ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 3.

УДК 511 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-27-42

Александр Васильевич Малышев и его исследования в теории чисел

У. М. Пачев, Е. В. Подсыпанин

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, профессор, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова (г. Нальчик).
e-mail: urusbi@rambler.ru
Подсыпанин Евгений Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).
e-mail: podsypanin@mail.ru

Аннотация

Статья посвящена жизни и научно-педагогической деятельности известного математика, доктора физико-математических наук, профессора Александра Васильевича Малышева (1928–1993) в связи с 90-летием со дня его рождения. В ней сначала приводятся краткие биографические сведения из жизни А. В. Малышева. Основная часть нашей работы посвящена достижениям А. В. Малышева в теории чисел и его научно-педагогической и редакционно-издательской деятельности.

Ключевые слова: Александр Васильевич Малышев, теория чисел, квадратичная форма, дискретный эргодический метод, геометрия чисел.

Библиография: 29 названий.

Для цитирования:
У. М. Пачев, Е. В. Подсыпанин. Александр Васильевич Малышев и его исследования в теории чисел // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 27–42.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 511 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-27-42

Alexander Vasilievich Malyshev and his research in number theory

U. M. Pachev, E. V. Podsypanin

Pachev Urusbi Mukhamedovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Kabardino-Balkar state University named after H. M. Berbekov (Nalchik).
e-mail: urusbi@rambler.ru
Podsypanin Yevgeny Vladimirovich — candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg).
e-mail: podsypanin@mail.ru

Abstract

The article is devoted to the life and scientific and pedagogical activity of the famous mathematician, doctor of physical and mathematical sciences, professor Alexander Vasilevich Malyshev (1928–1993) in connection with the 90th anniversary of his birth. It first provides brief biographical information from his life. The main part of our work is devoted to the achievements of A. V. Malyshev in number theory and scientific-pedagogical and editorial-publishing activities.

Keywords: Alexander Vasilevich Malyshev, number theory, quadratic forms, discrete ergodic method, geometry of numbers.

Bibliography: 29 titles.

For citation:
U. M. Pachev, E. V. Podsypanin, 2019, "Alexander Vasilievich Malyshev and his research in number theory" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 27–42.

А. В. Малышев 17.11.1928–10.05.1993

Наша работа посвящена научно-педагогической деятельности Алексанра Васильевича Малышева — известного специалиста по теории чисел в связи с 90-летию со для его рождения. А. В. Малышев родился 17 ноября 1928 г. в Ленинграде. Его отец, Василий Георгиевич, был инженером связи, работал доцентом в Академии связи и в Ленинградском электротехническом институте им. Бонч-Бруевича, что и предопределило в некотором смысле выбор будущей профессии Александра. В 1946 г. он поступил на математико-механический факультет Ленинградского государственного университета, был прилежным, целеустремленным студентом и в 1951 г. с отличием его окончил. Еще в студенческие годы, несмотря на тяжелое после-военное время А. В. Малышев начал вести математические исследования. Его дипломная работа «К теореме Минковского—Главка [1] о лучевом теле» по геометрии чисел, опубликованная в журнале «Успехи математических наук» в 1952 г., была выполнена им под руководством выдающегося математика, профессора Б. А. Венкова, которого Александр Васильевич считал своим первым научным руководителем. В этой работе А. В. Малышев приводит новое доказательство теоремы Минковского—Главки о лучевом теле, справедливое без предположения прежнего условия ограниченности лучевых тел, что свидетельствует о глубоком владении им еще в студенческие годы геометрией чисел. Хотя у Александра Васильевича и не было совместных публикаций с Б. А. Венковым, но тем не менее он активно пропагандировал его научные идеи по арифметике кватернионов на спецсеминарах по теории чисел, проводимых тогда в ЛГУ (и ещё свидетельство тому — издание А. В. Малышевым совместно с Б. Ф. Скубенко «Избранных трудов» Б. А. Венкова). Сразу после окончания ЛГУ Александр Васильевич был принят в штат Ленинградского отделения Математического института АН СССР (ныне ПОМИ РАН), в котором проработал всю свою жизнь.

В 1954 г. А. В. Малышев защитил кандидатскую диссертацию «О целых точках на эллипсоидах», а в 1961-м — докторскую на тему «О представлении целых чисел положительными квадратичными формами». Научным руководителем Александра Васильевича по кандидатской диссертации был выдающийся всемирно известный математик Юрий Владимирович Линник. Позднее Александр Васильевич весьма плодотворно сотрудничал с академиком Ю. В. Линником, которого считал своим вторым учителем.

Активные исследования Александра Васильевича в области теории чисел, о которых речь пойдет далее, удачно сочетались с его многогранной педагогической и научно-организационной деятельностью.

В течение многих лет он читал лекции, вел спецкурсы и спецсеминары по теории чисел на математико-механическом факультете ЛГУ как для студентов, так и для аспирантов. Свои спецкурсы Александр Васильевич сопровождал постановками интересных нерешённых задач, причём они как правило образовывали единый цикл взаимосвязанных между собой задач, а в комментариях к ним он указывал возможные подходы к их решению.

Помимо этого А. В. Малышев руководил в течение многих лет научным семинаром по теории чисел в ЛОМИ (ныне ПОМИ), на котором прошли апробацию многие кандидатские и докторские диссертации по теории чисел. На этом семинаре с докладами выступали такие известные математики, как Делоне Б. Н. (Москва), Чудаков Н. Г. (Саратов), Кузнецов Н. В. (Хабаровск), Берник В. И. (Минск), Голубева Е. П. (Ленинград), Подсыпанин Е. В. (Ленинград), Чирский В. Г. (Москва), Петерс М. (Германия) и многие другие специалисты по теории чисел. Заседания семинара проходили при активном участии Александра Васильевича в обсуждениях докладываемых результатов и он щедро давал рекомендации по проведению дальнейших исследований. Все это безусловно, способствовало дальнейшему развитию теории чисел не только в самом Ленинграде, но и в других городах бывшего Советского Союза.

У Александра Васильевича было более 20 аспирантов, почти все из них в установленные сроки защитили диссертации. При этом на начальном этапе руководства он внимательно изучал научные интересы своих учеников, в результате чего выбор наиболее актуальных и перспективных направлений исследования оказывался удачным.

Самое серьезное внимание Александр Васильевич уделял и руководству дипломными работами студентов, уже видя в них начинающих исследователей. По его мнению, самые хорошие студенты это те, которые заранее обращаются по вопросу дипломной работы, а чтобы это происходило, надо суметь заинтересовать их нерешенными вопросами и он советовал учитывать это своим коллегам по педагогической работе. В результате дипломные работы его учеников всегда имели очень высокий уровень и в большинстве случаев являлись основой для печатной работы или для будущей кандидатской диссертации.

Много внимания уделял Александр Васильевич и научно-организационной и редакционно-издательской работе. Как авторитетный ученый А. В. Малышев являлся членом ученых советов ЛОМИ, ЛГУ, специализированных советов по защите кандидатских и докторских диссертаций и охотно выступал оппонентом множества таких диссертаций. Он принимал активное участие в организации и проведении IV Всесоюзного математического съезда в 1961 г. и Международного конгресса математиков в Москве в 1966 г. Большое значение придавал Александр Васильевич и редакционной работе. Он был одним из инициаторов издания «Записок научных семинаров ЛОМИ» и редактором первого тома этой серии, вышедшего в 1966 г. А. В. Малышев редактировал издание и перевод более чем 30 книг по актуальным проблемам теории чисел, в том числе избранных трудов своих учителей Б. А. Венкова и Ю. В. Линника. Ко всему этому следует еще добавить, что Александр Васильевич являлся непревзойденным мастером по составлению биографических очерков, посвящённых выдающимся математикам.

Александр Васильевич Малышев, как это видно из его публикаций, интересовался многими вопросами теории чисел. В совершенстве владея проблематикой всей современной теории чисел, в собственно научной деятельности А. В. Малышев уделил основное внимание теории квадратичных форм и геометрии чисел. Мы будем рассматривать его исследования, относящиеся к указанным разделам теории чисел.

В теории квадратичных форм А. В. Малышева привлекала прежде всего задача о целочисленных представлениях целых чисел квадратичными формами, т. е. исследование решений диофантовых уравнений вида

$$Q(x_1,\ \ldots,\ x_n) = m,$$

где Q — целочисленная квадратичная форма от n переменных, m — целое число.

Для полноты изложения обратимся к истокам теория квадратичных форм. Арифметика квадратичных форм берёт своё начало с утверждения французского математика 17 века П. Ферма о том, что каждое простое число вида $4k+1$ представимо суммой двух квадратов целых чисел. Оно было доказано Эйлером в 1749 году и об этом он сообщает Гольдбаху. В дальнейшем были даже получены формулы для оснований этих квадратов.

Следующий шаг в теории квадратичных форм был сделан Лагранжем, доказавшим, что каждое натуральное число представимо суммой четырёх квадратов целых чисел; он же ввёл важное понятие приведённой бинарной квадратичной формы. Дальнейшее развитие теории квадратичных форм связано с Гауссом, который ввёл некоторые новые важные понятия.

Особое место занимают в теории квадратичных форм и формулы Дирихле для числа классов целочисленных бинарных квадратичных форм заданного определителя.

В арифметической теории квадратичных форм большое внимание уделяется также и тематике точных формул для числа представлений квадратичными формами специальных видов. Это направление, связанное с тематикой точных формул для числа представлений квадратичными формами, раньше было представлено в Тбилисской школе теории чисел (Вальфиш А. З., Ломадзе Г. А.) и в Узбекистане (Коган Л. А. и его ученики).

Вернемся теперь к той общей задаче, отмеченной выше, и которой А. В. Малышев посвятил бóльшую часть своих исследований. Основной интерес к этой задаче представляет проблема существования представлений целого числа m квадратичной формой Q и их распределение по классам вычетов по заданному модулю и по областям на соответствующей поверхности второго порядка при $m \to \infty$.

В такой постановке в основном можно рассматривать только проблему отыскания асимптотической, а не точной формулы для числа рассматриваемых представлений формой Q. Сложность этой задачи сильно зависит как от числа переменных n, так и от того является ли квадратичная форма Q положительной или неопределённой.

Так, для $n \geqslant 5$ асимптотические формулы при $m \to \infty$ для числа представлений удавалось получить круговым методом Харди—Литтлвуда.

Существенно улучшив технику применения этих методов к рассматриваемой задаче, А. В. Малышеву удалось впервые получить асимптотическую формулу с остаточным членом для числа представлений $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ целого числа m положительной целочисленной квадратичной формой f от $n \geqslant 4$ переменных и сравнимых с $(b_1, \ldots, b_n)$ по данному модулю g. Полученный результат А. В. Малышев приводит в гл. III своей монографии [2]. Если обозначим через $R_{g;\, b_1, \ldots, b_n}(f,\ m)$ количество представлений $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ числа m положительной квадратичной формой f и сравнимых с $(b_1, \ldots, b_n)$ по модулю g, то асимптотическая формула А. В. Малышева имеет вид

$$R_{g;\, b_1, \ldots, b_n}(f,\ m) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{d^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} m^{\frac{n}{2}-1} H_{g;\, b_1, \ldots, b_n}(f,\ m) + O\Big(d^{\frac{n}{4}+\frac{3}{2}} \cdot g^{\frac{3}{2}n+2} \cdot m^{\frac{n}{4}-\frac{1}{4}+\varepsilon}\Big),$$

где Γ — гамма функция; $H_{g;\,b_1,\ldots,b_n}(f,\ m)$ — особый ряд рассматриваемой задачи; d — определитель квадратичной формы f.

$$H_{g;\ b_1,\ \ldots,\ b_n}(f,\ m) = \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \sum_{h \pmod q}{}' q^{-n} S_{g;\ b_1,\ \ldots,\ b_n}(h\,f;\ g)\, e^{-2\pi i \frac{mh}{q}} \right\},$$

— особый ряд данной задачи,

$$S_{g;\ b_1,\ \ldots,\ b_n}(h\,f;\ g) = \frac{1}{g^n} \sum_{x_1,\ \ldots,\ x_n=0}^{q=1} e^{2\pi i \frac{h\,f(gx_1+b_1,\ \ldots,\ gx_n+b_n)}{q}}$$

— неоднородная кратная гауссова сумма по модулю q.

Для особого ряда Харди—Литтлвуда справедливы оценки

$$m^{-\varepsilon} \ll H_{g;\ b_1,\ \ldots,\ b_n}(f,\ m) \ll m^{\varepsilon}.$$

Этот асимптотический результат при $g = 1$, как один из важных, приводится в обзоре [3]. Кроме того, он также используется известным американским математиком П. Сарнаком в гл. 3 монографии [4]. Ещё один подход к изучению распределения целых точек на поверхности второго порядка развивал А. В. Малышев [5] через рассмотрение понятия взвешенного числа целых точек на таких поверхностях. Исследования в этом направлении в дальнейшем проводились Б. З. Мороз [6] и Р. А. Доховым совместно У. М. Пачевым [7].

Но больше всего внимание А. В. Малышева привлекал оставшийся наиболее сложный случай $n = 3$, т. е. задача о представлении целых чисел тернарными квадратичными формами. При этом отметим, что бо́льшая часть работ А. В. Малышева посвящена именно этому случаю, к которому неприменимы были существовавшие тогда аналитические методы. Но здесь следует еще отметить, что основополагающие исследования в этом направлении были проведены выдающимся математиком Ю. В. Линником — известным своими работами по аналитической теории чисел, теории вероятностей и математической статистики. Именно под руководством Ю. В. Линника была подготовлена кандидатская диссертация А. В. Малышева «О целых точках на эллипсоидах», посвященная применению эргодических концепций к вопросу к вопросу распределения целых точек по областям на эллипсойдах и защищённая в 1954 г.

Ю. В. Linнику [8] принадлежит оригинальный аналитико-алгебраический метод в теории тернарных квадратичных форм, использующий некоммутативную арифметику кватернионов и матриц, названный А. В. Малышевым при его дальнейшем развитии дискретным эргодическим методом (далее ДЭМ).

При построении своего метода Ю. В. Линник исходил из замечательных исследований В. А. Венкова по теории поворотов целых гамильтоновых кватернионов с нулевой скалярной частью [9].

Кратко поясним смысл теории поворотов В. А. Венкова кватернионов без скалярной части.

Пусть m — целое число с условиями: $m > 3$, $m \equiv 1;\ 2 \pmod 4$ или $m \equiv 3 \pmod 8$. Уравнение сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = m$$

можно записать в целых кватернионах $L = x\,i + y\,j + z\,k$ нормы m, $x,\ y,\ z \in \mathbb{Z}$, т. е. $\mathrm{N}(L) = m$, и значит, уравнение сферы можно заменить уравнением

$$L^2 = -m.$$

в кватернионах L без скалярной части.

Примитивным решениям уравнения сферы отвечают примитивные векторы L. Распределение таких точек на сфере можно изучать, пользуясь поворотами сферы, переводящими целую примитивную точку в такую же точку на сфере. Б. А. Венков изучал связь между различными примитивными решениями кватернионного уравнения, сопоставляя паре L и L' таких решений совокупность целых кватернионов ρ с условием

$$\rho\, L\, \rho^{-1} = L'.$$

Для примитивных векторов L и L' нормы m найдутся целые примитивные кватернионы A, C и целое число b, что выполняются равенства

$$b + L = A\,C, \quad b + L' = C\,A,$$

и

$$C\,L\,C^{-1} = L', \quad \overline{A}\,L\,\overline{A}^{-1} = L'.$$

Упорядоченную пару $(L,\ L')$ принято называть поворотом от L к L'.

Повороту $(L,\ L')$ сопоставляется положительная бинарная квадратичная форма дискриминанта $-m$ следующим равенством

$$(a,\ b,\ c) = a\,x^2 + 2\,b\,x\,y + c\,y^2 = \mathrm{N}\left(\overline{A}\,x + C\,y\right),$$

так что

$$a = \mathrm{N}\,(A), \quad c = \mathrm{N}\,(C), \quad b = \mathrm{Sc}\,(A\,C); \quad b^2 - a\,c = -m.$$

(в доказательство равенства $b^2 - a\,c = -m$ используется, что $L^2 = -m$).

При этом принято говорить, что форма $(a,\ b,\ c)$ управляет поворотом $(L,\ L')$. Совокупность таких форм при заданной паре $(L,\ L')$ образует класс бинарных квадратичных форм дискриминанта $-m$.

С помощью своей теории поворотов кватернионов Б. А. Венкову удалось дать новое доказательство глубокой теоремы Гаусса о числе представление целых чисел суммой трёх квадратов. Из записанных выше равенств,относящихся к теории поворотов кватернионов, получаем, что если L — целый вектор, то L' также есть вектор одной и той же нормы. Если в этих равенствах $AC \neq CA$, то $L \neq L'$, т. е. из решения L получается еще другое решение L' рассматриваемого уравнения $L^2 = -m$ (в этом и состоит смысл теории поворотов кватернионов, построенной Б. А. Венковым).

Ю. В. Линник использовал теорию поворотов иначе, строя с помощью неё потоки целых точек на сфере. Фиксируя простое число $q \geqslant 3$, он рассматривает числа $m > 0$ с условием символ Лежандра $\left(\frac{-m}{q}\right) = 1$. Итерируя процесс поворотов, дающий новые точки на сфере, Ю. В. Линник строит потоки целых точек заданной длины s на сфере $x^2 + y^2 + y^2 = m$ заданного радиуса $\sqrt{m}$. Построение потоков осуществляется поворотами вида $L' = Q^{-1}\,L\,Q$, где $\mathrm{N}\,(Q) = q$. При этом учитывается сравнение $l^2 + m \equiv 0 \pmod{q^s}$ и аналог основной теоремы арифметики для кольца целых кватернионов. Для любого вектора L нормы m в силу указанного сравнения можно записать равенство $l + L = B \cdot V$, где $B = Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_s$, $\mathrm{N}\,(Q_i) = q$; $Q_1,\ \ldots,\ Q_s,\ B,\ V$ — целые кватернионы. Тогда с помощью этих соотношений можно построить цепочку целых примитивных векторов нормы m:

$$L_1 \to L^{(1)} \to \ldots \to L^{(s-1)}$$

длины s, причём s выбирается порядка $\log m$ или $\gg\ \log m$, где $L^{(k)} = Q_k^{-1}\,L^{k-1}\,Q_k$, $k = 1,\ \ldots,\ s$.

Для удобства записи введём обратимую операцию T, действующую на множестве всех примитивных векторов согласно равенствам

$$L' = T\,L, \quad T\,L = Q^{-1}\,L\,Q.$$

Тогда получаем поток примитивных векторов нормы m:

$$L_1 \to T\,L_1 \to T^2\,L_1 \to \ldots \to T^{s-1}\,L_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_n \to T\,L_n \to T^2\,L_n \to \ldots \to T^{s-1}\,L_n,$$

где $n = r(m)$ есть число всех примитивных векторов нормы m.

С учётом этого потока вопросы асимптотического распределения целых примитивных векторов L, по классам вычетов по заданному модулю и по областям на поверхности сферы можно заменить вопросами эргодичности так построенного потока. Это значит, что все цепочки данного потока можно разделить на две категории (такая трактовка ДЭМ принадлежит А. В. Малышеву):

а) «плохие» цепочки, которых мало и их количество оценивается как $o(r(m))$;

б) «хорошие» цепочки, обладающие тем свойством, что доля элементов L_i цепочки, принадлежащих данному классу вычетов и данной сферической площадке асимптотически равна их доле при асимптотически равномерном распределении векторов L сферы.

При этом вопросы эргодичности потока изучаются с помощью операторов $B = Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_s$, которые создают этот поток, а задача об операторах B сводится к вопросу о представлении целых чисел кватернарными квадратичными формами, исследуемому круговым методом. Точки, лежащие на хороших цепочках данного потока дают изучаемое количество целых точек на сфере.

Доказательство эргодичности так построенного потока проводится по следующей схеме:

1° Предполагая «неэргодичность» построенного потока $\chi_s(m,\ q,\ l)$ из всех $r(m)$ цепочек этого потока выделяем $> \alpha\, r(m)$ $(0 < \alpha < 1)$ таких цепочек, что в соответствующих им «операторах» $B = Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_s$ число появлений среди $Q_1,\ \ldots,\ Q_s$ данного примитивного кватерниона Q нормы q «ненормально мало» (в рассматриваемой задаче: $< (1-\beta)\frac{s}{\sigma_0(q)}$, где $\sigma_0(q)$ — число примитивных примарных кватернионов нормы q); здесь $\beta > 0$ не зависит от m.

2° Тогда сравнительно просто с помощью теории цепей Маркова получается, что число различных кватернионов B в выделенных цепочках

$$\ll (q^s)^{1-\gamma}, \tag{1}$$

где $\gamma > 0$ не зависит от m.

3° Но доказывается, что при

$$s = \left[\frac{\log m}{2\,\log q}\right] \tag{2}$$

и $\alpha > 0$ в любых $> \alpha\, r(m)$ кватернионных равенствах $l + L = B\,V$ число различных кватернионов B будет

$$\gg m^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \tag{3}$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Это утверждение и его различные модификации называют ключевой леммой ДЭМ. Последние две оценки при $m \to \infty$ противоречат друг другу, что и доказывает эргодичность потока $\chi_s(m,\ q,\ l)$.

4° В предположении (2) оценки (1) и (3) противоречат друг другу при $m \to \infty$, что и доказывает эргодичность потока.

5° Из эргодичности потока $\chi_s(m,\ q,\ l)$ выводится соответствующая равномерная распределённость по модулю g (и геометрически по поверхности сферы).

Следующим этапом применения ДЭМ к исходной рассматриваемой задаче является вывод из эргодического поведения целых точек свойства их перемешивания.

Пусть A — множество примитивных точек заданной области $\Omega \in$ Сф$_3(m)$. Пусть M_0 — какое-либо множество проекций точек из A на единичную сферу Сф$_3(1)$. Обозначим через $T^l\,M_0$ множество, куда перетекают эти точки после l-кратного преобразования T; $\#M_0$ — число точек в M_0; $l = 0,\ 1,\ \ldots,\ s \geqslant c_1 \ln m$ и $\#M_0 > \varepsilon_0 H_0(m)$; $\#\left\{T^l\,M_0 \cap \Lambda_0\right\}$ — число точек множества $T^l\,M_0$, лежащих в множестве $\Lambda_0 \in$ Сф$_3(1)$. Тогда для всех индексов l, за возможным исключением $s \cdot o(1)$ таких индексов имеем

$$\#\left\{T^l\,M_0 \cap \Lambda_0\right\} = \frac{6}{\pi}\,\omega(\Lambda_0)\cdot|M_0|\cdot\{1+\varkappa(q,\ \Lambda_0,\ \varepsilon_0,\ m)\}\,.$$

(это соотношение и есть теорема о перемешивании целых точек по областям на сфере радиуса $\sqrt{m}$).

Если в теореме перемешивания взять $M_0 = A$ (множество всех примитивных точек из Ω), то для всех l имеем $T^l\,A = A$, т. е. множество A инвариантно относительно преобразования T^l, то для числа примитивных точек $H(\Lambda_m)$ в замкнутой области Λ_m сферы Сф$_3(m)$ асимптотическую при $m \to \infty$ формулу

$$H(\Lambda_m) = \frac{\omega(\Lambda_0)}{4\,\pi} H_0(m)\left\{1+\varkappa\Big(\Lambda_m^{(0)},\ q,\ m\Big)\right\},$$

где $\Lambda_m^{(0)}$ — проекция области Λ_m сферы Сф$_3(m)$ на единичную сферу Сф$_3(1)$, $H_0(m)$ — полное число примитивных точек на сфере Сф$_3(m)$.

После этих отступлений, связанных с ДЭМ, вернёмся к исследованиям А. В. Малышева по применениям ДЭМ к тернарным квадратичным формам. Эти исследования были начаты А. В. Малышевым статьях [10, 11] в которых даны некоторые обобщения результата Ю. В. Линника и уточнены оценки, истинные по порядку для величины $t(f,\ m)$, равной числу представлений числа m формой f. А. В. Малышев весьма активно продолжал развивать эргодические подходы Ю. В. Линника к задаче представления чисел тернарными квадратичными формами. Так в статье [12] он впервые получил асимптотическую формулу для величины $t(f,\ m)$, где формы f инвариантов $[\Omega,\ 1]$ принадлежат роду инвариантов $G_{[\Omega,\ 1]}$ с характерами $\left(\frac{-f}{p}\right) = 1$ для всех простых делителей p числа Ω, до этого имелись только двусторонние оценки, истинные по порядку. Для полноты изложения приведем асимптотический результат А. В. Малышева, относящийся к вопросу представления чисел тернаными квадратичными формами.

Теорема (А. В. Малышев). Пусть $f(x,\ y,\ z)$ — положительная тернарная форма нечётных инвариантов $[\Omega,\ 1]$, принадлежащих роду G с характерами: $\left(\frac{f}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ для всех простых p/r.

Пусть m — целое число, простое с r. Обозначим через $t(f,\ m)$ количество примитивных представлений числа m формой f. Тогда

$$t(f,\ m) \sim \begin{cases} \dfrac{24}{r\Big(1+\frac{1}{p_1}\Big)\cdot\ldots\cdot r\Big(1+\frac{1}{p_k}\Big)}\,h(-m), & \text{если } m \equiv 1,\ 2 \pmod 4,\\[2ex] \dfrac{16}{r\Big(1+\frac{1}{p_1}\Big)\cdot\ldots\cdot r\Big(1+\frac{1}{p_k}\Big)}\,h(-m), & \text{если } m \equiv 3 \pmod 4,\end{cases}$$

$t(f,\ m) = 0$, если $m \equiv 0 \pmod 4; \equiv 7 \pmod 8$, где $h(-m)$ — количество классов положительных собственно примитивных бинарных квадратичных форм определителя m; $p_1,\ \ldots,\ p_k$ — все простые делители числа r.

В доказательстве используется основная теорема арифметики кватернионов в сочетании с оригинальными рассуждениями А. В. Малышева, связанными с матрицами размера $t(m) \times s$, составленными из сомножителей $R_{\alpha,\ s}$ разложения $l + L_\alpha = R_{\alpha 1} \cdots R_{\alpha s}$ $(\alpha = 1,\ \ldots\ t(m))$.

Результат этой работы Ю. В. Линник называл асимптотическим законом А. В. Малышева и применял его в некоторых своих работах.

Цикл работ, опубликованных А. В. Малышевым в период с 1952 г. по 1954 г., составил его кандидатскую диссертацию «О целых точках на эллипсоидах», в защищённую в 1954 г.

Для дальнейшего применения ДЭМ к вопросу о представлении чисел положительными тернарными квадратичными формами более общего вида А. В. Малышеву пришлось существенно развить теорию делимости в порядках обобщенных кватернионов. Полученные при этом точные по порядку оценки и асимптотические формулы для числа представлений и тернарной квадратичной формой нечётных взаимно простых инвариантов $[\Omega,\ \Delta]$ вместе с результатом для положительных квадратичных форм от $n \geqslant 4$ переменных составили основу докторской диссертации А. В. Малышева «О представлении целых чисел положительными квадратичными формами», защищённой в 1961 г. в Ленинградском университете.

Основные результаты А. В. Малышева по арифметической теории квадратичных форм, полученные им до 1962 г. изложены в его замечательной монографии [2], имеющей более 30 цитирований. В ней кроме квадратичных форм содержатся также и другие полезные для специалистов разделы теории чисел: суммы Гаусса, суммы Клостермана, арифметика эрмитионов (обобщённых кватернионов), играющие вспомогательную роль при применениях ДЭМ. Следует также отметить, что А. В. Малышеву впервые удалось дать общее правило составления таблицы умножения базисных единиц алгебры обобщённых кватернионов соответствующей произвольной тернарной квадратичной форме.

Таблицу умножения базисных кватернионных единиц алгебры обобщённых кватернионов U_f соответствующей тернарной квадратичной форме f А. В. Малышев строил следующим образом (мы дадим её в более упрощённой форме). Пусть

$$f = f(x_1,\ x_2,\ x_3) = \sum_{i,\ j=1}^{3} \alpha_{ij}\, x_i\, x_j, \quad \alpha_{ij} \text{ — тернарная квадратичная форма,}$$

и

$$\overline{f} = \overline{f}(x_1,\ x_2,\ x_3) = \sum_{i,\ j=1}^{3} \overline{\alpha}_{ij}\, x_i\, x_j$$

— форма, алгебраически взаимная форме f. Тогда умножения базисных кватернионных единиц $i_1,\ i_1,\ i_3$ задаётся следующими соотношениями

$$i_1^2 = -\overline{\alpha}_{11}, \quad i_2^2 = -\overline{\alpha}_{22}, \quad i_3^2 = -\overline{\alpha}_{33},$$

$$i_1\, i_2 = -\overline{\alpha}_{12} + \alpha_{31}\, i_1 + \alpha_{32}\, i_2 + \alpha_{33}\, i_3,$$

$$i_2\, i_3 = -\overline{\alpha}_{23} + \alpha_{11}\, i_1 + \alpha_{12}\, i_2 + \alpha_{13}\, i_3,$$

$$i_3\, i_1 = -\overline{\alpha}_{31} + \alpha_{21}\, i_1 + \alpha_{22}\, i_2 + \alpha_{23}\, i_3,$$

при этом,

$$i_s\, i_t = \overline{i_t\, i_s}, \quad s \neq t.$$

Итогом совместных исследований Ю. В. Линника и А. В. Малышева по приложениям арифметики кватернионов явилась большая обзорная статья по ДЭМ [13], состоящая из четырёх глав, из которых гл. I и III написаны А. В. Малышевым.

В процессе работы над обзором А. В. Малышеву удалось внести в ДЭМ два существенных усовершенствования.

Во-первых, ключевая лемма ДЭМ доведена до неулучшаемой оценки снизу, т. е. число различных кватернионов B в равенствах $l + L = BV$ будет $\gg m^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, что уже позволяло получить асимптотическую формулу для числа представлений числа m тернарной квадратичной формой.

Во-вторых, им было замечено, что при рассмотрении задачи о представлении чисел m «удобными» тернарными квадратичными формами и суммой квадратов из данного класса вычетов можно обойтись без специального изучения интерпретации представлений $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ кватернионным равенством $l+L = QU$, а связать число $r(f,\ m)$ примитивных представлений чисел m формой f с числом $r(m;\ g,\ b_1,\ b_2,\ b_3)$ примитивных представлений числа m суммой трёх квадратов, принадлежащих данному классу вычетов $(b_1,\ b_2,\ b_3)\ (\mathrm{mod}\ g)$, а последнюю величину — с $r(m,\ Q)$-числом примитивных векторов L нормы m с условием $Q \setminus (l + L)$ при подходяще подобранном кватернионе Q.

Эти усовершенствования, связанные с ДЭМ, А. В. Малышев включил в гл. 6 своей монографии [2].

С уверенностью можно утверждать, что Александр Васильевич внёс большой вклад в развитие дискретного эргодического метода: им впервые построены алгебра и арифметика эрмитионов (обобщённых кватернионов), исследованы положительные квадратичные формы, принадлежащие многоклассным родам и разработана ясная методика получения асимптотических формул. Отметим также, что немецкий специалист по квадратичным формам М. Петерс именует ДЭМ методом Линника—Малышева.

После написания монографии по представлениям чисел положительными квадратичными формами А. В. Малышев переключается и на неопределенные квадратичные формы. Но следует отметить, что первые исследования по применению ДЭМ к неопределённым тернарным формам были проведены Ю. В. Линником [8] в случае $m > 0$ и его учеником Б. Ф. Скубенко [14] в случае $m < 0$, рассмотревшими вопрос о представлении чисел m простейшей неопределённой формой $xz - y^2$, которые доказали, что при $|m| \to \infty$ целые точки равномерно распределены по областям на поверхности гиперболоида $xz - y^2 = m$ в смысле гиперболической метрики Лобачевского. В случае $m < 0$ (однополостного гиперболоида) возникли трудности из наличия периодов неопределённых бинарных квадратичных форм, которые были преодолены Б. Ф. Скубенко своей теоремой о циклах [14].

В дальнейшем Александр Васильевич развивал ДЭМ в основном со своими учениками, при этом он внимательно следил за самостоятельно выполняемыми ими работами для публикации. В этом случае он просил учеников держать его в курсе проводимых исследований, помогая им в подготовке статей и публикаций. Наиболее продвинутые результаты для положительных тернарных квадратичных форм были получены А. В. Малышевым совместно со своим учеником Ю. Г. Тетериным [15], который позднее весьма успешно самостоятельно развивал ДЭМ, построив законченную теорию поворотов целых векторов на эллипсоидах и гиперболоидах. Кроме того, им получено обобщение на алгебраические числовые поля результатов Ю. В. Линника, А. В. Малышева и М. Петерса о представлении чисел положительными тернарными квадратичными формами. Из всех учеников А. В. Малышева он по уровню проводимых исследований был наиболее близок к защите докторской диссертации, но по неизвестным причинам он не занимался этим вопросом. Исследование же с помощью ДЭМ представлений целых чисел неопределенными тернарными квадратичными формами существенно различается в зависимости от того является ли соответствующая поверхность однополостным или двуполостным гиперболоидом. В случае двуполостного гиперболоида основные результаты относящиеся к теории поворотов вектор-матриц были получены Александром Васильевичем совместно с У. М. Пачевым [16]; позднее У. М. Пачев [17] продолжил эти исследования самостоятельно, решив задачу, поставленную А. В. Малышевым для случая изотропных гиперболоидов, включающего в себя как частные случаи всех ранее рассмотренных видов двуполостных и однополостных гиперболоидов.

А. В. Малышев много внимания уделял и отдельным проблемам, непосредственно связанными с ДЭМ. Одной из главных проблем в применениях ДЭМ является получение остаточных членов в асимптотических формулах для числа представлений целых чисел тернарными квадратичными формами, т. е. для числа целых точек на поверхностях второго порядка. Действуя ДЭМ можно определить, что остаточный член имеет порядок, равный главному члену, деленному на $(\log m)^{\alpha}$, где α — положительная константа, причём одним из недостатков этого метода в применениях к тернарным квадратичным формам являлось использование вспомогательного простого числа q, для которого $\left(\frac{-m}{q}\right) = 1$, привнесённого самим методом при построении потоков целых точек в эргодических теоремах. В связи с этим Александр Васильевич провёл важные исследования, устанавливающие связь рассматриваемого вопроса с гипотезами о нулях L-рядов Дирихле, изложенные в статьях [18, 19]. Исследования А. В. Малышева в этом направлении позволяют устранить указанный недостаток и получить улучшенные формулировки асимптотических результатов с остаточными членами для представления чисел положительными тернарными квадратичными формами.

Наряду с этим А. В. Малышев в ряде работ совершенствовал доказательство ключевой леммы ДЭМ в разных её вариантах. Так в совместной статье с Б. М. Широковым [20] было дано новое доказательство ключевой леммы в случае гиперболоидов, обходя при этом использование теоремы Б. Ф. Скубенко о циклах.

Отдельное исследование, обобщающее результаты Б. Ф. Скубенко в случае однополостного гиперболоида, проведено А. В. Малышевым со своим аспирантом Нгуен Нгор Гоем [21]. В развитии ДЭМ принимали участие и другие ученики А. В. Малышева. В частности, совместно с Александром Васильевичем и самостоятельные публикации в этом направлении имела Н. Н. Белова [22], а Е. В. Подсыпанин [23] получил ряд новых результатов о распределении целых точек на поверхностях второго порядка, необходимых для применения ДЭМ в случае неопределенных тернарных форм. Ввиду того, что аппарат арифметики обобщенных кватернионов является вспомогательным средством для ДЭМ, то Александр Васильевич уделял много внимания и развитию теории делимости в порядках обобщенных кватернионов. Исследования в этой области Александр Васильевич вел главным образом со своим учеником М. Н. Кубенским, который получил ряд интересных результатов по теории поворотов в простых центральных алгебрах, при этом их совместная работа была опубликована в [24].

Напомним, что свой первый шаг в математическую науку А. В. Малышев сделал публикацией статьи по геометрии чисел и, не возвращаясь долгое время к этому разделу теории чисел, им в дальнейшем публиковались статьи по тернарным квадратичным формам. Видимо это было связано с тем, что в то время было мало книг по геометрии чисел и как отдельное направление она сформировалась значительно позднее остальных разделов теории чисел. Геометрия чисел берет свое начало с основополагающей монографии Г. Минковского, подготовленной им в 1896 г., и в основном она была посвящена приложениям его теоремы о выпуклом теле к некоторым вопросам теории чисел.

Положение несколько изменилось в лучшую сторону с выходом в 1965 г. книги Дж. Касселса «Введение в геометрию чисел» под редакцией А. В. Малышева. Уже в том же году А. В. Малышев обращает внимание своего ученика Кухарева В. Г. на одну задачу из геометрии чисел по отысканию критического определителя выпуклой двумерной области $D_p\colon |x|^p + |y|^p \leqslant 1$, где $p \geqslant 0$ — вещественное число (гипотеза Минковского о критическом определителе).

Поясним это понятие следующим образом. Пусть в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы множество M и решетка Λ определителя $d(\Lambda)$. Решетка Λ называется допустимой для множества M, если множество M не содержит точек из Λ, отличных от начала координат. Тогда, точная нижняя грань

$$\Delta(M) = \inf_{\Lambda\,-\,M\text{-допустимым}} d(\Lambda)$$

множества определителей $d(\Lambda)$ всех M-допустимых решеток Λ называется критическим определителем множества M.

Сформулируем теперь гипотезу Минковского о критическом определителе в следующем аналитическом виде.

Пусть τ_p — вещественный корень уравнения

$$\tau_p^p + 1 = 2\ (1-\tau_p)^p\,, \quad 0 < \tau_p < 1.$$

Тогда ищется абсолютный минимум функции

$$\Delta_p(\tau,\ \sigma) = (\tau+\sigma)\ (1+\tau^p)^{-\frac{1}{p}}\ (1+\sigma^p)^{-\frac{1}{p}}$$

при условии, что

$$\left[(1+\tau^p)^{-\frac{1}{p}}\ (1+\sigma^p)^{-\frac{1}{p}}\right]^p + \left[\tau\ (1+\sigma^p)^{-\frac{1}{p}} + \sigma\ (1+\tau^p)^{-\frac{1}{p}}\right]^p = 1,$$

при этом $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_p$, $1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_p$, где

$$\sigma_p = (2^p - 1)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Тогда, согласно гипотезе Минковского

$$\Delta(D_p) = \min\left(\Delta_p^{(0)},\ \Delta_p^{(1)}\right),$$

(гипотеза Минковского о критическом определителе), где

$$\Delta_p^{(0)} = \Delta_p(0,\ \sigma_p), \quad \Delta_p^{(1)} = \Delta_p(\tau_p,\ 1), \qquad p \geqslant 1.$$

Справедливость гипотезы Минковского была доказана Кухаревым В. Г. [25] для отдельных изолированных значения $p \in \{1,3;\ 1,4;\ 1,5;\ 1,6;\ 1,7;\ 2,2;\ 2,3;\ 3;\ 4;\ 5\}$. В дальнейшем А. В. Малышев, для полного доказательства гипотезы Минковского, разработал вычислительную методику для оценок частных производных $\frac{\partial\Delta(\sigma,\ p)}{\partial\sigma}$ и $\frac{\partial^2\Delta(\sigma,\ p)}{\partial\sigma^2}$ с применением ЭВМ, позволяющую всё более сужать область значений параметра p, для которых гипотеза оставалась недоказанной. В результате, в серии совместных исследований А. В. Малышева с А. В. Воронецким [26] (случай $p > 6$); Гришмановской К. И., Пачевым У. М., Фидаровой А. Ч. [27] (случай $5 < p < 6$) и наконец с Н. М. Глазуновым и А. С. Головановым [28] полностью доказана гипотеза Минковского, чем и гордился А. В. Малышев.

А. В. Малышев развивал и другие подходы в аналитической теории квадратичных форм и в первую очередь — теорию модулярных форм. Его интересовала задача об оценке коэффициентов Фурье модулярных форм в связи с их приложением к представлению чисел тернарными квадратичными формами. Так в его статье [29] дается уточнение и упрощение доказательства результата Салье по оценке коэффициентов Фурье параболических модулярных форм. Из учеников А. В. Малышева развитием теории модулярных форм и ее применением к квадратичным формам занимался в первую очередь А. Б. Воронецкий, вокруг которого в Ижевске сложилась целая научная группа, в которую входили В. В. Головизин и А. Мерзляков, получивших под руководством А. В. Малышева ряд новых результатов для гильбертовых модулярных форм. Не оставил без внимания А. В. Малышев и тематику «точных» формул для числа представлении чисел квадратичными формами, которой также занимались многие его ученики; в частности, интересные результаты были получены его ученицей Е. А. Кашиной.

Александр Васильевич был одним из ведущих научных сотрудников Ленинградского отделения математического института им. В. А. Стеклова. Научный семинар по теории чисел в ЛОМИ под его руководством пользовался большим успехом среди его участников и способствовал дальнейшему развитию теории чисел не только у нас, но и за рубежом. Считаем, что его исследования представляют большой интерес для специалистов по арифметической теории квадратичных форм и геометрии чисел.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малышев А. В. К теореме Минковского—Главка о лучевом теле // УМН, 1952. Т. 7, № 2. С. 168–171.
2. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Труды МИАН, Т. 65, 1962. С. 1–212.
3. Сарнак П. Модулярные формы и их приложения. М. 1998. 133 с.
4. Манин Ю. И., Панчишкин А. В. Введение в теорию чисел. Итоги науки и техники. Сер. Фундаментальные направления. Т. 49, М. 1990, 348 с.
5. Малышев А. В. О взвешенном числе целых точек, лежащих на поверхности второго порядка // Зап. Научн. семин. ЛОМИ, 1966. Т. 1. С. 6–83.
6. Мороз Б. З. Распределение целых точек на многомерных гиперболоидах и конусах // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1966. Т. 1. С. 84–113.
7. Дохов Р. А., Пачев У. М. О взвешенном числе целых точек на некоторых многомерных гиперболоидах // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 3 (55). С. 220–246.
8. Линник Ю. В. Эргодические свойства алгебраических полей. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та. 1967. 208 с.
9. Венков Б. А. Избранные труды. Ленинград: Наука. 1981. 448 с.
10. Малышев А. В. О представлении больших чисел положительными тернарными квадратичными формами // Докл. АН СССР. 1952, т. 87, № 2, С. 175–178.
11. Малышев А. В. О представлении чисел положительными тернарными квадратичными формами // Докл. АН СССР, 1953, т. 89, С. 405–406.
12. Малышев А. В. Асимптотический закон для представления чисел некоторыми положительными тернарными квадратичными формами // Докл. АН СССР, т. 93, № 5, 1953. С. 771–774.
13. Линник Ю. В., Малышев А. В. Приложения арифметики кватернионов к теории тернарных квадратичных форм и к разложению чисел на кубы // УМН, 1953, Т. 8, вып. 5, С. 3–71.
14. Скубенко Б. Ф. Асимптотическое распределение целых точек на однополостном гиперболоиде и эргодические теоремы // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1962, т. 26, № 5. С. 721–752.
15. Тетерин Ю. Г. Асимптотическая формула для числа представлений вполне положительными тернарными квадратичными формами. // Изв. АН СССР. 1985. Сер. матем. Т. 49. № 2. С. 393–426.

16. Малышев А. В., Пачев У. М. Об арифметике матриц второго порядка // Зап.научн. семин. ЛОМИ. 1980. Т. 93. С. 41–86.

17. Пачев У. М. Представление целых чисел изотропными тернарными квадратичными формами // Изв. РАН. 2006. Сер. матем. Т. 70. № 3. С. 167–184.

18. Малышев А. В. О связи теории распределения нулей L-рядов с арифметикой тернарных квадратичных форм // Докл. АН СССР, т. 122, № 3, 1958. С. 343–345.

19. Малышев А. В. К теории тернарных квадратичных форм. О связи с гипотезой Римана // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат. мех, астрон. 1960, № 7, вып. 2. С. 70–84.

20. Малышев А. В., Широков Б. М. Новое доказательство ключевой леммы дискретного эргодического метода для вектор-матриц второго порядка // Вестн. Ленингр. Ун-та. Сер. мат., мех., астрон., вып. 2. 1991. С. 34–40.

21. Малышев А. В., Нгуен Нгор Гой. О распределении целых точек на некоторых однополостных гиперболоидах // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1983. Т. 121. С. 83–93.

22. Белова Н. Н., Малышев А. В. Эргодические свойства целых точек на эллипсоидах рода $G_{[\Omega,\ 1]}$ // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1981. Т. 106. С. 17–51.

23. Подсыпанин Е. В. Распределение целых точек на детерминантной поверхности // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1980, Т. 93. С. 30–40.

24. Кубенский М. Н., Малышев А. В. Теория поворотов в простых центральных алгебрах // Acta arithm/ 53, № 5. 1990. С. 477–498.

25. Кухарев В. Г. О критическом определителе области $|x|^p + |y|^p < 1$ // Докл. АН СССР. Т. 169. № 6. С. 1273–1275.

26. Малышев А. В., Воронецкий А.В. Доказательство гипотезы Минковского о критическом определителе области $|x|^p+|y|^p < 1$ для $p \geqslant 6$ // Acta arithmetica. vol. 27. 1975. С. 447–458.

27. Гришмановская К. И., Малышев А. В., Пачев У. М., Фидарова А. Ч. Доказательство гипотезы Минковского о критическом определителе области $|x|^p+|y|^p < 1$ в случае $5 < p < 6$ // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1977. Т. 67. С. 95–107.

28. Глазунов Н. М., Голованов А. С., Малышев А. В. Доказательство гипотезы Минковского о критическом определителе области $|x|^p + |y|^p < 1$ // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1986. Т. 151. С. 40–53.

29. Малышев А. В. О коэффициентах Фурье модулярных форм // Зап. научн. семинаров ЛОМИ. Т. 1. 1966. С. 140–163.

REFERENCES

1. Malyshev A. V. 1952, « To the Minkowski- Hlawka theorem on a ray body» , Russian Math. Surveus : 7. № 2, pp. 168–171.

2. Malyshev A. V. 1962, « On representation number by positiv quadratic forms», Tr. Math. Inst. Steklova, vol. 65, pp. 1–212.

3. Sarnak P. 1998, «Some applications of modular forms / M. 133 p.

4. Manin Yu. I., Panchishkin A. V. 1990, «Introduction to number theory». Itogi nauki I techniki. Vol. 49. M. 348 p.

5. Malyshev A. V. 1966, «On the weighted number of integer points on a quadric», Zap. Nauchn. Sem. LOMI. Vol. 1, pp. 6–83 (Russian).

6. Moroz B. Z. 1966. «Distribution of integer points of multidimensional hyperboloids and cones». Zap. Nauchn. Sem. LOMI, vol. 1, pp. 84–113.

7. Dokhov R. A., Pachev U. M. 2015. «On the weighted number of integer points on some multidimensional hyperboloids». Chebyshevskii Sb., vol. 16, no 3 (55), pp. 220–226 (Russian).

8. Linnik Yu. V. 1967. «Ergodic properties of algebraic fields / Leningrad university. 208 p.

9. Venkov B. A. 1981. «Isbrannie Trudy. Leningrad: Nauka. 448 p.

10. Malyshev A. V. 1952. "On the representation large number by positive ternary quadratic forms". Dokl. AN SSSR. Vol. 87, № 2. pp. 175–178.

11. Malyshev A. V. 1953. "On the representation number by positive ternary quadratic forms". Dokl. AN SSSR. Vol. 89. pp. 405–406.

12. Malyshev A. V. 1953. "Asimptotic law for representation by positive ternary quadratic forms". Dokl. AN SSSR. Vol. 93, № 5. pp. 771–774.

13. Linnik Yu. V., Malyshev A. V. 1953. "An application of the arithmetic of quaternions to the theory of ternary quadratic forms and to the decomposition of numbers into cubes". Uspehi math. Nauk. Vol. 8. pp. 3–71.

14. Skubenko B. F. 1962, "Asymptotic distribution of integer points on a one-sheeted hyperboloid and ergodic theorem". Vol. 26, № 5. pp. 721–752.

15. Teterin Yu. G. 1985. "Asymptotic formula for the number of representations by completely positive ternary quadratic forms". Izv. AN SSSR. Ser. Math. vol. 49, № 2. pp. 393–426.

16. Malyshev A. V., Pachev U. M. 1980, "On the arithmetic of matrices of order 2". Zap. nauchn. Seminarov LOMI. Vol. 93. pp. 41–86 (Russian).

17. Pachev U. M. 2006, "Representation of integer numbers by isotropic ternary quadratic forms". Izv. RAN. Ser. math. vol. 70. № . pp. 167–184.

18. Malyshev A. V. 1958, "On the connection of the theory of the distribution of zeros of L – series with the arithmetic of ternary quadratic forms". Dokl. AN SSSR, vol. 122. № 3. pp. 343–345.

19. Malyshev A. V. 1960, "On the theory of ternary quadratic forms. On the connection with the Riemann hypothesis". Vestn. Leningr. University. № 7. pp. 70–84.

20. Malyshev A. V., Shirokov B. M. New proof of the key lemma for second–order vector matrices // Vestn. Leningra. University. Series math. mech. astron., issue 2. 1991. pp. 34–40.

21. Malyshev A. V., Nguên ngoc Khôi. 1983,"On the distribution of integer points on some one-sheeted hyperboloids". Zap. Nauchn. Seminarov LOMI. vol. 121. pp. 83–93.

22. Belova N. N., Malyshev A. V. 1981, "Ergodic properties of integer points on the ellipsoids of genus $G_{[\Omega,\ 1]}$". Zap. Nauchn. Seminarov LOMI. vol. 106. pp. 17–51.

23. Podsypanin E. V. 1980, "Distribution of integer points on the determinant surface". Zap. Nauchn. Seminarov LOMI. vol. 93. pp. 30–40.

24. Kubensky M. N., Malyshev A. V. 1990, "The theory of rotations in simple central algebras". Acta arithm. 53. no. 5, pp. 477–498.

25. Kuharev V. G. On critical determinant of region $|x|^p + |y|^p < 1$ // Dokl. AN SSSR. vol. 169. no. 6. pp. 1273–1275.

26. Malyshev A. V., Voronetsky A. V. Proof of Minkowski's conjuncture concerning the critical determinant of the region $|x|^p + |y|^p < 1$ for $p \geqslant 6$ // Acta arithmetica. vol. 27. 1975. pp. 447–458.

27. Grishmanovskaya K. I., Malyshev A. V., Pachev U. M., Fidarova A. Ch. 1977. Proof of the Minkowski conjecture om the critical determinant of domain $|x|^p + |y|^p < 1$ in the case $5 < p < 6$ // Zap. Nauchn. Seminarov LOMI. Vol. 67. pp. 95–107.

28. Glasunov N. M., Golovanov A. S., Malyshev A. V. 1986. Proof of the Minkowski conjuncture of the critical determinant of a domain $|x|^p + |y|^p < 1$ // Zap. Nauchn. Seminarov LOMI. Vol. 151. pp. 40–53.

29. Malyshev A. V. 1966. On the Fourier coefficients of modular forms // Zap. Nauchn. Seminarov LOMI. Vol. 1. pp. 140–163.

Получено 15.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.

А. В. Малышев вместе с женой Клавдией Ивановной и Анной Вальфиш в Карелии в 1973г.