

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 1 (2013)

УДК 511.3

К РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ В
МНОГОЧЛЕНАХ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ С
ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

И. И. Ильясов (г. Актобе, Казахстан)

Аннотация

В работе доказывается: ТЕОРЕМА. При каждом натуральном $A > A'$ существуют более $\frac{A}{5 \ln A}$ многочленов второй степени с целыми коэффициентами, старшие коэффициенты которых равны двум, каждый из которых содержит более $\frac{A}{5 \ln^{1+\varepsilon} A}$ простых. ($\varepsilon > 0$ — постоянная).

Ключевые слова: простые числа, распределение простых чисел в значениях многочленов.

TO THE DISTRIBUTION OF PRIME NUMBERS
IN THE POLYNOMIALS OF SECOND DEGREE
WITH INTEGER COEFFICIENTS

I. I. Illyssov (Aktobe, Kazakhstan)

Abstract

In this paper, we prove: THEOREM. Each volume $A > A'$ there are more $\frac{A}{5 \ln A}$ of polynomials of second degree with integer coefficients, senior coefficients are equal to two, each of which contains more $\frac{A}{5 \ln^{1+\varepsilon} A}$ simple. ($\varepsilon > 0$ — constant)

Keywords: Prime numbers, the distribution of Prime numbers in the values of polynomials.

Пусть $a \geq 1, \in \mathbb{N}$. Целые положительные решения (x, y) уравнения

$$x + y = a + 1$$

запишем в виде конечной последовательности

$$(1, a), (2, a - 1), \dots, (a - 1, 2), (a, 1).$$

$$a = 1, 2, \dots,$$
$$(1, 1), (1, 2), (2, 1), \dots, (1, a), (2, a-1), \dots, (a-1, 2), (a, 1), (1, a+1), \dots \quad (1)$$

ЛЕММА 1. Значение многочлена

$$f(x, y) = \frac{1}{2} ((x + y)^2 - x - 3y + 2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $f(1, 1) = 1$. При $y = 1$ за точкой $(x, 1)$ последовательности (1) следует точки $(1, x + 1)$ и

$$f(1, x + 1) - f(x, 1) = 1,$$

а при $y \geq 2$ за точкой (x, y) в (1) следует точка $(x + 1, y - 1)$ и

$$f(x+1, y-1) - f(x, y) = 1.$$

Если пронумеруем точки последовательности (1)

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n),$$

то при $n \geq 2$ имеем, что

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) & = & 1 \\ f(x_3, y_3) - f(x_2, y_2) & = & 1 \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1}) & = & 1 \end{array} \right.$$

Складывая эти равенства с учетом $f(x_1, y_1) = 1$, получаем, что

$$f(x_n, y_n) = n.$$

Лемма доказана. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. $f(x, y)$ для целых положительных точек (x, y) пробегает весь натуральный ряд без повторения.

Обозначим через $C(A)$ число многочленов в (2), каждый из которых содержит более $\frac{A}{\ln^{1+\varepsilon} A}$ простых, $\varepsilon > 0$ — постоянная. Тогда, общее число простых в этих многочленах $\leq AC(A)$. А общее число простых в многочленах, каждый из которых содержит $\leq \frac{A}{\ln^{1+\varepsilon} A}$ простых, не превосходит $A \frac{A}{\ln^{1+\varepsilon} A}$. Следовательно

$$AC(A) + \frac{A^2}{\ln^{1+\varepsilon} A} \geq \pi(f(A, 1)), \quad (3)$$

а по неравенству Чебышева (см. [1] стр. 27):

$$\pi(f(A, 1)) = \pi\left(\frac{1}{2}(A^2 + A)\right) \geq 0,9 \frac{A^2 + A}{2 \ln \left[\frac{1}{2}(A^2 + A)\right]} \geq 0,9 \frac{A^2}{4 \ln A} \quad (4)$$

при $A > A_0$.

Следовательно, с учетом (3) и (2),

$$AC(A) + \frac{A^2}{\ln^{1+\varepsilon} A} \geq 0,9 \frac{A^2}{4 \ln A}$$

Или

$$C(A) + \frac{A}{\ln^{1+\varepsilon} A} \geq 0,9 \frac{A}{4 \ln A}.$$

Отсюда

$$C(A) \geq 0,9 \frac{A^2}{4 \ln A} - \frac{A}{\ln^{1+\varepsilon} A} \geq \frac{A}{5 \ln A} \quad \text{при } A > A' > A_0.$$

Пусть $f(x_0, y)$ один из $C(A)$ многочленов в (2), который содержит более $\frac{A}{\ln^{1+\varepsilon} A}$ простых, где x_0 — фиксированное, $1 \leq x_0 \leq A$, а y меняется в промежутке $1 \leq y \leq A + 1 - x_0$.

Рассмотрим значения $f(x_0, y)$ для четных и нечетных y . Полагая $y = 2y_1 - r$, $r = 0$ или 1 , имеем

$$\begin{aligned} f(x_0, 2y_1 - 1) &= \frac{1}{2} ((x_0 + 2y_1 - r)^2 - x_0 - 6y_1 + 3r + 2) = \\ &= \frac{1}{2} ((2y_1)^2 + 4(x_0 - r)y_1 + (x_0 - r)^2 - x_0 - 6y_1 + 3r + 2) = \\ &= 2y_1^2 + (2x_0 - 2r - 3)y_1 + \frac{1}{2} ((x_0 - r)^2 - x_0 + 3r + 2). \end{aligned}$$

При $r = 0$

$$f(x_0, 2y_1) = 2y_1^2 + (2x_0 - 3)y_1 + \frac{x_0^2 - x_0}{2} + 1.$$

При $r = 1$

$$\begin{aligned} f(x_0, 2y_1 - 1) &= 2y_1^2 + (2x_0 - 5)y_1 + \frac{x_0^2 - 2x_0 + 1 - x_0 + 5}{2} = \\ &= 2y_1^2 + (2x_0 - 5)y_1 + \frac{x_0^2 - 3x_0}{2} + 3. \end{aligned}$$

Следовательно, один из этих многочленов от y_1 содержит более $\frac{A}{2 \ln^{1+\varepsilon} A}$ простых, и таких многочленов более $\frac{A}{5 \ln A}$. Теорема доказана. $\square$

Отметим, что аналогичные теоремы могут быть доказаны для многочленов степени $n \geq 3$ с целыми коэффициентами.

Дополнительная информация. В [2] (стр. 20) В. Серпинский отмечает что "можно доказать, что уравнение $(x + y - 2)(x + y - 1) + 2y = 2k$ имеет для каждого натурального k одно и только одно решение в натуральных числах x и y ".

В [3] (стр. 33.) В. Серпинский отмечает:

"Однако мы знаем такие многочлены, которые для многих последовательных натуральных чисел x принимают значения, являющиеся простыми числами. Примером такого многочлена может служить многочлен Эйлера $x^2 + x + 41$, который для $x = 0, 1, 2, \dots, 39$ дает разные простые числа".

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.
2. Серпинский В. О решении уравнений в целых числах. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961.
3. Серпинский В. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1963.

Актобинский государственный университет им. К. Жубанова, Актобе, Казахстан

Поступило 9.03.2013