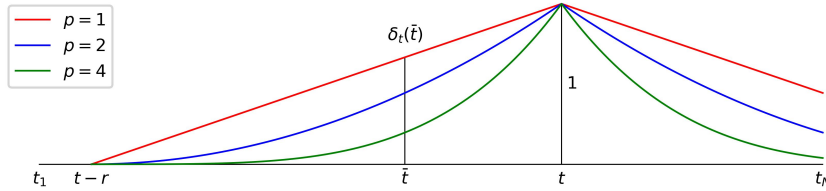


Рис. 2: Локальная мера близости

### 4. Близость дискретных отрезков

4.1 Тренды на реальных данных в силу произвольности  $f$  могут ненадолго пропадать, так что реальная картина не на рис. 3а, а на рис. 3б:

Исследователь умеет закрыть глаза на незначительное нарушение тренда в рамках значительного его выполнения и разберется в ситуации на рис. 3б.

Возникает вопрос: "Как это формализовать?". Мы предлагаем путь, включающий в себя понятие близости отрезков.

4.2 Логика близости отрезков: мы считаем, что два дизъюнктивных отрезка  $\tau_1$  и  $\tau_2$  из  $T$  близки в двух случаях

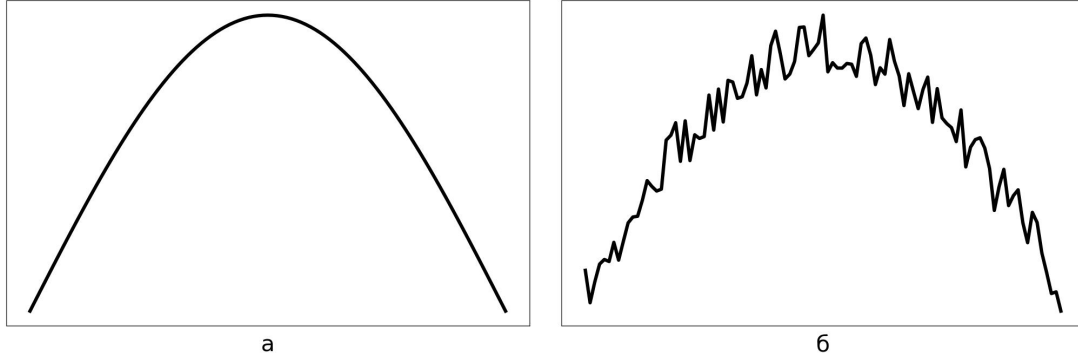


Рис. 3: а – идеальная ситуация; б – реальная ситуация

- во-первых, если близки их ближайшие концы (внешняя близость, зависящая от  $T$ );
- во-вторых, если объединение  $\tau_1 \vee \tau_2$  значительно в их дискретной оболочке

$$\text{hull}(\tau_1 \vee \tau_2) = [\min(b\tau_1, b\tau_2), \max(e\tau_1, e\tau_2)]$$

(внутренняя близость, зависящая только от них)

4.3 Формализация внешней близости: пусть  $D(T)$  совокупность всех нетривиальных расстояний на  $T$ :

$$D(T) = \{d(t_1, t_2) : t_1, t_2 \in T, d(t_1, t_2) \neq 0\}$$

Порог  $r = r_q$  близости в  $T$  определяется как степенное среднее при отрицательном показателе  $q < 0$  всех расстояний из  $D(T)$  [5, 6]:

$$r_q = r_q(T) = \left( \frac{\sum_{d \in D(T)} d^q}{|D(T)|} \right)^{1/q}, q < 0 \quad (3)$$

Здесь, как обычно, через  $|D(T)|$  обозначено количество элементов во множестве  $D(T)$ .

Отрезки  $\tau_1$  и  $\tau_2$  из  $T$  считаем внешне близкими, если

$$\min(|b\tau_2 - e\tau_1|, |b\tau_1 - e\tau_2|) < r_q. \quad (4)$$

Наши рекомендации  $q \in [-3, -2]$

ПРИМЕР 1. *Внешняя близость (рис. 4)*

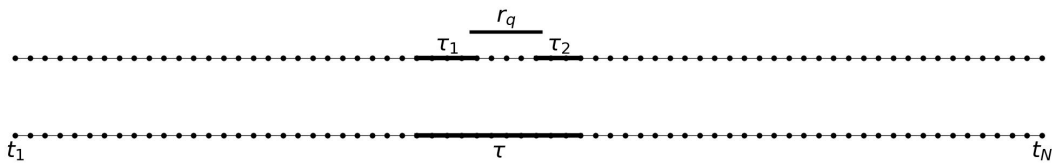


Рис. 4:  $q = -2$ ;  $r_q = 6.81$ ;  $b\tau_2 - e\tau_1 = 5.79$

- 4.4 **Формализация внутренней близости:** мерой внутренней близости дизъюнктивных отрезков  $\tau_1$  и  $\tau_2$  из  $T$  считаем отношение количества точек в их объединении к количеству точек в их оболочке. Отрезки  $\tau_1$  и  $\tau_2$  считаются внутренне близкими ( $\gamma$ -близкими,  $\gamma \in [0, 1]$ ), если

$$\frac{|\tau_1 \vee \tau_2|}{|\text{hull}(\tau_1 \vee \tau_2)|} \geq \gamma \quad (5)$$

Наш выбор  $\gamma \in [0.75, 1)$

**ПРИМЕР 2.** *Внутренняя близость (рис. 5)*

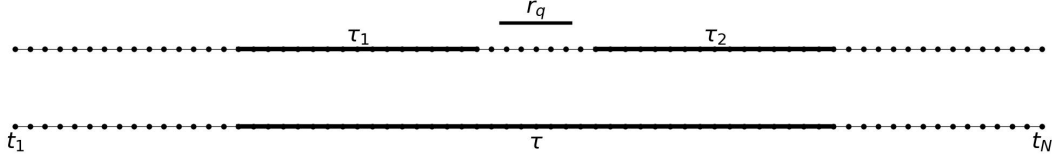


Рис. 5:  $q = -2$ ;  $r_q = 6.81$ ;  $b\tau_2 - e\tau_1 = 11.59$ ;  $\gamma = 0.82$

- 4.5 Совокупность отрезков  $\tau_1, \dots, \tau_k$  в  $T$  называется связной, если для каждого внутреннего отрезка  $\tau_i$ ,  $1 < i < k$  найдется близкие ему в данной совокупности как слева, так и справа. А для концов соответственно только справа и слева.

## 5. Регрессионные производные и регрессионные сглаживания

- 5.1 Для любой функции  $f$  на  $T$  мы определим регрессионную производную  $f'$  и воспользуемся ею для поиска трендов на  $f$  по сценарию классического математического анализа.
- 5.2 Предельный переход  $\bar{t} \rightarrow t$  в дискретном случае заменяется мерой близости  $\delta_t(\bar{t})$ , показывающей в какой степени узел  $\bar{t}$  близок к  $t$  в  $T$ . В связи с этим касательной  $R_{f,t}(\bar{t}) = a_t \bar{t} + b_t$  к функции  $f$  в узле  $t \in T$  считается линейная регрессия, построенная по взвешенному графику  $\Gamma_f(\delta_t) = \{(\bar{t}, f(\bar{t}), \delta_t(\bar{t})), \bar{t} \in T\}$ . Опуская стандартные вещи, связанные с линейными регрессиями, приведем формулы для  $a_t$  и  $b_t$ :

$$a_t = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{\bar{t} \in T} \bar{t} \delta_t(\bar{t}) f(\bar{t}) & \sum_{\bar{t} \in T} \bar{t} \delta_t(\bar{t}) \\ \sum_{\bar{t} \in T} \delta_t(\bar{t}) f(\bar{t}) & \sum_{\bar{t} \in T} \delta_t(\bar{t}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{\bar{t} \in T} \bar{t}^2 \delta_t(\bar{t}) & \sum_{\bar{t} \in T} \bar{t} \delta_t(\bar{t}) \\ \sum_{\bar{t} \in T} \bar{t} \delta_t(\bar{t}) & \sum_{\bar{t} \in T} \delta_t(\bar{t}) \end{vmatrix}}$$

$$b_t = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{\bar{t} \in T} \bar{t}^2 \delta_t(\bar{t}) & \sum_{\bar{t} \in T} \bar{t} \delta_t(\bar{t}) f(\bar{t}) \\ \sum_{\bar{t} \in T} \bar{t} \delta_t(\bar{t}) & \sum_{\bar{t} \in T} \delta_t(\bar{t}) f(\bar{t}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{\bar{t} \in T} \bar{t}^2 \delta_t(\bar{t}) & \sum_{\bar{t} \in T} \bar{t} \delta_t(\bar{t}) \\ \sum_{\bar{t} \in T} \bar{t} \delta_t(\bar{t}) & \sum_{\bar{t} \in T} \delta_t(\bar{t}) \end{vmatrix}}$$

5.3

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** 1. Угловый коэффициент  $a_t$  регрессионной касательной  $R_{f,t}$  называется производной  $f$  в  $t$  и обозначается через  $(R'_f)(t)$ .

2. Функция  $t \rightarrow a_t$  называется производной  $f$  и обозначается через  $(R'_f) \in F(T)$ .
3. Функциональное соответствие  $f \rightarrow R'_f$  является линейным оператором на  $F(T)$ , называется регрессионным дифференцированием и обозначается через  $R'$ .

5.4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. 1. Значение  $a_t t + b_t$  касательной  $R_{f,t}$  в узле  $t$  называется регрессионным значением функции  $f$  в точке  $t$  и обозначается через  $(R_f)(t)$ .

2. Функция  $t \rightarrow a_t t + b_t$  называется регрессионным сглаживанием  $f$  и обозначается через  $R_f \in F(T)$ .
3. Функциональное соответствие  $f \rightarrow R_f$  является линейным оператором на  $F(T)$ , называется регрессионным сглаживанием и обозначается через  $R$ .

5.5

ПРИМЕР 3. На рисунке 6 приведена зависимость регрессионного сглаживания (6а) и регрессионной производной (6б) функции  $f(t)$  от степени  $p$  при постоянном радиусе  $r$ . На рисунке 7 приведена зависимость регрессионного сглаживания (7а) и регрессионной производной (7б) функции  $f(t)$  от радиуса  $r$  при постоянной степени  $p$ .

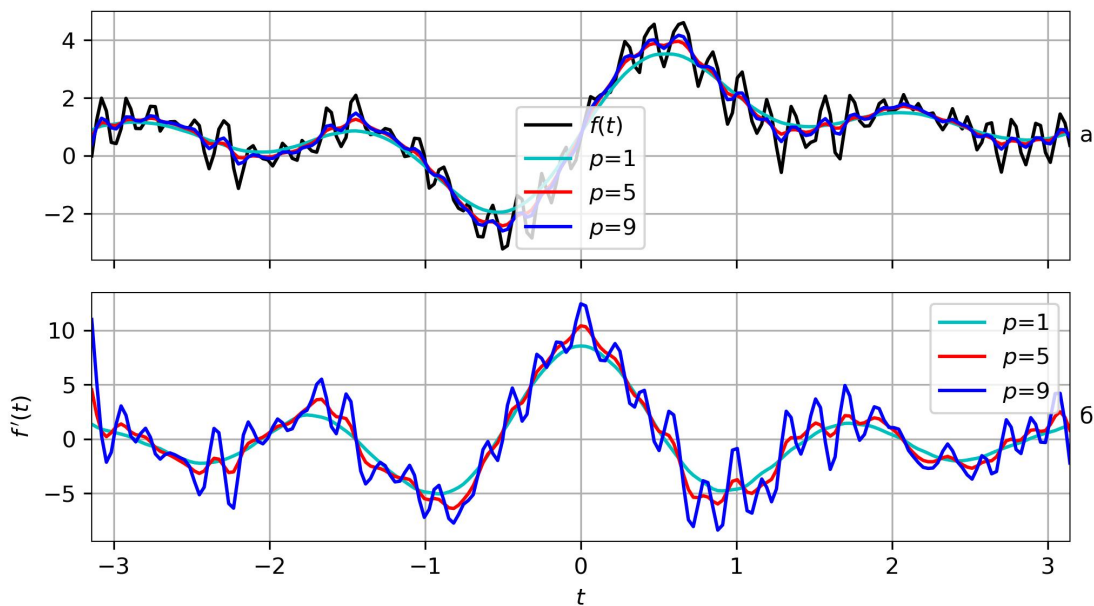
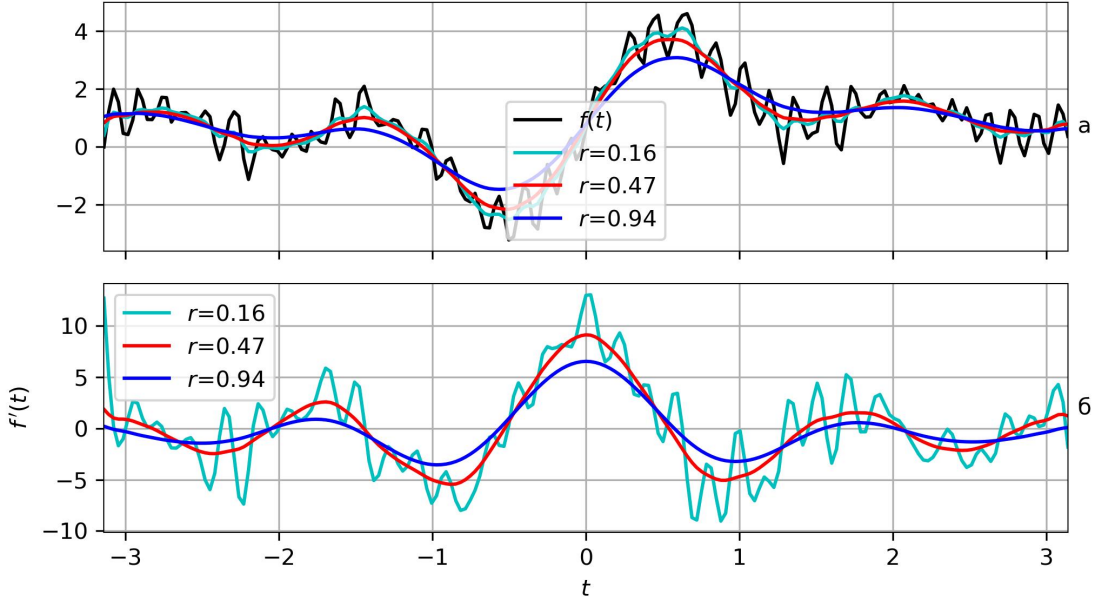


Рис. 6: Зависимость от степени  $p$ . Радиус  $r = 0.47$ .


 Рис. 7: Зависимость от радиуса  $r$ . Степень  $p = 2$ 

## 6. Тренды через производные

6.1 Пара  $(R, R')$  определяет вариант дифференцирования  $D$  на  $F(T)$

$$D = D_{sk} = R^s R' R^k; \quad s \geq 0, k \geq 0$$

6.2 Представим концепцию трендов через дифференцирование, индуцированное классическим математическим анализом: для функции  $f \in F(T)$  дифференцирование  $D$  дает производную  $f' = Df$ , через которую видна борьба на  $T$  между трендами  $f$ . В каждой точке  $t \in T$  подъем и спад для  $f$  играют результативно либо вничью ( $f'(t) \geq 0$ ,  $f'(t) = 0$ ), а мера (сила) игры – модуль  $|f'(t)|$ .

6.3 Мы относимся к ничьей более мягко и полагаем, что подъем и спад для функции  $f$  сыграли вничью в точке  $t \in T$ , если  $|f'(t)| < \alpha$ . Параметр  $\alpha$  – это граница, с которой мы считаем производную  $f'(t)$  маленькой, точку  $t$  флэт-точкой, а функцию  $f$  в  $t$  флэт-функцией, осуществляющей боковое горизонтальное движение.

6.4 С выбором  $f$  и  $\alpha$  возникает разбиение  $T$ :

$$T = T^+ \vee T^0 \vee T^-$$

где

$$\begin{aligned} T^+ &= T^+(f, \alpha) = \{t \in T : f'(t) > \alpha\} \\ T^0 &= T^0(f, \alpha) = \{t \in T : |f'(t)| \leq \alpha\} \\ T^- &= T^-(f, \alpha) = \{t \in T : f'(t) < -\alpha\} \end{aligned} \quad (6)$$

Компоненты связности  $\tau^+$  и  $\tau^-$  множеств  $T^+$  и  $T^-$ , на которых модуль производной  $|f'|$  немаленький, естественно считать активными подъемами и активными спадами для  $f$ , а компоненты  $\tau^0$  множества  $T_0$  – участками бокового тренда.



6.5 Мы считаем, что активные участки  $\tau^+$  обязательно должны входить в положительные тренды функции  $f$  и более того каждый такой тренд обязательно должен включать в себя хотя бы один активный участок из  $C(T^+)$ . Аналогично и в отрицательном случае.

6.6 В силу произвольности  $f$  тренды на ней в общем случае не могут быть постоянно значительными в каждой своей точке. Тренды могут быть слабыми в некоторых из них и, более того, вообще пропадать.

Ключ к трендам на  $f$  лежит через возвышенности и впадины на  $f'$ . Определив возвышенности и впадины на  $f$ , определим тренды на  $f$ .

6.7 Логика возвышенности: возвышенность на  $f'$  представляет собой связанное чередование активных участков из  $C(T^+)$  (генераторов возвышенности) и флэт-участков, начинающееся и заканчивающееся активно в  $T^+$ .

Аналогично определяются впадины на  $f'$ , как возвышенности на  $-f'$ .

6.8 Формализация трендов. Положительный тренд  $tr^+$  – максимальный по продолжительности участок функции  $f$ , основание которого является основанием возвышенности на производной  $f'$  (рис. 8):

1.  $tr^+ = \tau_1^+ \vee \tau_1^0 \vee \dots \vee \tau_{k-1}^0 \vee \tau_k^+$   
 $e(\tau_i^+) = b(\tau_i^0)$   
 $e(\tau_i^0) = b(\tau_{i+1}^+)$ ,  $i = 1, \dots, k-1$
2. Семейство  $\{\tau_i^+|_{i=1}^k\}$  – максимальное связанное семейство последовательных отрезков в  $C(T^+)$

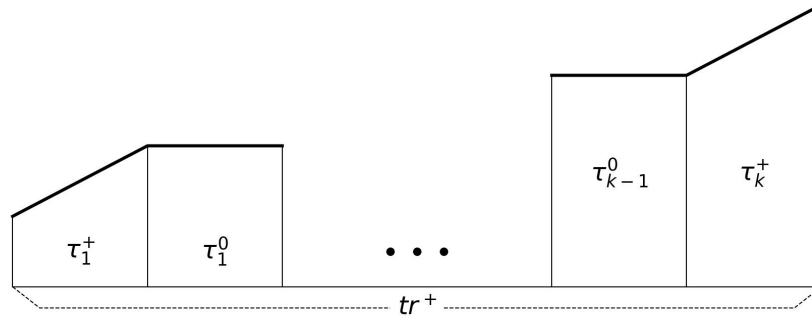


Рис. 8: Положительный тренд

Отрицательный тренд  $tr^-$  – максимальный по продолжительности участок функции  $f$ , основание которого является основанием впадины на производной  $f'$  (рис. 9):

1.  $tr^- = \tau_1^- \vee \tau_1^0 \vee \dots \vee \tau_{k-1}^0 \vee \tau_k^-$   
 $e(\tau_i^-) = b(\tau_i^0)$   
 $e(\tau_i^0) = b(\tau_{i+1}^-)$ ,  $i = 1, \dots, k-1$
2. Семейство  $\{\tau_i^-|_{i=1}^k\}$  – максимальное связанное семейство последовательных отрезков в  $C(T^-)$

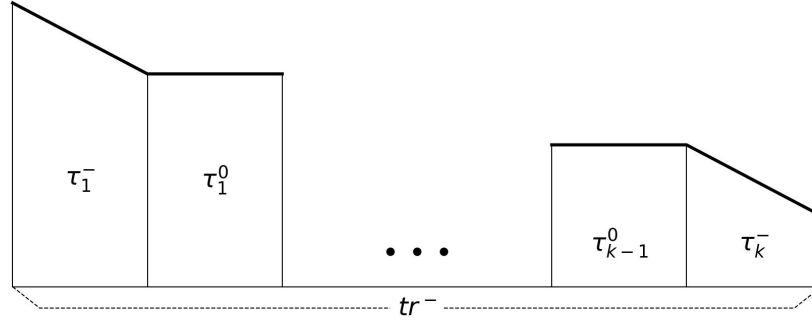


Рис. 9: Отрицательный тренд

## 7. Анализ трендов

- 7.1 Тренды не пересекаются, поскольку их концы являются активными точками и обязательно какие-то из них при пересечении должны попасть в активные узлы другого тренда. А это невозможно, поскольку компоненты связности как в  $T^+$ , так и в  $T^-$  не пересекаются, так же, как и не пересекаются  $T^+$  и  $T^-$ .
- 7.2 Каждый флэт-участок  $\tau^0$  встроенный в тот или иной тренд  $tr$ , является компонентой связности  $T^0$ :  $\tau^0 \subset tr \rightarrow \tau^0 \in C(T^0)$ . Обозначим через  $C^+(T^0)$  множество флэтов, встроенных в положительные тренды, а через  $C^-(T^0)$  флэты, встроенные в отрицательные тренды. Эти множества не пересекаются. Пусть  $C^0(T^0)$  их дополнение в  $C(T^0)$ :

$$C^0(T^0) = C(T^0) \setminus (C^+(T^0) \vee C^-(T^0)).$$

Если оно непусто, то любой флэт-участок из  $C^0(T^0)$  разделяет два тренда, либо лежит в начале (конце)  $T$ .

- 7.3 Для  $\tau \in C^0(T^0)$  обозначим через  $ltr(\tau)$ ,  $rtr(\tau)$  тренды которые он разделяет. Для концов это будут соответственно  $rtr(\tau)$  и  $ltr(\tau)$ .

В этих обозначениях  $\tau \in C^0(T^0)$  называется

1. террасой, если  $ltr(\tau)$  и  $rtr(\tau)$  одноименные тренды (рис. 10а,б)

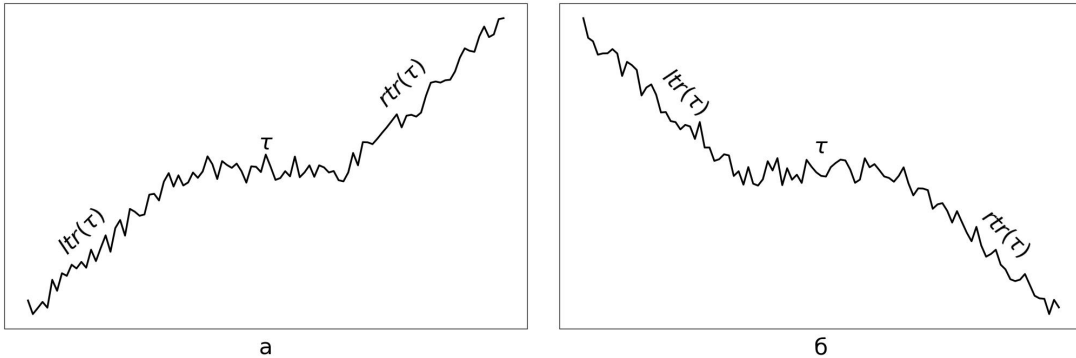


Рис. 10: Террасы

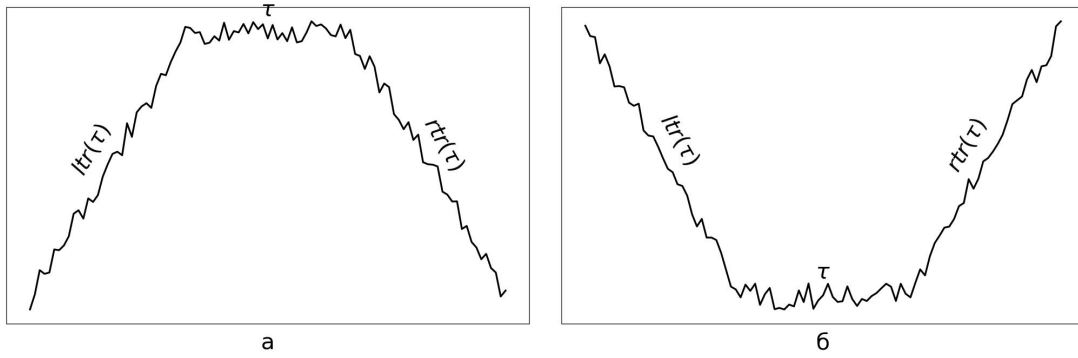


Рис. 11: а – плато; б – овраг

2. плато, если  $ltr(\tau) \in Tr^+(f)$ ,  $rtr(\tau) \in Tr^-(f)$  (рис. 11а)
3. оврагом, если  $ltr(\tau) \in Tr^-(f)$ ,  $rtr(\tau) \in Tr^+(f)$  (рис. 11б)

## 8. Экстремумы

- 8.1 Плато  $\tau \in C^0(T^0)$  будем считать нечетким максимумом  $f$ , если разделяемые им тренды  $ltr(\tau)$  и  $rtr(\tau)$  близки (4.3, 4.4).
- 8.2 Овраг  $\tau \in C^0(T^0)$  будем считать нечетким минимумом  $f$ , если разделяемые им тренды  $ltr(\tau)$  и  $rtr(\tau)$  близки (4.3, 4.4).
- 8.3 В нечетком максимуме  $\tau$  мы выбираем точку  $t^*$ , в которой наиболее явно и одновременно функция  $f$  слева на отрезке  $[b(ltr(\tau)), t^*]$  выглядит возрастающей, а справа на отрезке  $[t^*, e(rtr(\tau))]$  – убывающей:

$$t^* = \operatorname{argmax}_{t \in \tau} \left( \min \left( \frac{\sum_{t \in [b, t^*]} f'(t) : f'(t) \geq 0}{\sum_{t \in [b, t^*]} |f'(t)|}, \frac{\sum_{t \in [t^*, e]} -f'(t) : f'(t) \leq 0}{\sum_{t \in [t^*, e]} |f'(t)|} \right) \right) \quad (7)$$

где  $[b, t^*] = [b(ltr(\tau)), t^*]$ ,  $[t^*, e] = [t^*, e(rtr(\tau))]$

- 8.4 Аналогично в нечетком максимуме  $\tau$  мы выбираем точку  $t^*$ , в которой наиболее явно и одновременно функция  $f$  слева на отрезке  $[b(ltr(\tau)), t^*]$  выглядит убывающей, а справа на отрезке  $[t^*, e(rtr(\tau))]$  – возрастающей:

$$t^* = \operatorname{argmax}_{t \in \tau} \left( \min \left( -\frac{\sum_{t \in [b, t^*]} f'(t) : f'(t) \leq 0}{\sum_{t \in [b, t^*]} |f'(t)|}, \frac{\sum_{t \in [t^*, e]} f'(t) : f'(t) \geq 0}{\sum_{t \in [t^*, e]} |f'(t)|} \right) \right) \quad (8)$$

## 9. Примеры работы

**ПРИМЕР 4.** На рис. 12 показано построение регрессионной производной для некоторой функции  $f(t)$  (рис. 12а). На рис. 12б приведены графики регрессионной производной для различных значениях  $p$ . На рис. 12в показана диаграмма зависимости трендов для разных  $p$  (синим цветом обозначены убывающие тренды, красным – возрастающие). Разноцветные горизонтальные срезы при  $p = 2, 16, 30$  на этом рисунке соответствуют производным на среднем графике. Значения остальных параметров, используемых при вычислении производных, следующие  $r = 0.816$  (2);  $\alpha = 0.5$  (6)

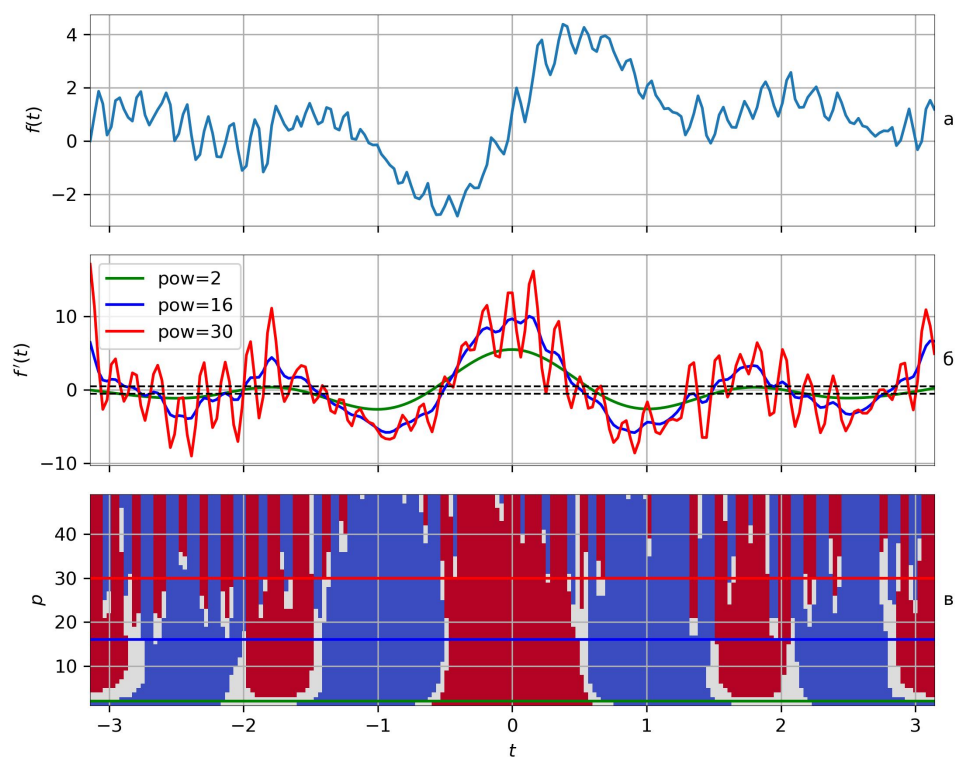


Рис. 12: Регрессионные производные

ПРИМЕР 5. На рис. 13а показано исходная диаграмма зависимости трендов функции из примера 4. На рис. 13б диаграмма зависимости объединенных трендов при  $q = -2$ ,  $r_q = 0.248$  (4) и  $\gamma = 0/75$  (5).

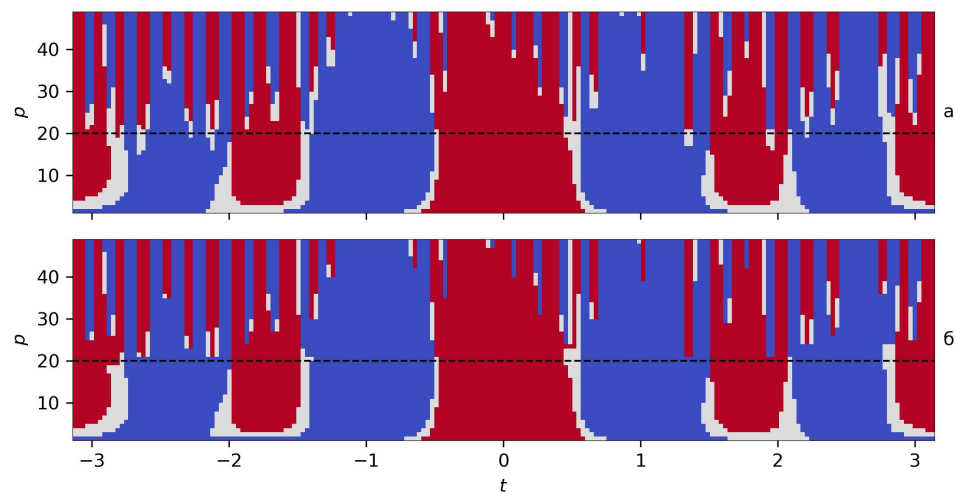


Рис. 13: Объединение трендов

ПРИМЕР 6. На рис. 14а изображена исходная функция  $f(t)$  из примера 4 с выделенными трендами при  $p = 20$  (рис. 13а). Цветными прямоугольниками отмечены серии убывающих и возрастающих трендов, которые в результате операций (4) и (5) будут объединены (рис. 13б).

и 14б). Также на рис. 14б изображены локальные экстремумы, полученные по (7) и (8).

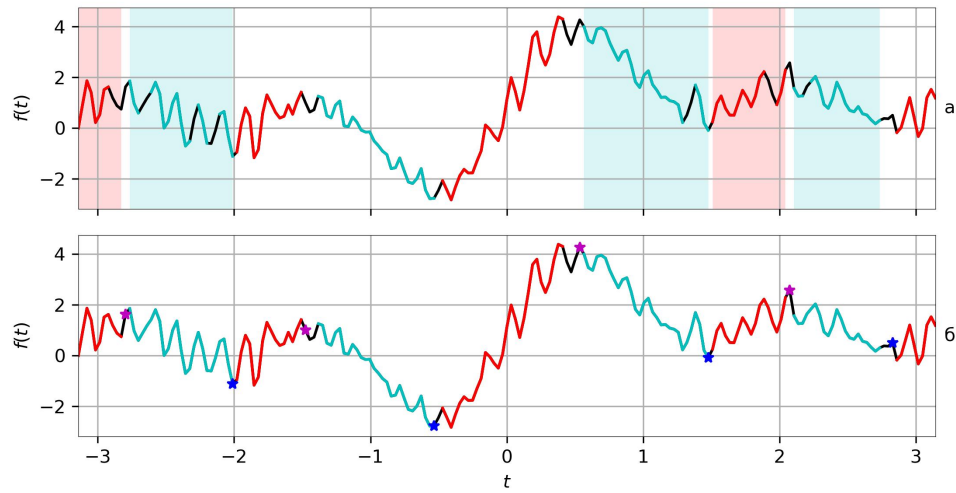


Рис. 14: Тренды и экстремумы ( $\alpha = 0.5$ )

**ПРИМЕР 7.** На рис. 15а изображена исходная функция  $f(t)$  из примера 4 с выделенными трендами при  $p = 20$  и  $\alpha = 2.0$ . Заметно, что объединенные тренды на рис. 15б менее продолжительны, чем на рис. 14б. Вследствие этого увеличились расстояния между противоположными трендами и исчезли незначительные экстремумы.

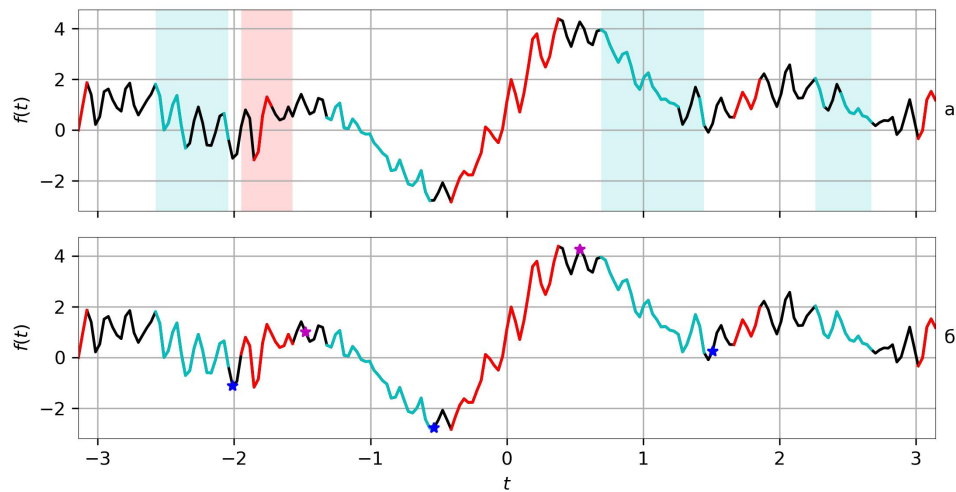


Рис. 15: Тренды и экстремумы ( $\alpha = 2.0$ )

## 10. Заключение

1. Диаграммы зависимости трендов от параметров меры близости доказывают адаптивные возможности подхода к трендам, выбранного в работе.
2. В случае дифференцируемости исходной функции локальные регрессии подобно секущим в пределе переходят в касательную [7].

3. Диаграмма зависимости трендов от параметров меры близости напоминает не только вейвлет-диаграммы, а и иерархическую дивизимную кластеризацию [6]: самым мелким уровнем будет уровень классических математических трендов.
4. Созданный подход к распознаванию стохастических трендов является важным шагом в развитии дискретного математического анализа (ДМА) [8]. Его технической основой наряду с классической математикой является нечеткая математика.

Работа выполнена в рамках государственного задания Геофизического центра РАН, утвержденного Минобрнауки России.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. М.: Мир, 1965. 451 с.
2. Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989. 392 с.
3. Любушин А. А. Анализ данных систем геофизического и экологического мониторинга. М.: Наука, 2005. 228 с.
4. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.
5. Аверкин А. Н., Батыршин И. З., Блишун А. Ф., Силов В. Б., Тарасов В. Б. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д. А. Поспелова. М.: Наука. 1986. 312 с.
6. Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности: Справ. изд. / Под ред. С. А. Айвазяна. М.: Финансы и статистика, 1989. 606 с.
7. Агаян С. М., Соловьев А. А., Богоутдинов Ш. Р., Николова Ю. И. Регрессионные производные и их применение в изучении геомагнитных джерков // Геомагнетизм и аэрономия. 2019. Т. 59, № 3. С. 383–392, DOI: 10.1134/S0016794019030027.
8. Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Красноперов, Р. И. Краткое введение в ДМА // Российский журнал наук о Земле. Т. 18, ES2001, DOI: 10.2205/2018ES000618.

## REFERENCES

1. Gumbel, E. J. 1958, “Statistics of extremes“, *N. Y., Columbia Univ. Press*, 375 p.
2. Leadbetter, M. R., Lindgren, G., Rootzen, H. 1983, “Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes“, *Springer Series in Statistics*, 336 p.
3. Lyubushin, A. A. 2007, “Analysis of data from geophysical and environmental monitoring systems“, *M: Mir*, 228 p.
4. Mallat, S. 1999, “A Wavelet Tour of Signal Processing“, *Academic Press*, 620 p.
5. Averkin, A. N., Batyrshin, I. Z., Blishun, A. F., Silov, V. B., Tarasov, V. B. 1986, “Fuzzy sets in control and artificial intelligence models“/ Edited by D. A. Pospelov. *M.: Nauka*, 312 p.

6. Ayvazyan S. A., Buchstaber V. M., Yenyukov I. S., Meshalkin L. D. 1989, “Applied Statistics: Classification and Dimension Reduction (edited by Ayvazyan S. A.)“, *M: Finansy i statistika*, 606 p.
7. Agayan, S. M., Soloviev, A. A., Bogoutdinov, Sh. R., Nikolova, Y. I. 2019, “Regression derivatives and their application in the study of geomagnetic jerks“, *Geomagnetism and aeronomy*, vol. 59, no. 3, pp. 383–392, DOI: 10.1134/S0016794019030027.
8. Agayan, S. M., Bogoutdinov, Sh. R., Krasnoperov, R. I. 2018, “Short introduction into DMA“, *Russian journal of Earth sciences*, vol. 18, ES2001, DOI: 10.2205/2018ES000618.

Получено 8.10.2019 г.

Принято в печать 12.11.2019 г.