ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 539.4, 519.6

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-523-537

О численной оценке эффективных характеристик периодических ячеистых структур с использованием балочных и оболочечных конечных элементов с помощью CAE Fidesys¹

В. А. Левин, К. М. Зингерман, М. Я. Яковлев, Е. О. Курденкова, Д. В. Немтинова

Левин Владимир Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной механики механико-математического факультета, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Зингерман Константин Моисеевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования и вычислительной математики, Тверской государственный университет (г. Тверь).

e-mail: Zingerman.KM@tversu.ru

Яковлев Максим Яковлевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики механико-математического факультета, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: m.ya.yakovlev@yandex.ru

Курденкова Екатерина Олеговна — студентка механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносов (г. Москва).

e-mail: kkurdenkova@yandex.ru

Немтинова Диана Владимировна — студентка механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносов (г. Москва).

e-mail: dnemtinova@gmail.com

Аннотация

Развитие аддитивных технологий (3D-печати) сделало возможным изготовление деталей и изделий регулярной пористой и ячеистой структуры (с целью облегчения конструкции). При этом характерный размер ячейки намного меньше масштаба целого изделия. Численные прочностные и смежные с ними расчёты подобных конструкций требуют предварительной оценки эффективных характеристик такой ячеистой структуры. В данной статье представлена методика численной оценки эффективных упругих характеристик регулярных ячеистых структур, основанная на численном решении краевых задач теории упругости на ячейке периодичности. К ячейке последовательно прикладываются различные периодические граничные условия в виде связей, наложенных на перемещения противоположных граней ячейки. Для каждого вида граничных условий решается краевая задача теории упругости, полученное в результате решения которой поле напряжений осредняется по объёму. Эффективные свойства ячеистого материала оцениваются в виде обобщённого закона Гука.

¹Исследования для данной работы были проведены в рамках Федеральной программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в ООО "Фидесис" – соисполнителе работ в рамках Соглашения о предоставлении субсидии № 14.577.21.0271 (идентификатор проекта RFMEFI57717X0271).

В работе рассматриваются композиционные материалы на основе жёсткого решётчатого каркаса, заполненного более мягким материалом. Расчёты проводятся методом конечных элементов с помощью отечественной САЕ-системы «Фидесис». При этом в ряде расчётов для моделирования решётчатого каркаса используются конечные элементы балочного типа. В некоторых расчётах, помимо каркаса и матрицы, учитывается наличие тонкого слоя связующего между ними. Этот слой моделируется при помощи конечных элементов оболочечного типа.

Приводятся графики сравнения результатов расчётов композиционных материалов с решётчатым каркасом с моделированием каркаса балочными элементами и результатов аналогичных расчётов, в которых каркас моделируется трёхмерными конечными элементами. Также приводятся графики сравнения результатов расчётов, в которых слой связующего моделируется оболочечными элементами, с результатами аналогичных расчётов, в которых связующее моделируется трёхмерными элементами. Графики показывают, что при достаточно тонких элементах каркаса (либо при достаточно тонком слое связующего) результаты получаются довольно близкими, что подтверждает применимость балочных и оболочечных элементов для численного решения таких задач.

Ключевые слова: аддитивные технологии, эффективные характеристики, механика деформируемого твёрдого тела, пористые и ячеистые структуры, CAE Fidesys.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

В. А. Левин, К. М. Зингерман, М. Я. Яковлев, Е. О. Курденкова, Д. В. Немтинова. О численной оценке эффективных характеристик периодических ячеистых структур с использованием балочных и оболочечных конечных элементов с помощью CAE Fidesys // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2, С. 523–537.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 539.4, 519.6

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-523-537

Numerical Estimation of Effective Properties of Periodic Cellular Structures using Beam and Shell Finite Elements with CAE Fidesys²

V. A. Levin, K. M. Zingerman, M. Ya. Yakovlev, E. O. Kurdenkova, D. V. Nemtinova

Levin Vladimir Anatolyevich — Doctor of physical and mathematical sciences, professor, Professor of the department of computational mechanics of the faculty of mechanics and mathematics of Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Zingerman Konstantin Moiseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of chair of mathematical modeling and computational mathematics, Tver State University (Tver).

e-mail: Zingerman.KM@tversu.ru

²Research for this work was carried out within the framework of the Federal program "Research and development in priority areas of development of the scientific and technological complex of Russia for 2014-2020" with the financial support of the Ministry of education and science of the Russian Federation in Fidesys LLC - co-executor of the works under the agreement on the grant number 14.577.21.0271 (project ID RFMEFI57717X0271).

Yakovlev Maksim Yakovlevich — candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics of the Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: m.ya.yakovlev@yandex.ru

Kurdenkova Ekaterina Olegovna — student of the Faculty of Mechanics and Mathematics of Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: kkurdenkova@yandex.ru

Nemtinova Diana Vladimirovna — student of the Faculty of Mechanics and Mathematics of Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: dnemtinova@gmail.com

Abstract

The development of additive technologies (3D printing) made it possible to manufacture parts and products of a regular porous and cellular structure (in order to reduce the weight of the structure). In this case, the characteristic cell size is much smaller than the scale of the whole product. Numerical strength and related calculations of such structures require a preliminary estimation of the effective properties of such a cellular structure. In this article, a method for the numerical estimation of the effective elastic properties of regular cellular structures is presented, which is based on the numerical solution of boundary value problems of the theory of elasticity on a periodicity cell. Periodic boundary conditions in the form of restraints on the displacements of opposite edges of the cell are successively applied to the cell. The boundary value problem of the theory of elasticity is solved for each type of boundary conditions, and the resulting stress field is averaged over the volume. The effective properties of the cellular material are estimated as a generalized Hooke's law.

Composite materials based on a rigid lattice skeleton filled with softer material are considered in the paper. The calculations are carried out using the finite element method with the domestic Fidesys CAE system. Beam finite elements are used in some calculations for the modeling of a lattice skeleton. In some other calculations, a thin layer of a binder between the skeleton and the matrix is taken into account. This layer is modeled using shell finite elements.

Graphs of comparing the results of calculations of composite materials with a lattice skeleton modeled by beam elements and the results of similar calculations in which the skeleton is modeled by three-dimensional finite elements are given in the article. In addition, graphs of comparing the results of calculations in which the binder layer is modeled by shell elements and the results of similar calculations in which the binder is modeled by three-dimensional elements are given. The graphs show that with sufficiently thin framework elements (or with a sufficiently thin layer of the binder), the results are quite close. It confirms the applicability of beam and shell elements for the numerical solution of such problems.

Keywords: additive manufacturing, effective properties, solid mechanics, porous and cellular structures, CAE Fidesys.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

V. A. Levin, K. M. Zingerman, M. Ya. Yakovlev, E. O. Kurdenkova, D. V. Nemtinova, 2019, "Numerical Estimation of Effective Properties of Periodic Cellular Structures using Beam and Shell Finite Elements with CAE Fidesys", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 523–537.

1. Введение

Изготовление изделий, материал которых имеет периодическую ячеистую (пористую) структуру, стало возможным с возникновением и развитием аддитивных технологий (3D-печати). Пример такой структуры показан на рисунке 1. Учитывая, что размер ячейки может

быть порядка миллиметра, а масштаб изделия – десятки сантиметров, очевидно, что изготовить подобную структуру при помощи традиционных методов производства очень сложно и нерентабельно.

В то же время не представляет особой сложности печать изделия периодической ячеистой структуры на 3D-принтере. Такой решётчатый каркас может быть напечатан, к примеру, из металлопорошка при помощи технологии селективного лазерного спекания (SLS). Далее металлический каркас может сам по себе стать частью какого-либо изделия. Также объём, занимаемый каркасом, может быть заполнен другим, более мягким материалом – то есть получится композиционный материал, состоящий из жёсткого металлического каркаса и более мягкой матрицы. Для лучшего соединения матрицы с каркасом может быть использовано связующее (клей). В этом случае необходимо рассматривать композит, состоящий уже из трёх компонент: каркас, матрица и связующее.

Рисунок 1. Пример периодической ячеистой структуры

Независимо от сценария использования периодической решётчатой ячеистой структуры, во всех случаях (один каркас; каркас и матрица; каркас, матрица и связующее) является актуальной задача оценки эффективных механических характеристик такого материала. В процессе разработки и проектирования деталей и изделий решётчатой структуры, как правило, возникает необходимость расчёта их на прочность. При этом прямое численное моделирование геометрии каждой ячейки (размера порядка миллиметра) на масштабе изделия (сантиметры, десятки сантиметров или даже метры) нецелесообразно и потребует большого количества вычислительных ресурсов. Вместо этого возможно моделировать ячеистую структуру сплошным однородным материалом с некоторыми усреднёнными механическими свойствами, который «в среднем» при нагружении ведёт себя примерно так же, как исходная решётчатая модель.

Сразу возникает вопрос: какими должны быть эти свойства (при известной геометрии ячейки и свойствах её материала).

Подобный подход (замена неоднородной структуры сплошным однородным материалом, обладающим средними свойствами) применим ко многим гетерогенным материалам. В данной работе используется метод численной оценки средних (эффективных) свойств модельного сплошного однородного материала, подробно описанный в статьях [1, 3, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16] и основанный на численном решении краевых задач теории упругости на представительном объеме исходного гетерогенного материала.

2. Методика численной оценки эффективных упругих характеристик периодических ячеистых структур

Строго говоря, численное моделирование на представительном объеме актуально, когда гетерогенный материал имеет нерегулярную структуру. В этом случае выбирается именно представительный объем – т.е. достаточно большой объем, чтобы по результатам решения на нём серии задач теории упругости можно было судить о свойствах материала в целом. Для периодических ячеистых структур численные расчёты проводятся на ячейке периодичности материала.

Рассмотрим ячейку периодичности решётчатого материала и аналогичный объем, заполненный сплошным однородным материалом. Этот сплошной однородный материал по определению назовём **эффективным материалом**, если средние напряжения в нём и в исходном неоднородном материале будут равны при одинаковых перемещениях граней. Свойства такого материала по определению назовём **эффективными (осреднёнными) свойствами**.

Пользуясь данным определением, опишем методику численной оценки эффективных упругих характеристик материала периодической ячеистой структуры.

Для ячейки периодичности V_0 в форме прямоугольного параллелепипеда, грани которого параллельны координатным плоскостям, будем решать определённое число краевых задач теории упругости [5]:

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad (1)$$

с *периодическими* граничными условиями [1, 11, 14, 16] в виде связей, наложенных на перемещения противоположных точек границы

$$\begin{aligned} u_i^1 - u_i^{-1} &= -2A(\psi_{1i} - \delta_{1i}) \\ u_i^2 - u_i^{-2} &= -2B(\psi_{2i} - \delta_{2i}) \\ u_i^3 - u_i^{-3} &= -2C(\psi_{3i} - \delta_{3i}) \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь σ – тензор напряжений, ∇ – оператор градиента, Ψ^e – эффективный аффинор деформаций, ψ_{ji} – его компоненты, u – вектор перемещения точки.

В периодических условиях [1, 11, 14, 16]:

- 1) пара (1; -1) – противоположные друг другу узлы на гранях ячейки периодичности, перпендикулярных оси X ;
- 2) пара (2; -2) – противоположные друг другу узлы на гранях ячейки периодичности, перпендикулярных оси Y ;
- 3) пара (3; -3) – противоположные друг другу узлы на гранях ячейки периодичности, перпендикулярных оси Z .

Для ячейки периодичности мы решаем шесть краевых задач теории упругости. Разные задачи отличаются видом приложенных граничных условий (т.е. типом эффективного аффинора деформаций и эффективного тензора деформаций на представительном объеме). В

результате решения каждой краевой задачи упругости мы вычисляем распределение тензора напряжений σ на ячейке периодичности. Тензор σ осредняем по объёму с помощью формулы [13, 15]

$$\sigma^e = \frac{1}{V} \int_V \sigma dV \quad (3)$$

И получаем эффективный (средний) тензор напряжений σ^e на ячейке периодичности для каждой решённой задачи [11].

Из известного эффективного аффинора деформаций, заданного в (2), вычисляем эффективный тензор деформаций E^e по формуле [13, 15]

$$E^e = \frac{1}{2}(\Psi^e \cdot \Psi^{e*} - I) \quad (4)$$

где $*$ – знак транспонирования.

На практике удобнее задавать не аффиноры деформаций, а тензор деформаций. Поскольку симметричный тензор деформаций содержит шесть независимых компонент, а несимметричный аффиноры девять компонент, для определённости аффиноры полагаем верхнетреугольными. В этом случае формула (4) расписывается покомпонентно в виде:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} \\ 0 & \psi_{22} & \psi_{23} \\ 0 & 0 & \psi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{11} & 0 & 0 \\ \psi_{12} & \psi_{22} & 0 \\ \psi_{13} & \psi_{23} & \psi_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \quad (5)$$

Формулы для компонент аффинора в явном виде (с учётом малости деформаций) получаются следующие:

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= 1 + \varepsilon_{11} \\ \psi_{22} &= 1 + \varepsilon_{22} \\ \psi_{33} &= 1 + \varepsilon_{33} \\ \psi_{12} &= 2\varepsilon_{12} \\ \psi_{13} &= 2\varepsilon_{13} \\ \psi_{23} &= 2\varepsilon_{23} \end{aligned} \quad (6)$$

К ячейке периодичности прикладываются деформации следующих типов [7, 8]:

- 1) $\varepsilon_{11} = q$ – растяжение или сжатие вдоль оси X ;
- 2) $\varepsilon_{22} = q$ – растяжение или сжатие вдоль оси Y ;
- 3) $\varepsilon_{33} = q$ – растяжение или сжатие вдоль оси Z ;
- 4) $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = q$ – сдвиг в плоскости XY ;
- 5) $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = q$ – сдвиг в плоскости XZ ;
- 6) $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = q$ – сдвиг в плоскости YZ ;

где ε_{ij} – компоненты эффективного тензора деформаций, q – величина деформации.

Таким образом, для каждой задачи мы фактически задали эффективный тензор деформаций E^e , а вычислили эффективный тензор напряжений σ^e . Эффективные свойства периодической ячеистой структуры оцениваем в виде обобщённого закона Гука, представляющего собой линейную связь этих двух тензоров:

$$\sigma_{ij}^e = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \quad (7)$$

То есть оценка эффективных упругих свойств в линейном виде представляет собой вычисление компонент тензора упругости C_{ijkl} из (7). Тензор четвёртого ранга C_{ijkl} содержит 21 независимую компоненту, и этих констант достаточно для описания линейно-упругого материала наиболее общего случая анизотропии. Формулы для вычисления коэффициентов C_{ijkl} в явном виде следующие:

$$\begin{aligned} 1) \quad E^e &= \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij}^e = C_{ij11} q \Rightarrow C_{ij11} = \frac{\sigma_{ij}^e}{q} \\ 2) \quad E^e &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij}^e = C_{ij22} q \Rightarrow C_{ij22} = \frac{\sigma_{ij}^e}{q} \\ 3) \quad E^e &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij}^e = C_{ij33} q \Rightarrow C_{ij33} = \frac{\sigma_{ij}^e}{q} \\ 4) \quad E^e &= \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij}^e = (C_{ij12} + C_{ij21}) q \Rightarrow C_{ij12} = C_{ij21} = \frac{\sigma_{ij}^e}{2q} \\ 5) \quad E^e &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij}^e = (C_{ij13} + C_{ij31}) q \Rightarrow C_{ij13} = C_{ij31} = \frac{\sigma_{ij}^e}{2q} \\ 6) \quad E^e &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij}^e = (C_{ij23} + C_{ij32}) q \Rightarrow C_{ij23} = C_{ij32} = \frac{\sigma_{ij}^e}{2q} \end{aligned}$$

Чаще всего настолько общий случай анизотропии для эффективного материала не требуется, и от обобщённого закона Гука (7) можно перейти к ортотропному материалу (девять независимых упругих констант: три модуля Юнга, три коэффициента Пуассона и три модуля сдвига). Иногда эффективный материал получается трансверсально-изотропным (пять упругих констант) или даже изотропным (две константы: модуль Юнга и коэффициент Пуассона).

Данная методика была ранее реализована в программном модуле Fidesys Composite отечественной САЕ-системы Fidesys [6, 19], предназначенном для оценки эффективных механических и теплофизических характеристик гетерогенных материалов (композиционных, пористых и т.п.). В статьях [3, 11, 13, 14, 15, 16] описано использование Fidesys Composite для оценки эффективных свойств неоднородных материалов с помощью метода конечных элементов [17, 18], а в статье [1] – с помощью более современного метода спектральных элементов [9]. Однако во всех этих статьях для оценки эффективных характеристик использовались только объёмные конечные/спектральные элементы.

В данной работе впервые проведён расчёт композиционного материала на основе периодического ячеистого каркаса с помощью САЕ Fidesys с использованием балочных и оболочечных элементов. Рассматривались два случая:

- 1) композит, состоящий из жёсткого металлического решётчатого каркаса и более мягкой матрицы, без связующего (в этом случае каркас моделировался балочными конечными элементами);

- 2) композит, состоящий из металлического решётчатого каркаса, матрицы и тонкого слоя связующего (в этом случае каркас моделировался объёмными элементами, а слой связующего – оболочечными).

3. Результаты численных расчётов

С помощью программного модуля Fidesys Composite для каждого из двух описанных случаев была проведена серия численных расчётов эффективных характеристик композитов с периодическим решётчатым каркасом, схема ячейки которого показана на рис. 2.

Рисунок 2. Схема ячейки структуры, для которой проводились расчёты

В пределах серии расчётов варьировалась:

- 1) для композита без связующего – диаметр стержня каркаса при неизменном размере ячейки;
- 2) для композита с учётом связующего – толщина слоя связующего при неизменном размере ячейки и неизменном диаметре стержня.

Для каждой величины диаметра стержня либо толщины связующего проводились три расчёта:

- 1) расчёт эффективных упругих свойств;
- 2) упругий статический расчёт [2, 4] для модели ячейки периодичности из однородного эффективного материала;
- 3) упругий статический расчёт для модели ячейки периодичности, в которой каркас/связующее моделируются при помощи балочных/оболочечных конечных элементов.

Сравнивались результаты второго и третьего расчётов.

4. Расчёты для композита без связующего (балочная модель каркаса)

Рассматривались ячейки размера $1 \times 1 \times 5$ мм (рис. 3). Механические свойства каркаса моделировались законом Гука с модулем Юнга 200 ГПа и коэффициентом Пуассона 0,25 (приблизительно соответствуют стали). Свойства матрицы моделировались также законом Гука с модулем Юнга 3 ГПа и коэффициентом Пуассона 0,36 (приблизительно соответствуют эпоксидной смоле).

Рисунок 3. Ячейка периодичности композита без связующего

В статическом расчёте для однородной эффективной модели (расчёт 2) и для балочной модели (расчёт 3) ячейка подвергалась одноосному сжатию вдоль оси Z давлением 10 МПа. Сравнимым результатом двух расчётов было максимальное перемещение вдоль оси Z. Был построен график погрешности такого сравнения, показанный на рис. 4.

Рисунок 4. График погрешности сравнения результатов статического одноосного сжатия для однородного эффективного материала и для балочной модели каркаса

График показывает, что при уменьшении диаметра стержней каркаса моделирование их с помощью балочных элементов становится точнее. При отношении диаметра стержня к ми-

нимальному габаритному размеру ячейки менее 5% погрешность не превышает 4,5%. Зависимость погрешности от толщины каркаса – монотонная, практически линейная, график слегка выпуклый вниз. Минимальный диаметр стержня каркаса, для которого проводились расчёты, составил 0,03 мм. Погрешность для него менее 2%. Эффективные свойства такого композита для минимального диаметра были получены следующие: $E_1 = E_2 = 3,06$ ГПа, $E_3 = 3,4$ ГПа, $\nu_{12} = 0,378$, $\nu_{13} = \nu_{23} = 0,325$, $G_{12} = 1,11$ ГПа, $G_{13} = G_{23} = 1,13$ ГПа.

5. Расчёты для композита с учётом связующего (оболочечная модель слоя связующего)

Рассматривались ячейки размера также 1x2x3 мм (рис. 5) с толщиной стержня каркаса 0,1 мм. У каркаса модуль Юнга составлял 200 ГПа, коэффициент Пуассона 0,25 (приблизительно соответствуют стали). У матрицы модуль Юнга – 3 ГПа, коэффициент Пуассона – 0,36 (приблизительно соответствуют эпоксидной смоле). Для связующего был рассмотрен модуль Юнга 2000 ГПа и коэффициент Пуассона 0,3. Такой жёсткий материал рассматривался в качестве модельного (т.е. не предполагалось соответствие констант какому-либо из существующих материалов) – специально, чтобы можно было наблюдать влияние наличия слоя связующего на свойства композита.

Рисунок 5. Ячейка периодичности композита с учётом связующего

В статическом расчёте для однородной эффективной модели (расчёт 2) и для оболочечной модели (расчёт 3) ячейка подвергалась одноосному сжатию вдоль оси Z давлением 100 МПа. Сравнимым результатом двух расчётов было также максимальное перемещение вдоль оси Z. Был построен график погрешности такого сравнения, показанный на рис. 6.

График показывает, что при уменьшении толщины слоя связующего моделирование их с помощью оболочечных элементов становится точнее. При отношении толщины слоя к диаметру стержня каркаса 1% погрешность не превышает 5%. Эффективные свойства такого

композита для минимальной толщины слоя были получены следующие: $E_1 = 3,38$ ГПа, $E_2 = 3,28$ ГПа, $E_3 = 4,68$ ГПа, $\nu_{12} = 0,385$, $\nu_{13} = 0,225$, $\nu_{23} = 0,340$, $G_{12} = 1,28$ ГПа, $G_{13} = 1,43$ ГПа, $G_{23} = 2,05$ ГПа. Зависимость погрешности от толщины каркаса – монотонная, график ощутимо выпуклый вверх – то есть при незначительном увеличении толщины погрешность сильно возрастает. К примеру, для отношения толщины связующего к диаметру стержня каркаса 2% погрешность составляет уже порядка 10%.

Рисунок 6. График погрешности сравнения результатов статического одноосного сжатия для однородного эффективного материала и для оболочечной модели связующего

Полученные результаты позволяют сделать один общий вывод: балочные и оболочечные элементы применимы для моделирования композитов на основе периодических ячеистых структур, которые могут быть изготовлены с использованием аддитивных технологий. Можно моделировать решётчатый каркас такого композита с помощью балочных элементов, и слой связующего между каркасом и матрицей с помощью оболочечных элементов – как в статических упругих расчётах, так и при расчёте эффективных механических характеристик. Однако балочная модель каркаса даёт хорошую точность только в том случае, когда диаметр стержней каркаса достаточно мал по сравнению с размером ячейки. Аналогично оболочечная модель связующего обеспечивает хорошую точность, когда толщина слоя связующего достаточно мала по сравнению с диаметром стержня.

6. Заключение

В статье представлена методика численной оценки эффективных механических характеристик периодических ячеистых структур, которые могут быть изготовлены с применением аддитивных технологий (3D-печати). Научная новизна работы определяется использованием в численных расчётах балочных конечных элементов для моделирования решётчатого каркаса и оболочечных элементов для моделирования связующего между каркасом и матрицей. Эффективные определяющие соотношения представлены в виде обобщённого закона Гука. Для вычисления эффективных модулей упругости решаются краевые задачи упругости для деформаций разного типа. Расчёты реализуются с помощью отечественной САЕ-системы Fidesys (в том числе, с помощью её программного модуля Fidesys Composite). Сравнение результатов статических упругих расчётов для эффективного материала и для модели с балочны-

ми/оболочечными элементами показывает работоспособность подхода, связанного с применением балочных/оболочечных элементов, когда диаметр стержней каркаса структуры либо толщина слоя связующего достаточно малы.

Исследования для данной работы были проведены в рамках Федеральной программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в ООО "Фидесис" – соисполнителе работ в рамках Соглашения о предоставлении субсидии № 14.577.21.0271 (идентификатор проекта RFMEFI57717X0271).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коновалов Д. А., Яковлев М. Я. О численной оценке эффективных упругих характеристик эластомерных композитов при конечных деформациях с использованием метода спектральных элементов с помощью САЕ Fidesys // Чебышёвский сборник, Т. 18, № 13, 2017. – С. 316–329.
2. Левин В. А. Модели и методы. Образование и развитие дефектов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 456 с. (Нелинейная вычислительная механика прочности / Под общ. ред. В. А. Левина: В 5 т. Т. I).
3. Левин В. А., Вдовиченко И. И., Вершинин А. В., Яковлев М. Я., Зингерман К. М. Подход к расчёту эффективных прочностных характеристик пористых материалов // Письма о материалах, Т. 7, № 4, 2017. – С. 452–454.
4. Левин В. А., Зингерман К. М. Точные и приближённые аналитические решения при конечных деформациях и их наложении. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. – 400 с. (Нелинейная вычислительная механика прочности / Под общ. ред. В. А. Левина: В 5 т. Т. III).
5. Лурье А. И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
6. Морозов Е. М., Левин В. А., Вершинин А. В. Прочностной анализ: Фидесис в руках инженера / Предисл. А. И. Боровкова. – М.: ЛЕНАНД, 2015. – 408 с.
7. Яковлев М. Я. О численной оценке эффективных механических характеристик резинокордных композитов // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. № 17, 2012. – С. 29–40.
8. Яковлев М. Я., Янгирова А. В. Метод и результаты численной оценки эффективных механических свойств резинокордных композитов для случая двухслойного материала [Электронный ресурс] // Инженерный вестник Дона, № 2, 2013. – Режим доступа: <http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1639>
9. Komatitsch D., Violette J.-P., The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. Bulletin of Seismological Society of America, 88(2), 1998.
10. Levin V. A., Lokhin V. V., Zingerman K. M. Effective elastic properties of porous materials with randomly dispersed pores. Finite deformation // Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 2000. V. 67, No. 4. – P. 667-670.
11. Levin V. A., Vdovichenko I. I., Vershinin A. V., Yakovlev M. Ya., Zingerman K. M. Numerical estimation of effective mechanical properties for reinforced Plexiglas in the two-dimensional case [Электронный ресурс] // Model. Simulat. Eng., 2016. – Режим доступа: <http://www.hindawi.com/journals/mse/aip/9010576/>

12. Levin V. A., Zingermann K. M. Effective Constitutive Equations for Porous Elastic Materials at Finite Strains and Superimposed Finite Strains// Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 2003. Vol. 70, No. 6. – P. 809–816.
13. Levin V. A., Zingerman K. M., Vershinin A. V., Yakovlev M. Ya. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // Compos. Struct., V. 131, 2015. – P. 25–36.
14. Vdovichenko I. I., Yakovlev M. Ya., Vershinin A. V., Levin V. A. Calculation of the effective thermal properties of the composites based on the finite element solutions of the boundary value problems [Электронный ресурс] // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, V. 158, I. 1, 2016. – Article 012094. – Режим доступа: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/012094/pdf>
15. Vershinin A. V., Levin V. A., Zingerman K. M., Sboychakov A. M., Yakovlev M. Ya. Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // Adv. Eng. Softw., V. 86, 2015. – P. 80–84.
16. Yakovlev M. Ya, Lukyanchikov I. S., Levin V. A., Vershinin A. V., Zingerman K. M. Calculation of the effective properties of the prestressed nonlinear elastic heterogeneous materials under finite strains based on the solutions of the boundary value problems using finite element method // Journal of Physics: Conference Series, Vol. 1158, Iss. 4, 2019. – Article 042037. – Режим доступа: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1158/4/042037/pdf>
17. Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. The finite element method. Vol. 1. The basis. Butterworth-Heinemann: Oxford, United Kingdom, 2000, 707 pp.
18. Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. The finite element method. Vol. 2. Solid mechanics. Butterworth-Heinemann: Oxford, United Kingdom, 2000, 479 pp.
19. Официальный сайт ООО «Фидесис» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://cae-fidesys.ru/>

REFERENCES

1. Konovalov D. A., Yakovlev M. Ya. Numerical estimation of effective elastic properties of elastomer composites under finite strains using spectral element method with CAE Fidesys. Chebyshevskii sbornik, vol. 18, no. 3, 2017. P. 316–329.
2. Levin V.A. Models and methods. Origination and growth of defects. Moscow: FIZMATLIT, 2015. – 456 p. (Nonlinear computational strength mechanics / Ed. by V.A. Levin: 5 volumes. V. 1. In Russian).
3. Levin V.A., Vdodichenko I.I., Vershinin A.V., Yakovlev M.Y., Zingerman K.M. An approach to the computation of effective strength characteristics of porous materials. Lett. Mater., 2017, vol. 7, no. 4. P. 452–454.
4. Levin V.A., Zingerman K.M. Exact and approximate analytical solutions under finite strains and their superposition. Moscow: FIZMATLIT, 2016. – 400 p. (Nonlinear computational strength mechanics / Ed. by V.A. Levin: 5 volumes. V. III. In Russian).
5. Lurie A.I. Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1970. – 940 p.

6. Morozov E.M., Levin V.A., Vershinin A.V. Strength analysis: Fidesys in the hands of an engineer. Moscow: LENAND, 2015. – 408 p. (in Russian).
7. Yakovlev M.Y. About numerical estimation of the effective mechanical properties of rubber-cord composites // Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics. No. 17, 2012. – P. 29–40. (in Russian).
8. Yakovlev M.Y., Yangirova A.V. Algorithm and results of the numerical estimation of the effective mechanical properties of double-layer rubber-cord composite // Electronic scientific journal «Engineering Journal of Don». No. 2, 2013.
<http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1639>.
9. Komatitsch D., Violette J.-P., The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. Bulletin of Seismological Society of America, 88(2), 1998
10. Levin V. A., Lokhin V. V., Zingerman K. M. Effective elastic properties of porous materials with randomly dispersed pores. Finite deformation // Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 2000. V. 67, No. 4. – P. 667-670.
11. Levin V. A., Vdovichenko I. I., Vershinin A. V., Yakovlev M. Ya., Zingerman K. M. Numerical estimation of effective mechanical properties for reinforced Plexiglas in the two-dimensional case [Электронный ресурс] // Model. Simulat. Eng., 2016. – Режим доступа: <http://www.hindawi.com/journals/mse/aip/9010576/>
12. Levin V. A., Zingermann K. M. Effective Constitutive Equations for Porous Elastic Materials at Finite Strains and Superimposed Finite Strains// Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 2003. Vol. 70, No. 6. – P. 809–816.
13. Levin V. A., Zingerman K. M., Vershinin A. V., Yakovlev M. Ya. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // Compos. Struct., V. 131, 2015. – P. 25–36.
14. Vdovichenko I. I., Yakovlev M. Ya., Vershinin A. V., Levin V. A. Calculation of the effective thermal properties of the composites based on the finite element solutions of the boundary value problems [Электронный ресурс] // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, V. 158, I. 1, 2016. – Article 012094. – Режим доступа: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/012094/pdf>
15. Vershinin A. V., Levin V. A., Zingerman K. M., Sboyshakov A. M., Yakovlev M. Ya. Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // Adv. Eng. Softw., V. 86, 2015. – P. 80–84.
16. Yakovlev M. Ya., Lukyanchikov I. S., Levin V. A., Vershinin A. V., Zingerman K. M. Calculation of the effective properties of the prestressed nonlinear elastic heterogeneous materials under finite strains based on the solutions of the boundary value problems using finite element method // Journal of Physics: Conference Series, Vol. 1158, Iss. 4, 2019. – Article 042037. – Режим доступа: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1158/4/042037/pdf>
17. Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. The finite element method. Vol. 1. The basis. Butterworth-Heinemann: Oxford, United Kingdom, 2000, 707 pp.
18. Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. The finite element method. Vol. 2. Solid mechanics. Butterworth-Heinemann: Oxford, United Kingdom, 2000, 479 pp.

19. Official site of Fidesys [Electronic resource]. – Access mode: <http://cae-fidesys.ru/>

Получено 18.03.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.