ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 517.925.52 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-78-91

К проблеме устойчивости периодического решения в условиях бифуркации Хопфа

В. В. Абрамов, Е. Ю. Лискина, С. С. Мамонов

Абрамов Владимир Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина (г. Рязань).
e-mail: v.abramov@365.rsu.edu.ru

Лискина Екатерина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина (г. Рязань).
e-mail: e.liskina@365.rsu.edu.ru

Мамонов Сергей Станиславович — доктор физико-математических наук, доцент, профессор, заведующий кафедрой математики и методики преподавания математических дисциплин, Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина (г. Рязань).
e-mail: s.mamonov@365.rsu.edu.ru

Аннотация

Данная работа посвящена проблеме устойчивости малого периодического решения нормальной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При исследовании устойчивости периодического решения автономной системы естественно анализировать локальную динамику пересечений возмущенных траекторий с ортогональными сечениями соответствующего цикла. Путем введения специальной системы координат, в которой одна из осей направлена по касательной к траектории периодического решения, задача об орбитальной устойчивости периодического решения сводится к задаче об устойчивости по Ляпунову нулевого решения вспомогательной системы с периодической по t правой частью. Для вспомогательной системы, размерность которой на единицу меньше размерности исходной системы, в линейном приближении вопрос об устойчивости нулевого решения сводится к оценке мультипликаторов матрицы монодромии. Таким образом, по теореме Андронова — Витта реализуется классический подход к исследованию орбитальной устойчивости периодического решения. При этом имеет место некритический случай орбитальной устойчивости. Такой подход традиционно используется и в условиях бифуркации типа Хопфа для систем с параметром. В данной работе для автономной системы с параметром получены условия бифуркации малого решения, период которого близок к периоду решений соответствующей линейной однородной системы. Сформулировано определение свойства орбитальной устойчивости по параметру, согласно которому возмущенные правые полутраектории сколь угодно близки к исследуемому циклу не только за счет малости возмущений начальных значений, но и за счет малости параметра. При этом использована идея ослабления требований определения устойчивости ляпуновского типа, предложенная М.М. Хапаевым. Свойство орбитальной устойчивости по параметру может иметь место и при наличии орбитальной неустойчивости исследуемого цикла в классическом смысле. Для исследования орбитальной устойчивости малого периодического решения по параметру использовано нелинейное приближение упомянутой выше вспомогательной системы возмущенных движений.

Ключевые слова: качественная теория, автономная система дифференциальных уравнений, периодическое решение, орбитальная устойчивость, малый параметр, устойчивость по параметру, оператор монодромии.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
В. В. Абрамов, Е. Ю. Лискина, С. С. Мамонов. К проблеме устойчивости периодического решения в условиях бифуркации Хопфа // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 78–91.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 517.925.52 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-78-91

On the problem of periodic solution's stability under Hopf bifurcation

V. V. Abramov, E. Ju. Liskina, S. S. Mamonov

Abramov Vladimir Viktorovich — candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor of the Department of mathematics and methods of teaching mathematical disciplines, Ryazan state University named after S. A. Yesenin (Ryazan).
e-mail: v.abramov@365.rsu.edu.ru
Liskina Ekaterina Yuryevna — candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor of the Department of mathematics and methods of teaching mathematical disciplines, Ryazan state University named after S. A. Yesenin (Ryazan).
e-mail: e.liskina@365.rsu.edu.ru
Mamonov Sergey Stanislavovich — doctor of physical and mathematical Sciences, associate Professor, Professor, head of the Department of mathematics and methods of teaching mathematical disciplines, Ryazan state University named after S. A. Yesenin (Ryazan).
e-mail: s.mamonov@365.rsu.edu.ru

Abstract

This work is devoted to the problem of stability of a small periodic solution of a normal Autonomous system of ordinary differential equations. It is natural to analyze the local dynamics of intersections of perturbed trajectories with orthogonal sections of the corresponding cycle when studying the stability of the periodic solution of an Autonomous system. The problem of orbital stability of the periodic solution is reduced to the problem of Lyapunov stability of the zero solution of an auxiliary system with a periodic t right-hand side by introducing a special coordinate system in which one of the axes is directed tangentially to the trajectory of the periodic solution. For an auxiliary system whose dimension is one less than the dimension of the original system, in a linear approximation, the question of the stability of the zero solution is reduced to an estimate of the multipliers of the monodromy matrix. Thus, according to the Andronov — Witt theorem, the classical approach to the study of the orbital stability of the periodic solution is realized. There is a non-critical case of orbital stability. This approach is traditionally used in Hopf-type bifurcation for systems with a parameter. In this paper, for an autonomous system with a parameter, the bifurcation conditions of a small solution whose period is close to the solution period of the corresponding linear homogeneous system are obtained. The determination of the orbital stability property by the parameter is formulated. According to this condition, the perturbed right half-vectors are arbitrarily close to the studied cycle not only due to the smallness of the initial values perturbations, but also due to the smallness of the parameter. In this case, the idea of weakening the requirements for determining the stability of the Lyapunov type, proposed by M. M. Khapaev, is used. The property of orbital stability with respect to the parameter can also take place in the presence of orbital instability of the studied cycle in the classical sense. A nonlinear approximation of the above-mentioned auxiliary system of perturbed motions is used to study the orbital stability of a small periodic solution with respect to the parameter.

Keywords: qualitative theory, autonomous system of differential equations, periodic solution, orbital stability, small parameter, parameter stability, monodromy operator.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
V. V. Abramov, E. Ju. Liskina, S. S. Mamonov, 2019, "On the problem of periodic solution's stability under Hopf bifurcation" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 78–91.

1. Введение

При исследовании устойчивости периодического решения автономной системы дифференциальных уравнений естественно возникает вопрос о близости к соответствующему циклу возмущенных траекторий. Чтобы обнаружить свойство орбитальной асимптотической устойчивости периодического решения традиционно рассматривается соответствующая система в вариациях, для которой устанавливаются оценки мультипликаторов и применяется теорема Андронова — Витта. Такой же подход характерен и для бифуркации типа Хопфа в системах с малым параметром. При таком подходе имеют место некритические случаи орбитальной устойчивости, так как используются свойства линейного приближения системы возмущенных движений [1, 2, 3, 4, 5, 6].

В данной работе определим новое свойство орбитальной устойчивости. Исследование этого свойства проведем по нелинейному приближению системы возмущенных движений.

Покажем целесообразность ослабления требований определения орбитальной устойчивости для систем с параметром. Рассмотрим уравнение для траекторий на полярной плоскости

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho(\mu - \rho)(3\mu - \rho),$$

в котором $\mu \geq 0$ — малый параметр. При $\mu > 0$ это уравнение имеет два орбитально асимптотически устойчивых цикла $\rho = \mu$, $\rho = 3\mu$, которые ограничивают область отталкивания неустойчивого цикла $\rho = 2\mu$. Эту ситуацию можно расценивать иначе — цикл $\rho = 2\mu$ имеет “кольцевую”область устойчивости, то есть возмущенные траектории остаются в сколь угодно малой окрестности цикла $\rho = 2\mu$ не только за счет малости возмущений начальных значений, но также и за счет малости параметра μ. При этом с практической точки зрения цикл $\rho = 2\mu$ может рассматриваться в качестве устойчивой орбиты. Для формального описания свойства устойчивости малого цикла в случаях такого рода используем идею “устойчивости по параметру” [7].

При наличии у нулевого решения свойства устойчивости по параметру возмущенные движения сколь угодно близки к нулевому решению, если достаточно малы начальные значения возмущенных решений и параметр изучаемой системы дифференциальных уравнений. При этом нулевое решение может быть неустойчиво по Ляпунову. Свойство устойчивости по параметру исследовалось на основе комбинации метода функций Ляпунова и метода усреднения (основные результаты представлены в монографии [7]), а также на основе оценки нелинейного приближения оператора монодромии для систем с периодической по независимой переменной правой частью [8].

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\dot{y} = Ay + f(y, \mu), \tag{1}$$

в которой $y \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ — малый параметр, функция $f(y,\mu)$ достаточно гладко зависит от своих переменных в окрестности точки $(0_{n+1}, 0_m)$,

$$f\left(0_{n+1},\mu\right) \equiv 0_{n+1}, \quad f'_y\left(0_{n+1},0_m\right) \equiv 0_{(n+1)(n+1)}.$$

Здесь и далее 0_m — m-мерный вектор, 0_{ml} — $m\times l$-матрица. Будем предполагать, что линейное приближение $\dot{y} = Ay$, соответствующее системе (1), при $\mu = 0_m$ имеет по крайней мере одно ω_0-периодическое решение.

Определение 1. *Будем говорить, что ω-периодическое решение $y(t,\alpha,\mu)$, $y(0,\alpha,\mu)=\alpha$ системы (1) является малым, если для величин α, μ, ω существует совместная параметризация вида*

$$\begin{gathered} a = a(\alpha) = \alpha(a_0 + \bar{a}(\alpha)), a_0 \neq 0_{n+1}, \lim_{\alpha\to 0} \bar{a}(\alpha) = 0_{n+1}; \\ \mu = \mu(\alpha) = \alpha(\mu_0 + \bar{\mu}(\alpha)), \mu_0 \neq 0_m, \lim_{\alpha\to 0}\bar{\mu}(\alpha) = 0_m; \\ \omega = \omega(\alpha), \lim_{\alpha\to 0}\omega(\alpha) = \omega_0. \end{gathered} \tag{2}$$

Ясно, что в условиях определения 1 для системы (1) имеет место бифуркация периодического решения от нулевого.

Решение, удовлетворяющее определению 1, далее будем называть решением вида (2).

Рассмотрим траекторию $T = \left\{y \in \mathbb{R}^{n+1} : y = y(t,a,\mu), t \in [0,\omega]\right\}$ малого периодического решения вида (2) и ее ε-окрестность $U(T,\varepsilon)$.

Для исследования устойчивости решения вида (2) системы (1) введем α в качестве малого параметра в правую часть системы (1). Поэтому целесообразно сформулировать следующее определение.

Определение 2. *Малое ω-периодическое решение вида (2) системы (1) орбитально α-устойчиво, если для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое значение $\delta > 0$, что при всех величинах a_1, α, удовлетворяющих условиям $a_1 \in U(T,\varepsilon)$, $\alpha < \delta$, и при всех $t > 0$ имеет место включение $y(t,a_1,\mu(\alpha)) \in U(T,\varepsilon)$.*

Заметим, что малое орбитально устойчивое решение обладает свойством устойчивости по определению 2. Однако свойство орбитальной α-устойчивости может иметь место и для орбитально неустойчивого решения.

Задача. Для системы (1) найти условия бифуркации ω-периодического решения вида (2), устойчивого по определению 2.

2. Условия бифуркации периодического решения

Для определения зависимости периода решения от начального значения и от параметра выполним в системе (1) замену независимой переменной $t = (1+\lambda)\tau$, где λ — малый параметр [9]. Получим систему вида

$$\frac{dv}{d\tau} = Av + \lambda Av + (1+\lambda)f(v,\mu). \tag{3}$$

Допустим, $y(t,a,\mu)$ — ω-периодическое решение системы (1), то есть

$$\dot{y}(t,a,\mu) \equiv g(y(t,a,\mu),\mu)$$

при $t \in [0,\omega]$. Умножив тождество на $\dfrac{d\tau}{d\tau}$, имеем

$$\frac{dy((1+\lambda)\tau,a,\mu)}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt} \equiv \frac{dy((1+\lambda)\tau,a,\mu)}{d\tau}\cdot\frac{1}{1+\lambda} \equiv g(y((1+\lambda)\tau,a,\mu),\mu),$$

при $\tau \in \left[0, \dfrac{\omega}{1+\lambda}\right]$, где $g(y,\mu) = Ay + f(y,\mu)$. Следовательно, $\dfrac{\omega}{1+\lambda}$-периодическая функция $v(\tau,a,\lambda,\mu) = y((1+\lambda)\tau,a,\mu)$ является решением системы (3). Так как проведенные вычисления можно обратить, то в силу автономности систем (1) и (3) справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Система* (1) *имеет решение* $y(t,a,\mu)$ *с периодом* $\omega = (1+\lambda)\omega_0$ *тогда и только тогда, когда система* (3) *имеет* ω_0*-периодическое решение* $v(\tau,a,\lambda,\mu)$*,* $v(0,a,\lambda,\mu) = a$.

Чтобы установить условия существования периодического решения системы (3) применим результаты работ [10, 11]. Пусть $X(\tau) = \exp(\tau A)$. Решение системы (3) удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(\tau,a,\lambda,\mu) = X(\tau)a + \lambda X(\tau)\int_0^\tau X(-s)Av(s,a,\lambda,\mu)ds + (1+\lambda)X(\tau)\int_0^\tau X(-s)f(v(s,a,\lambda,\mu),\mu)ds.$$

Так как матрицы $X(\tau)$, $X(-\tau)$, A коммутируют, то $X(\tau)\int_0^\tau X(-s)AX(s)ds = \tau X(\tau)A$. Учитывая локальную гладкость $f(y,\mu)$, оператор монодромии (оператор сдвига на период по траекториям) системы (3) можно представить в виде

$$v(\omega_0,a,\lambda,\mu) = Xa + q(a,\lambda,\mu) + \psi(a,\lambda,\mu), \tag{4}$$

в котором $X = X(\omega_0)$ — матрица монодромии, $q(a,\lambda,\mu) = \omega_0\lambda XAa + p(a,\mu)$ — первое нелинейное однородное приближение оператора монодромии. Векторная форма $p(a,\mu)$ порядка $k > 1$ и функция $\psi(a,\lambda,\mu)$ удовлетворяют условиям:

$$p(a,\mu) + \tilde{p}(a,\mu) = X\int_0^{\omega_0} X(-s)f(X(-s)a,\mu)ds,$$

$$p(\alpha a,\alpha\mu) = \alpha^k p(a,\mu), \quad \lim_{\alpha\to 0}\alpha^{-k}\left\|\tilde{p}(\alpha a,\alpha\mu)\right\| \equiv 0,$$

$$\psi(a,\lambda,\mu) = \lambda X\int_0^{\omega_0} X(-s)Av(s,a,\lambda,\mu)ds + (1+\lambda)X\int_0^{\omega_0} X(-s)f(v(s,a,\lambda,\mu),\mu)ds - q(a,\lambda,\mu),$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\alpha^{-k}\left\|\psi(\alpha a,\alpha^{k-1}\lambda,\alpha\mu)\right\| \equiv 0,$$

Из условия (4) следует, что $v(\tau,a,\lambda,\mu)$ — ω_0-периодическое решение системы (3) тогда и только тогда, когда величины a, λ, μ удовлетворяют бифуркационному уравнению

$$\left[X - E_{n+1}\right]a + q(a,\lambda,\mu) + \psi(a,\lambda,\mu) = 0_{n+1}. \tag{5}$$

Здесь и далее E_s — $s \times s$-матрица.

Так как по условию система $\dot{y} = Ay$ имеет ω_0-периодическое решение, то справедливо равенство

$$\det\left(X - E_{n+1}\right) = 0. \tag{6}$$

Допустим, $r = \dim\{\ker\left[X - E_{n+1}\right]\}$ при условии (6). Для линейной системы $\left[X - E_{n+1}\right]a = 0_{n+1}$ вычислим фундаментальную $(n+1)\times r$-матрицу решений K. Выполним подстановку $a = Kh$, в которой $h \in \mathbb{R}^r$ — произвольный вектор. Тогда уравнение (5) примет вид

$$q(Kh,\lambda,\mu) + \psi(Kh,\lambda,\mu) = 0_{n+1}. \tag{7}$$

Допустим, $r+m \geq n$ и существуют значения $a_0 = Kh_0 \neq 0_{n+1}$, $\lambda_0, \mu_0 \neq 0_m$, удовлетворяющие условиям

$$q(a_0, \lambda_0, \mu_0) = 0_{n+1}, \tag{8}$$

$$\mathrm{rang} Q = n+1, \tag{9}$$

в которых

$$Q = \frac{\partial q(Kh_0, \lambda_0, \mu_0)}{\partial(h, \lambda, \mu)} = [[\omega_0 \lambda_0 XA + p\prime_a(a_0, \mu_0)]\, K \quad \omega_0 XAa_0 \quad p\prime_\mu(a_0, \mu_0)] -$$

$(n+1)\times(r+m+1)$-матрица.

В работе [11] доказано, что условия (6) и (8) необходимы для бифуркации малого периодического решения системы (3).

Теорема 1. *Если выполняются условия* (6), (8), (9), *то система* (1) *имеет малое решение вида* (2) *с периодом* $\omega = (1+\lambda)\omega_0$, $\lambda = \alpha^{k-1}(\lambda_0 + \bar\lambda(\alpha))$, $\lim\limits_{\alpha\to 0} \bar\lambda(\alpha) = 0$.

Доказательство. Подставим в уравнение (7) величины $h = \alpha(h_0 + \bar h)$, $\lambda = \alpha^{k-1}(\lambda_0 + \bar\lambda)$, $\mu = \alpha(\mu_0 + \bar\mu)$, $\alpha > 0$. Обозначим $u = \mathrm{colon}(\bar h, \bar\lambda, \bar\mu)$ По условию (8) уравнение (7) преобразуется к виду $\alpha^k Qu + \varphi(\alpha, u) = 0_{n+1}$. С учетом равенства (9) выберем разложение $Qu = Q_1u_1 + Q_2u_2$, в котором Q_1 — $(n+1)\times(n+1)$-матрица, составленная из линейно независимых столбцов матрицы Q, матрица Q_2 составлена из остальных столбцов матрицы Q, векторы u_1, u_2 составлены из компонент вектора u с номерами, соответствующими номерам указанных столбцов,

$$\varphi(\alpha, u) = \psi(Kh, \lambda, \mu) - \alpha^k q(K(h_0 + \bar h), \lambda_0 + \bar\lambda, \mu_0 + \bar\mu).$$

Допустим, $u_2 = 0_{n+1-r-m}$. Разделим преобразованное уравнение на α^k. Так как

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha^{-k} \left\| \psi(\alpha a, \alpha^{k-1}\lambda, \alpha\mu) \right\| \equiv 0,$$

то в силу условия (8) функцию $\bar\varphi(\alpha, u_1) = \alpha^{-k}\varphi(\alpha, u)$ при $\alpha \to 0$ можно доопределить: $\bar\varphi(0, 0_{n+1}) = 0_{n+1}$, $\bar\varphi\prime_{u_1}(0, 0_{n+1}) = 0_{(n+1)(n+1)}$. Итак, уравнение (7) преобразовано в уравнение, связывающее вектор u_1 с параметром α,

$$F(\alpha, u_1) = Q_1u_1 + \bar\varphi(\alpha, u_1) = 0_{n+1}. \tag{10}$$

Так как выполняются условия $F(0, 0_{n+1}) = 0_{n+1}$, $\bar F\prime_{u_1}(0, 0_{n+1}) = \det Q_1 \neq 0$, то уравнение (10) определяет неявную функцию $u_1(\alpha)$ при $\alpha \in [0, \Delta)$, где Δ — некоторое достаточно малое число, $\lim\limits_{\alpha\to 0} u_1(\alpha) = 0_{n+1}$. Перейдем к исходным переменным и получим величины $h = h(\alpha) = \alpha^{k+1}(\lambda_0 + \bar h(\alpha))$, $\lambda = \lambda(\alpha) = \alpha(h_0 + \bar\lambda(\alpha))$, $\mu = \mu(\alpha) = \alpha(\mu_0 + \bar\mu(\alpha))$, которые удовлетворяют уравнению (7) при $\alpha \in [0, \Delta)$. При этом величины $a = a(\alpha) = Kh(\alpha)$, $\lambda = \lambda(\alpha)$, $\mu = \mu(\alpha)$ удовлетворяют уравнению (5) при $\alpha \in [0, \Delta)$, то есть определяют малое ω_0-периодическое решение $\bar v = \bar v(\tau, \alpha) = v(\tau, a(\alpha), \lambda(\alpha), \mu(\alpha))$ системы (3). Тогда в силу леммы 1 система (1) имеет решение вида (2) с периодом $\omega = (1+\lambda(\alpha))\omega_0$. Теорема 1 доказана.

3. Построение специальной системы координат в окрестности траектории малого периодического решения

В силу леммы 1 траектория периодического решения вида (2) и траектория соответствующего решения $\bar v = \bar v(\tau, \alpha)$ системы (3) совпадают, отличаясь лишь способом параметризации. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Решение вида* (2) *системы* (1) *орбитально* α*-устойчиво тогда и только тогда, когда соответствующее малое* ω_0*-периодическое решение* $\bar{v} = \bar{v}(\tau, \alpha)$ *системы* (3) *орбитально* α*-устойчиво.*

Для исследования малого периодического решения в условиях теоремы 1 на устойчивость по определению 2 выполним в окрестности траектории этого решения преобразование переменных [12].

Зададим подвижную ортогональную плоскость π_τ к траектории периодического решения $\bar{v}$ системы (3) как множество векторов v, удовлетворяющих условию

$$\pi_\tau \quad : \quad (v - \bar{v})^T \bar{v}_1 = 0, \tag{11}$$

в котором $\bar{v}_1 = \dfrac{d\bar{v}_1}{d\tau}$ — направляющий вектор к траектории решения $\bar{v}$ в данный момент.

В систему (3) введем параметр α, который по теореме 1 согласует начальное значение малого периодического решения с параметрами системы, выбрав $\lambda = \lambda(\alpha)$, $\mu = \mu(\alpha)$, и получим систему

$$\frac{dv}{d\tau} = \tilde{f}(v, \alpha) = Av + \lambda(\alpha)Av + (1 + \lambda(\alpha))f(v, \mu(\alpha)). \tag{12}$$

Рассмотрим в начальный момент плоскость π_0. В малой окрестности начального значения периодического решения $\bar{v} = \bar{v}(\tau, \alpha)$ системы (3) произвольно выберем начальное значение $a = v(0, a, \lambda(\alpha), \varepsilon(\alpha))$ возмущенного решения $v(\tau, a, \lambda(\alpha), \varepsilon(\alpha))$. Допустим, $\theta = \theta(\tau, a)$ — момент первого пересечения траектории возмущенного решения с плоскостью π_τ. Тогда

$$z = z(\tau, a, \alpha) = v(\theta, a, \alpha) - \bar{v}(\theta, a, \alpha) \in \pi_\tau.$$

При этом $z^T \bar{v}_1 = 0$ по условию (11).

Составим систему дифференциальных уравнений для переменной z. С этой целью вычислим

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{dv}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\tau} - \bar{v}_1. \tag{13}$$

В силу равенства (11) справедливо соотношение

$$\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^T \bar{v}_1 = z^T \bar{v}_2, \tag{14}$$

в котором $\bar{v}_2 = \dfrac{\bar{v}_1}{d\tau}$. Учтем, что функция $v(\theta, a, \alpha) = z(\tau, a, \alpha) + \bar{v}(\tau, \alpha)$ удовлетворяет системе (12), то есть

$$\frac{dv(\theta, a, \alpha)}{d\theta} \equiv \tilde{f}(z(\tau, a, \alpha) + \bar{v}(\tau, \alpha), \alpha).$$

Поэтому скалярно умножив равенство (13) на $\bar{v}_1$, в силу равенства (14) получим соотношение

$$\left(\tilde{f}(z + \bar{v}, \alpha)\right)^T \bar{v}_1 \frac{d\theta}{d\tau} - \bar{v}_1^2 + z^T \bar{v}_2 = 0, \tag{15}$$

где $\bar{v}_1^2 = (\bar{v}_1)^T \bar{v}_1$. Итак, с помощью равенств (13) и (15) получим систему уравнений

$$\frac{dz}{d\tau} = \tilde{\tilde{f}}(z, \alpha) = w(z, \alpha)\tilde{f}(z + \bar{v}, \alpha) - \bar{v}_1, \tag{16}$$

в которой $w(z, \alpha) = \dfrac{\bar{v}_1^2 - z^T \bar{v}_2}{\left(\tilde{f}(z + \bar{v}, \alpha)\right)^T \bar{v}_1}$. Так как ω_0-периодическое решение $\bar{v} = \bar{v}(\tau, \alpha)$ системы (3) при малых $\alpha > 0$ имеет вид

$$\bar{v} = \alpha(X(\tau)a_0 + \eta(\tau, \alpha)),$$

$$\eta(\tau,\alpha)=\alpha^{-1}X(\tau)\int\limits_0^\tau X(-s)(\lambda(\alpha)A\bar v+(1+\lambda(\alpha))f(\bar v,\mu(\alpha)))ds,\quad \lim_{\alpha\to0}\|\eta(\tau,\alpha)\|\equiv0,$$

то справедливо равенство

$$w(z,\alpha)=\frac{\dfrac{\bar v_1^2}{\alpha}-z^T\left(A^2X(\tau)a_0+\dfrac{d^2\eta(\tau,\alpha)}{d\tau^2}\right)}{(Az+f(z,\alpha))^T\left(AX(\tau)a_0+\dfrac{d\eta(\tau,\alpha)}{d\tau}\right)}.$$

Чтобы определить локальную структуру правой части системы (16) в окрестности нулевого решения, введем систему координат на плоскости π_τ .

Допустим, в системе (1) при $\mu=0_m$ матрица линейного приближения имеет блочно-диагональную форму

$$A=\mathrm{diag}(A_1,A_2),\tag{17}$$

где A_2 — $l\times l$-матрица в жордановой нормальной форме, имеющая только нулевые или чисто мнимые $\pm i\beta$ собственные значения, для которых выполняется условие $\dfrac{\beta}{2\pi/\omega_0}\in\mathbb N$, $l\le r$, причем $A_2^T=-A_2$, $\exp(\omega_0A_2)=E_l$, A_2^2 — диагональная матрица. В силу равенства (17) по условиям теоремы 1 направление бифуркации периодического решения в фазовом пространстве определяется вектором вида $a_0=(0,\dots,0,c^{n+1})$, $c^{n+1}\in\mathbb R^l$. Без ограничения общности рассуждений будем предполагать, что $\left\|c^{n+1}\right\|_2=1$ (здесь и далее $\|*\|_2$ — евклидова норма).

Для траектории периодического решения $\bar v=\bar v(\tau,\alpha)$ выберем нормированный направляющий вектор касательной

$$b_{n+1}(\tau,\alpha)=\frac{\dfrac{d\bar v}{d\tau}}{\left\|\dfrac{d\bar v}{d\tau}\right\|_2}=\bar b_{n+1}(\tau)+\lambda_{n+1}(\tau,\alpha),$$

в котором

$$\bar b_{n+1}(\tau)=\left(0_{n+1-l},P(\tau)c^{n+1}\right),\quad P(\tau)=\omega_0^{-1}A_2X_2(\tau),\quad X_2(\tau)=\exp(\tau A_2),$$

$\lim\limits_{\alpha\to0}\|\lambda_{n+1}(\tau,\alpha)\|\equiv0$. При этом вектор $b_{n+1}(\tau,\alpha)$ — нормаль к плоскости π_τ. Выберем векторы $c^{n+j}\in\mathbb R^l$, $j=\overline{2,l}$, образующие вместе с вектором c^{n+1} ортонормированную систему. В силу условия (17) справедливы равенства $P^T(\tau)P(\tau)\equiv E$, $\|P(\tau)\|_2\equiv1$. Поэтому векторы $\bar b_{n+j}(\tau)=(0_{n+1},P(\tau)c^{n+j})$, $j=\overline{1,l}$, при любом τ тождественно образуют ортонормированную систему. Из столбцов c^{n+j}, $j=\overline{1,l}$, составим ортогональную $l\times l$-матрицу C. Таким образом, построена ортогональная матрица $B=B(\tau,\alpha)=\bar B(\tau)+\Lambda(\tau,\alpha)$, в которой $\bar B(\tau)=\mathrm{diag}(E_{n+1-l},P(\tau)C)$, матрица $\Lambda(\tau,\alpha)$ содержит последний столбец $\lambda_{n+1}(\tau,\alpha)$ и удовлетворяет условию $\lim\limits_{\alpha\to0}\|\Lambda(\tau,\alpha)\|\equiv0$.

Выполним замену переменной $z=B\bar x$ в системе (16). Учитывая ортогональность матрицы B, получим $B^{-1}=B^T(\tau)$. Продифференцируем равенство $\bar x=B^Tz$ и преобразуем систему (16) к виду

$$\frac{d\bar x}{d\tau}=B^T\tilde{\tilde f}(B\bar x,\alpha)+\left[\frac{dB}{d\tau}\right]^TB\bar x=\bar g(\tau,\bar x,\alpha).\tag{18}$$

При $\alpha=0$ справедливо равенство

$$\left[\frac{d\bar B(\tau)}{d\tau}\right]^T\bar B(\tau)=\mathrm{diag}\left[0_{n+1-l},\left(\frac{dP(\tau)}{d\tau}C\right)^T\right]\mathrm{diag}(E_{n+1-l},P(\tau)C).$$

Так как $A_2X_2(\tau) = X_2(\tau)A_2$, то $P^T\dfrac{dP(\tau)}{d\tau} = -A_2$. Следовательно,

$$\left[\frac{dB}{d\tau}\right]^T B = \mathrm{diag}(0_{n+1-l}, -C^T A_2 C) + \tilde{\Lambda}(\tau,\alpha), \quad \lim_{\alpha\to 0}\left\|\tilde{\Lambda}(\tau,\alpha)\right\| \equiv 0.$$

Так как $\lim\limits_{\alpha\to 0}\|\bar{v}\| \equiv 0$, то $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left\|\dfrac{\bar{v}_1^2}{\alpha}\right\| \equiv 0$. По условию (17) справедливо равенство

$$\left(\bar{B}\bar{x}\right)^T\left[A^T + A\right]AX(\tau)a_0 = 0_{n+1}.$$

Поэтому, доопределив функцию $w(z,\alpha)$ из системы (16) при $\alpha\to 0$ по непрерывности, получим равенство

$$w(B(\tau,0)\bar{x},0) = \frac{-\left(\bar{B}\bar{x}\right)^T A^2 X(\tau)a_0}{\left(A\bar{B}\bar{x} + f(\bar{B}\bar{x},0)\right)^T AX(\tau)a_0} = .$$

$$= \frac{\left(\bar{x}^T\bar{B}^T A^T + \left(f(\bar{B}\bar{x},0)\right)^T\right)AX(\tau)a_0}{\left(A\bar{B}\bar{x} + f(\bar{B}\bar{x},0)\right)^T AX(\tau)a_0} - \frac{\left(\left(\bar{B}\bar{x}\right)^T\left[A^T + A\right] + \left(f(\bar{B}\bar{x},0)\right)^T\right)AX(\tau)a_0}{\left(A\bar{B}\bar{x} + f(\bar{B}\bar{x},0)\right)^T AX(\tau)a_0} =$$

$$= 1 - \frac{\left(f(\bar{B}\bar{x},0)\right)^T AX(\tau)a_0}{\left(A\bar{B}\bar{x} + f(\bar{B}\bar{x},0)\right)^T AX(\tau)a_0}.$$

Следовательно, в окрестности точки $\bar{x} = 0_{n+1}$ имеет место разложение

$$w(B(\tau,0)\bar{x},0) = 1 - \bar{w}(\tau,\bar{x}) + \tilde{w}(\tau,\bar{x}), \tag{19}$$

в котором $\bar{w}(\tau,\bar{x}) = \dfrac{\left(f(\bar{B}\bar{x},0)\right)^T AX(\tau)a_0}{\left(A\bar{B}\bar{x}\right)^T AX(\tau)a_0}$, функция $\tilde{w}(\tau,\bar{x})$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\gamma\to 0}\frac{\|\tilde{w}(\tau,\gamma\bar{x})\|}{\|\bar{w}(\tau,\gamma\bar{x})\|} \equiv 0.$$

С учетом равенства (19) правая часть системы (18) при $\alpha = 0$ имеет вид

$$\bar{g}(\tau,\bar{x},0) = \bar{B}^T w(\bar{B}\bar{x},0)\left(A\bar{B}\bar{x} + f(\bar{B}\bar{x},0_m)\right) + \left[\frac{d\bar{B}}{d\tau}\right]^T\bar{B}\bar{x} = D\bar{x} + \bar{\varphi}(\tau,\bar{x}) + \tilde{\varphi}(\tau,\bar{x}),$$

где $\bar{D} = \bar{B}^T A\bar{B} + \left[\dfrac{d\bar{B}}{d\tau}\right]^T\bar{B} = \mathrm{diag}(A_1, 0_{ll})$, $\bar{\varphi}(\tau,\bar{x}) = \bar{B}^T(f(\bar{B}\bar{x},0_m) - \bar{w}(\tau,\bar{x})A\bar{B}\bar{x})$, функция $\tilde{\varphi}(\tau,\bar{x})$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{\gamma\to 0}\dfrac{\|\tilde{\varphi}(\tau,\gamma\bar{x})\|}{\|\bar{\varphi}(\tau,\gamma\bar{x})\|} \equiv 0$.

Итак, в окрестности начала координат при малом значении параметра система (18) имеет вид

$$\frac{dx}{d\tau} = \bar{g}(\tau,\bar{x},\alpha) = \bar{D}\bar{x} + \bar{\varphi}(\tau,\bar{x}) + \tilde{\varphi}(\tau,\bar{x}) + \tilde{\tilde{\varphi}}(\tau,\bar{x},\alpha), \tag{20}$$

$\bar{g}(\tau,0_{n+1},\alpha) \equiv 0_{n+1}$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left\|\tilde{\tilde{\varphi}}(\tau,\bar{x},\alpha)\right\| \equiv 0$. Множество $\Pi = \{\bar{x} = (x,0)\}$ в силу проведенных преобразований инвариантно для системы (20) [12]. В системе выберем $\bar{x} = (x,0)$, исключим последнее уравнение и получим систему с ω_0-периодической по τ правой частью вида

$$\frac{dx}{d\tau} = g(\tau,x,\alpha) = Dx + \varphi(\tau,x) + \varphi_1(\tau,x) + \varphi_2(\tau,x,\alpha), \tag{21}$$

в которой $g(\tau, x, \alpha) = \bar{E}_{n+1}\bar{g}(\tau, (x, 0), \alpha)$, $n \times (n+1)$-матрица $\bar{E}_{n+1}$ получена из E_{n+1} вычеркиванием последней строки, $g(\tau, 0_n, \alpha) \equiv 0_n$, $D = \mathrm{diag}(A_1, 0_{(l-1)(l-1)})$, $\varphi(\tau, x) = \bar{E}_{n+1}\bar{\varphi}(\tau, (x, 0)$, функции $\varphi_1(\tau, x)$, $\varphi_2(\tau, x, \alpha)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{\gamma\to 0} \frac{\|\varphi_1(\tau, \gamma x)\|}{\|\varphi(\tau, \gamma x)\|} \equiv 0, \quad \lim_{\alpha\to 0} \|\varphi_2(\tau, x, \alpha)\| \equiv 0.$$

Для решения $x = 0_n$ системы (21) используем определение устойчивости по параметру [8, 13].

Определение 3. *Решение $x = 0_n$ системы вида* (21) *α-устойчиво, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого решения $x(\tau, b, \alpha)$ из условий $x(0, b, \alpha) = b \in U(0_n, \delta)$ и $\alpha < \delta$ при всех $\tau > 0$ следует справедливость неравенства $\|x(\tau, b, \alpha)\| \le \varepsilon$.*

В силу преобразований, проведенных при построении системы (21), справедливо следующее утверждение, которое по способу доказательства аналогично теореме 25 [12].

Лемма 3. *Малое периодическое решение $\bar{v}$ системы* (3) *орбитально α-устойчиво тогда и только тогда, когда решение $x = 0_n$ системы* (21) *α-устойчиво.*

4. Достаточный признак орбитальной α-устойчивости малого периодического решения

Для применения леммы 3 исследуем локальную структуру оператора монодромии системы (21).

При $\alpha = 0$ линейное приближение $\dfrac{dx}{d\tau} = Dx$ системы (21) имеет фундаментальную матрицу $Y(\tau) = \mathrm{diag}(\exp(\tau A_1), E_{l-1})$. Выделим первое однородное нелинейное приближение от фазовой переменной для оператора монодромии системы (21). В силу гладкости функции $\varphi(\tau, x)$ получим разложение $Y \int\limits_0^{\omega_0} Y(-s)\varphi(s, Y(s)b)ds = u(b) + \bar{u}(b)$, в котором $Y = Y(\omega_0)$, $u(\gamma b) = \gamma^k u(b)$ — матрица монодромии системы (21) при $\alpha = 0$, функция $u(b)$ однородна, $u(\gamma b) = \gamma^k u(b)$, функция $\bar{u}(b)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{\gamma\to 0} \gamma^{-k} \|\bar{u}(\gamma b)\| \equiv 0$. При этом правый оператор монодромии системы (21) имеет вид

$$x(\omega_0, b, \alpha) = Yb + u(b) + \tilde{u}(b, a) + \tilde{\tilde{u}}(b, a), \tag{22}$$

где функции $\tilde{u}(b, a)$, $\tilde{\tilde{u}}(b, a)$ удовлетворяют условиям

$$\tilde{u}(b, a) + \tilde{\tilde{u}}(b, a) = Y \int\limits_0^{\omega_0} Y(-s)(\varphi(s, x(s, b, \alpha)) + \varphi_1(s, x(s, b, \alpha)) + \varphi_2(s, x(s, b, \alpha)))ds - u(b),$$

$$\lim_{\gamma\to 0} \gamma^{-k} \|\tilde{u}(\gamma b, \alpha)\| \equiv 0, \quad \lim_{\alpha\to 0} \|\tilde{u}(b, \alpha)\| \equiv 0.$$

По формуле Эйлера для однородной функции построим разложение

$$u(b) = U(b)b, \quad U(b) = \frac{1}{k}\frac{\partial u(b)}{\partial b}.$$

Применим к системе (21) результаты работ [8, 11, 13].

Теорема 2. *Если*
1) справедливо равенство (17);
2) выполняются условия теоремы 1, в которых

$$a_0 = (0, \dots, 0, c^{(n+1)}), \quad c^{(n+1)} \in \mathbb{R}^l, \quad \left\| c^{(n+1)} \right\|_2 = 1;$$

3) для любого λ: $\|\lambda\| = 1$ *и достаточно малого* $\gamma > 0$ *справедлива оценка*

$$\|Y + \gamma U(\lambda)\| \le 1 - \sigma\gamma, \quad \sigma > 0,$$

то в системе (1) *имеет место бифуркация орбитально* α*-устойчивого решения вида* (2) *с периодом* $\omega = (1+\lambda)\omega_0$, $\lambda = \alpha^{k-1}(\lambda_0 + \bar{\lambda}(\alpha))$, $\lim\limits_{\alpha\to 0} \bar{\lambda}(\alpha)) = 0$.

Доказательство. По условиям 1), 2) в системе (1) имеет место бифуркация малого периодического решения вида (2). В силу леммы 3 сведем исследование устойчивости этого решения по определению 3 к локальной оценке нормы оператора монодромии системы (21). С этой целью вначале установим вспомогательные утверждения.

1. Нулевое решение системы (21) α-устойчиво тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, при котором из неравенств $\|b\| < \delta$, $\alpha < \delta$ следует, что значение $x(s\omega_0, b, \alpha)$ определено при всех $s \in \mathbb{N}$ и справедлива оценка $\|x(s\omega_0, b, \alpha)\| < \delta$.

Действительно, необходимость данного утверждения очевидна, если в определении 3 взять $\tau = s\omega$. Установим достаточность. В силу локальной продолжаемости решений системы (21) число δ можно считать таким, что любое решение $x(\tau, x(s\omega_0, b, \alpha), \alpha)$ для каждого $s \in \mathbb{N}$ определено при $\tau \in [0, \omega_0]$, если $\|x(s\omega_0, b, \alpha)\| < \varepsilon$, то есть продолжаемо вправо от момента $s\omega_0$. Значит, в условиях утверждения из пункта 1 любое решение $x(\tau, b, \alpha)$ нелокально продолжаемо вправо. В силу непрерывной зависимости решений системы (21) от начальных значений и параметров можно считать, что $\delta < \varepsilon$ и $\|x(\tau, b, \alpha)\| < \varepsilon$ при любых $\tau \in [0, \omega_0)$, если $\|b\| < \delta$, $\alpha < \delta$. Следовательно, по групповому свойству решений для произвольного $\tau = s\omega_0 + \xi$, $s = \left[\dfrac{\tau}{\omega_0}\right]$, при $\|b\| < \delta$, $\alpha < \delta$ получим оценку $\|x(\tau, b, \alpha)\| = \|x(\xi, x(s\omega_0, b, \alpha), \alpha)\| < 0$. То есть нулевое решение системы (21) устойчиво по определению 3.

2. Если для любого $\delta_1 > 0$ существует такое $\delta_2 > 0$, что при $\|b\| < \delta_1$, $\alpha < \delta_2$ справедлива оценка $\|x(\omega_0, b, \alpha)\| < \|b\|$, то нулевое решение α-устойчиво.

Действительно, произвольно выберем $\varepsilon > 0$. При $\delta_1 = \varepsilon$ подберем значение δ_2. Получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, для которого из неравенств $\|b\| < \delta_1$, $\alpha < \delta_2$ следует, что $\|x(\omega_0, b, \alpha)\| < \varepsilon$. Тогда по индукции устанавливается, что значение $x(s\omega_0, b, \alpha)$ определено при всех $s \in \mathbb{N}$ и справедлива оценка $\|x(s\omega_0, b, \alpha)\| < \varepsilon$. То есть на основе утверждения из пункта 1 нулевое решение устойчиво по определению 3.

3. Далее в доказательстве используем достаточное условие устойчивости из пункта 2.

Равенство (22) запишем в виде

$$x(\omega_0, b, \alpha) = [Y + U(b) + G(\alpha, b) + V(\alpha, b)]b, \tag{23}$$

в котором матрицы $G(\alpha, b)$, $V(\alpha, b)$ удовлетворяют условиям

$$G(\alpha, b)b = \tilde{\tilde{u}}(b, a), \quad V(\alpha, b) = \tilde{u}(b, a), \quad \lim_{\beta\to 0} \beta^{1-k}\|G(\alpha, \beta b)\| \equiv 0, \quad V(0, b) \equiv 0_{nn}.$$

В равенство (23) подставим $b = \beta\lambda$, $\|\lambda\| = 1$. Выберем число $\delta_1 > 0$ так, чтобы при всех β: $\beta < \delta_1$ и α: $\alpha < \delta_1$ выполнялось неравенство $\|G(\alpha, \beta\lambda)\| \le \dfrac{\beta^{k-1}b_2}{4}$. Существует δ_2: $0 < \delta_2 \le \delta_1$, для которого из условия $\alpha < \delta_2$ при всех β: $\dfrac{\delta_1}{2} \le \beta < \delta_1$ верна оценка $\|V(\alpha, \beta\lambda)\| \le \dfrac{\beta^{k-1}b_2}{4}$.

Без ограничения общности $\|Y+U(b)+G(\alpha,b)+V(\alpha,b)\|<2$, если $\alpha<\delta_2$ и $\beta<\dfrac{\delta_1}{2}$, при этом $\|x(\omega_0,b,\alpha)\|\leq 2\|b\|<\delta_1$. Если же $\alpha<\delta_2$ и $\dfrac{\delta_1}{2}<\beta<\delta_1$, то

$$\|x(\omega_0,b,\alpha)\|\leq\left(1-\frac{\beta^{k-1}b_2}{2}\right)\|b\|<\delta_1.$$

Итак, произвольно выбрав $\varepsilon>0$, получим, что $\|x(\omega_0,b,\alpha)\|<\varepsilon$ для всех b: $\|b\|<\delta=\min\{\varepsilon,\delta_1\}$ и $\alpha<\delta_2$. Тогда в силу утверждения из пункта 3 нулевое решение системы (23) устойчиво по определению 3. Итак, по леммам 2 и 3 малое периодическое решение вида (2) системы (1) устойчиво по определению 2. Теорема 2 доказана.

5. Заключение

Итак, для автономной системы вида (1), имеющей при нулевом значении параметра критическую матрицу линейного приближения (17), по свойствам первого нелинейного приближения оператора монодромии установлены условия бифуркации малого периодического решения вида (2), которое обладает свойством орбитальной α-устойчивости по определению 2.

Заметим, что при условии 3) теоремы 2 нулевое решение системы (21) асимптотически устойчиво [14].

Действительно, при $\alpha=0$ в силу леммы 9.2 из монографии [15] задача об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (21) сводится к задаче об асимптотической устойчивости нулевого решения системы в конечных разностях

$$b_{j+1}=[Y+U(b_j)+G(0,b_j)]b_j, \tag{24}$$

Так как $\lim\limits_{\alpha\to 0}\gamma^{1-k}\|G(0,\gamma b)\|=0$, то существует такое $\delta_0>0$, что $\|G(0,b)\|<\frac{1}{2}\sigma\|b\|^{k-1}$ при всех b: $\|b\|<\delta_0$. Тогда из равенства (24) по условию 3) теоремы 2 получим оценку

$$b_{j+1}=[Y+U(b_j)+G(0,b_j)]b_j, \tag{25}$$

Выберем тождественную последовательность функций $V_j(b)\equiv\|b\|$. Для любого члена этой последовательности и для любого малого b по свойствам нормы выполняются условия

$$a_1(\|b\|)=\frac{\|b\|}{2}\leq V_j(b)\leq a_2(\|b\|)=2\|b\|,\quad \left|V_j(b)-V_j(\tilde{b})\right|\leq\|b-\tilde{b}\|.$$

Кроме того, из оценки (25) при всех малых b справедливо неравенство

$$\|b_{j+1}\|-\|b_j\|<-\frac{1}{2}\|b_j\|^k<-a_3\left(\|b_{j+1}\|\right)=-\frac{1}{2}\sigma\|b_{j+1}\|^k.$$

Так как функции $a_1(\cdot)$, $a_2(\cdot)$, $a_3(\cdot)$ — функции класса Хана, то в силу предложения 2 из работы [16] нулевое решение системы (21) асимптотически устойчиво.

То есть в условиях теоремы 2 рассмотрен некритический случай устойчивости по определению 3. При этом для орбитальной α-устойчивости малого периодического решения оказывается достаточно учесть только его направление бифуркации a_0 в фазовом пространстве. В критических случаях орбитальной α-устойчивости для оператора монодромии системы (21) требуется дополнительно использовать свойства нелинейного приближения по аргументу (b,α), учитывая направление бифуркации μ_0 периодического решения в пространстве параметров.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович Б. П. Об одном аналоге теоремы Андронова — Витта // ДАН СССР 1967. Т. 176, №.5. С. 994-996.

2. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985.

3. Красносельский М. А., Кузнецов Н. А., Юмагулов М. Г. Операторный метод анализа устойчивости циклов при бифуркации Хопфа // Автоматика и телемеханика. 1996. № 12. С. 15–24.

4. Дунаева О. В., Шестаков А. А. О понятиях орбитальной устойчивости и фазовой устойчивости движений динамической системы // ДАН СССР. 1997. Т. 335, № 3. С. 33–341.

5. Мамонов С. С., Харламова А. О. Вынужденная синхронизация систем фазовой синхронизации с запаздыванием // Вестник РГРТУ. 2017. № 62. С. 26–35.

6. Мамонов С. С., Харламова А. О., Ионова И. В. Колебательно-вращательные циклы фазовой системы дифференциальных уравнений // Вестник РАЕН. 2018. Т. 18, № 4. С. 51–57.

7. Хапаев М. М. Усреднение в теории устойчивости. М.: Наука, 1986.

8. Абрамов В. В. Устойчивость нулевого решения периодической системы дифференциальных уравнений с малым параметром // Журнал СВМО. 2010. Т. 12, № 4. С. 49–54.

9. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГИТТЛ, 1956.

10. Абрамов В. В. Ненулевое периодическое решение нелинейной системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, № 11. С. 1572.

11. Абрамов В. В. Устойчивость малого периодического решения // Вестник РАЕН. 2013. Т. 13, № 4. С. 3–5.

12. Зубов В. И. Теория колебаний. М.: Высшая школа, 1979.

13. Абрамов В. В. К вопросу об устойчивости решения по параметру // Известия ТулГУ. Сер. Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. 2005. Вып. 1. С. 3–8.

14. Абрамов В. В. Ветвление периодического решения неавтономной системы с малым параметром // Вестник РАЕН. 2015. Т. 15, № 3. С. 3–7.

15. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траектория дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.

16. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.

REFERENCES

1. Demidovich, B. P. 1967, “On an analogue of the Andronov — Witt theorem“, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 176, no. 5, pp. 994-996.

2. Hassard, B. D., Kazarinoff, N. D. & Wan, U.-H. 2002, “Theory and applications of hopf bifurcation“. Mir, Moscow.

3. Krasnoselskii, M. A., Kuznetsov, N. A. & Yumagulov, M. G. 1996, "An operational method of analysis of stability of cycles in Hopf bifurcations", *Automatika i telemekhanika*, no. 12, pp. 15-24.

4. Dunaeva, O. V., Shestakov, I. E. 1997, "On the concepts of orbital stability and phase stability of motions of a dynamical system", *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 335, no. 3, pp. 33-341.

5. Mamonov, S. S., Kharlamova, A. 0. 2017, "Forced synchronization of phase systems automotive equipment with landing", *Vestnik RGRTU*, no. 62, pp. 26-35.

6. Mamonov, S. S., Kharlamova, A. 0. & Ionova, I. V. 2018, "Vibrational-revolution cycles phase system of differential equations", *Vestnik RAEN*, vol. 18, no. 4, pp. 51-57.

7. Khapaev, M. M. 1986, "Averaging in stability theory". Nauka, Moscow.

8. Abramov, V. V. 2010, "Stability of zero solution of periodic system of differential equations with small parameter", *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, vol. 12, no. 4, pp. 49-54.

9. Malkin, I. G. 1956, "Some problems of the theory of nonlinear oscillations". GITTL, Moscow.

10. Abramov, V. V. 1997, "Nonzero periodic solution of nonlinear system of differential equations", *Differ. Uravn*, vol. 33, no. 11, pp. 1572.

11. Abramov, V. V. 2013, "Stability of small periodic solution", *Vestnik RAEN*, vol. 13, no. 4, pp. 3-5.

12. Zubov, V. I. 1979, "Theory of oscillations". Vysshaya Shkola, Moscow.

13. Abramov, V. V. 2005, "On the stability of the solution in the parameter", *Izvestiya TulGU. Ser. Differentialnyiye Uravneniya i Prikladnyie Zadachi*, iss. 1, pp. 3-8.

14. Abramov, V. V. 2015, "Branching of the periodic solution of a non-autonomous system with a small parameter", *Vestnik RAEN*, vol. 15, no. 3, pp. 3-7.

15. Krasnoselskii, M. A. 1966, "Shift operator on trajectories of differential equations". Nauka, Moscow.

16. Halanay, A., Wexler, D. 1971, "Qualitative theory of impulse systems". Mir, Moscow.

Получено 8.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.