ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 2.

УДК 539.21:621.785 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-462-477

Развитие математических моделей пластических сред для ресурсосберегающих технологий металлических систем[1]

Г. М. Журавлев, А. Е. Гвоздев, А. П. Навоев, А. А. Жуков, Н. Н. Добровольский, А. А. Шатульский, Д. В. Малий

Журавлев Геннадий Модестович — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: genadiyzhuravleff@yandex.ru
Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Навоев Андрей Павлович — инженер, Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П. А. Соловьева (г. Рыбинск).
e-mail: Navoev@yandex.ru
Жуков Анатолий Алексеевич — кандидат технических наук, профессор Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П. А. Соловьева (г. Рыбинск).
e-mail: anat.juckov2013@yandex.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Шатульский Александр Анатольевич — доктор технических наук, профессор,Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П. А. Соловьева (г. Рыбинск).
e-mail: shatulsky@rsatu.ru
Малий Дмитрий Владимирович — старший преподаватель кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Аннотация

Развитие техники выдвигает более сложные задачи, эффективное решение которых связано с уточнением математических моделей изучаемых процессов пластического формоизменения металлических систем (металлов, сталей, цветных сплавов) различных химических составов и технологий получения (традиционный слитковый передел, порошковое производство, наноструктурные материалы). Для построения решения используется интегрирование дифференциальных уравнений, описывающих физические процессы, происходящие при пластическом течении или вариационный подход, основанный на построении исходного функционала, но в том и другом случае точность математического моделирования процесса будет зависеть от принятой математической модели среды. В работе

[1]Работа выполнена в рамках реализации федеральной целевой программы «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF 157717X0271)

рассмотрены этапы развития различных моделей пластических сред, от простейшей жесткопластической модели, не учитывающей изменение свойств материала, к более сложным – вязко пластической модели, учитывающей появление вязкости при повышении температуры обработки и дилатирующей модели, которая позволяет учитывать изменение плотности материала и тем самым прогнозировать деформационное разрушение. Правильное использование математических моделей пластических сред дает возможность повысить точность расчета технологических режимов, сокращая тем самым время на освоение выпуска новой продукции и может быть применено для разработки технологических процессов получения изделий методами аддитивных технологий на основе лазерного спекания и сплавления порошковых сплавов, технологий термопластической обработки и процессов упрочняющей химико-термической и термической обработок металлических систем различных химических составов.

Ключевые слова: пластическое формоизменение, математическая модель среды, жесткопластическая, вязкопластическая, дилатирующая, математические соотношения, пластическое течение, металлические системы, порошковые сплавы.

Библиография: 32 названия.

Для цитирования:
Г. М. Журавлев, А. Е. Гвоздев, А. П. Навоев, А. А. Жуков, Н. Н. Добровольски, А. А. Шатульский, Д. В. Малий. Развитие математических моделей пластических сред для ресурсосберегающих технологий металлических систем // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2, С. 462–477.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 2.

UDC 539.21:621.785 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-462-477

Development of mathematical models of plastic media for resource-saving metal systems technologies[2]

G. M. Zhuravlev, A. E. Gvozdev, A. P. Navoev, A. A. Zhukov, N. N. Dobrovol'sky, A. A. Shatulskiy, D. V. Maliy

Zhuravlev Gennadiy Modestovich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Tula State University (Tula).
e-mail: genadiyzhuravleff@yandex.ru
Gvozdev Aleksander Evgenievich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief researcher of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Navoev Andrey Pavlovich — Engineer, Rybinsk State Aviation Technical University (Rybinsk).
e-mail: Navoev@yandex.ru
Zhukov Anatoly Alekseevich — Candidate of Technical Sciences, Professor, Rybinsk State Aviation Technical University (Rybinsk).
e-mail: anat.juckov2013@yandex.ru
Dobrovol'sky Nikolai Nikolaevich — Candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University; associate

[2]The work was carried out within the framework of the Federal target program "Research and development in priority areas of development of the scientifc and technological complex of Russia for 2014–2020"(unique project ID RFMEF 157717X0271)

Professor of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Shatulskiy Aleksandr Anatolyevich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Rybinsk State Aviation Technical University (Rybinsk).
e-mail: e-mail: shatulsky@rsatu.ru
Maliy Dmitry Vladimirovich — Senior Lecturer of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Abstract

The development of technology puts forward more complex problems, the effective solution of which is associated with the refinement of mathematical models of the studied plastic forming processes of metal systems (metals, steels, non-ferrous alloys) of various chemical compositions and production technologies (traditional ingot processing, powder production, nanostructured materials). To build a solution, the integration of differential equations to describe the physical processes occurring during plastic flow or a variation approach based on the construction of the original functional is used, but in either case the accuracy of the mathematical modelling of the process will depend on the accepted mathematical model of the medium. The paper discusses the development stages of different models of plastic media, from a simple rigid-plastic model, without taking into account the change in the material properties, to more complex ones - a viscoplastic model that regards the appearance of viscosity with increasing processing temperature and a dilating model that allows to take into consideration changes in material density and thereby predict strain destruction. The correct use of mathematical models of plastic media makes it possible to improve the accuracy of technological regimes calculation, thereby reducing the time to develop the new product, and can be used for the development of technological processes for obtaining products by means of the additive technology based on laser sintering and fusing the powder alloys, thermoplastic processing technologies and processes of thermochemical hardening and heat treatment of metallic systems of different chemical compositions.

Keywords: plastic forming, mathematical medium model, rigid-plastic, viscoplastic, dilating, mathematical correlations, plastic flow, metal systems, powder alloys.

Bibliography: 32 titles.

For citation:
G. M. Zhuravlev, A. E. Gvozdev, A. P. Navoev, A. A. Zhukov, N. N. Dobrovol'sky, A. A. Shatulskiy, D. V. Maliy, 2019, "Development of mathematical models of plastic media for resource-saving metal systems technologies" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 462–477.

1. Введение

Пластическая деформация металлов является одним из древнейших видов обработки металлов давлением. Технологии производства деталей давлением постоянно совершенствуются. В месте с ними совершенствуются и методы исследований и расчета технологических процессов. Однако развитие техники выдвигает более сложные задачи, эффективное решение которых связано как с уточнением математических моделей изучаемых процессов, так и с совершенствованием расчетных методов. Особое значение приобретает точность расчета напряжений, деформаций, температуры, повреждаемости с учетом неравномерности их распределения.

2. Материалы и методика исследования

Теоретические исследования силовых режимов, деформированного и напряженного состояния для процессов пластического течения различных сред, выполняются на основе основных математических соотношений. Для построения решения используется интегрирование дифференциальных уравнений, что связано с большими трудностями математического характера, особенно в случае исследования нестационарных процессов, так как методы точного интегрирования систем уравнений, описывающих пластическое течение, разработаны лишь для простейших случаев. В связи с этим часто применяется вариационный подход, обладающий большей общностью при решении задач пластического течения металла, характеризующейся разнообразными схемами развития жестких и пластических областей. Однако в любом случае для построения согласованных полей для пластических сред необходимо составление системы дифференциальных уравнений, которая будет зависеть от принятой математической модели среды. Рассмотрим этапы совершенствования математических моделей, описывающих поведение материала при пластическом формоизменении различных металлических систем.

3. Жесткопластическая модель среды

Жесткопластическая модель среды применяют к телам, которые при напряжениях ниже предела текучести не деформируются; течение развивается лишь при напряжениях, удовлетворяющих условию текучести ($\sigma = \sigma_s$) [1]. При достаточно малых нагрузках тело находится в упругом состоянии. С возрастанием нагрузок в теле возникают области пластической деформации, для неупрочняющегося материала это будут области текучести. Границы последних заранее неизвестны и определяются из условий непрерывности. Математические трудности, возникающие при решении подобных смешанных задач, весьма велики; известны решения лишь для простейших случаев. В связи с этим приобретают важное значение дальнейшие возможные упрощения в постановке задачи.

Прежде всего следует упомянуть о часто используемом допущении о не сжимаемости материала. Это приводит к заметному упрощению уравнений и во многих вопросах является вполне приемлемым приближением. Однако основная трудность, заключающаяся в необходимости решения смешанной упругопластической задачи, не устраняется (рис. 1).

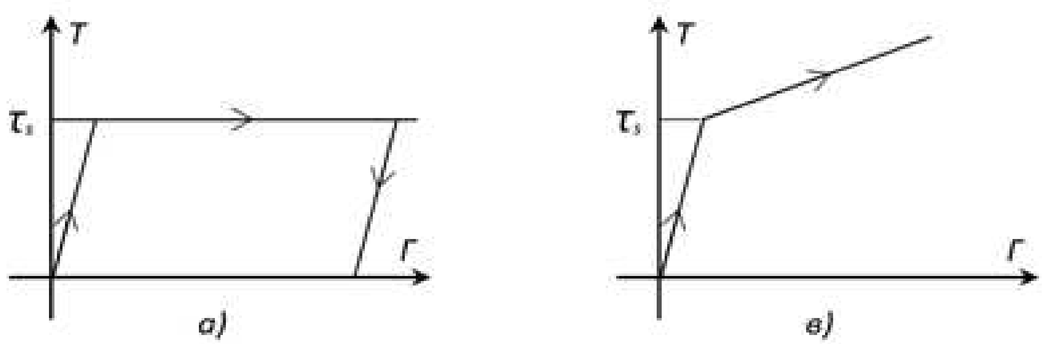

Рис.1: а) схема упругопластического тела; в) схема упругопластического упрочняющегося тела

В последнее время получила значительное развитие схема жесткопластического тела; в этой схеме полностью пренебрегают упругими деформациями. Тогда уравнения пластического состояния упрощаются; это будет, например, уравнение Сен-Венана-Мизеса (рис. 2).

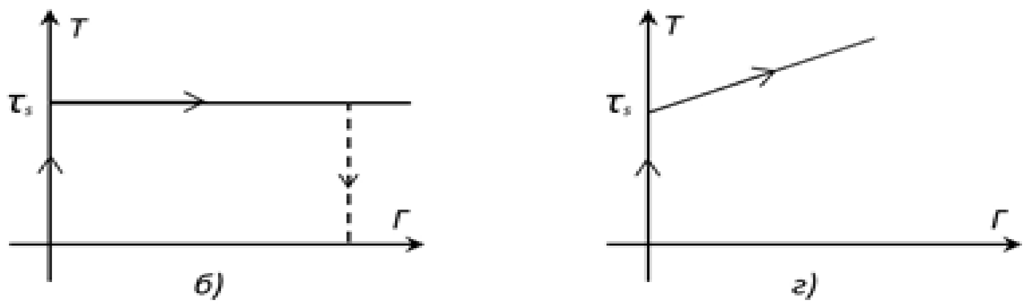

Рис.2: б) схема жесткопластического тела; г) схема жесткопластического упрочняющегося тела

Иными словами, для модуля упругости принимается бесконечное значение, что соответствует переходу от графика деформации с упругим участком к графику деформации с одной лишь площадкой текучести. Пунктирные линии со стрелками показывают, как протекает в обоих случаях разгрузка.

В такой постановке тело остается совершенно недеформируемым (жестким), пока напряженное состояние в нем не станет где-либо удовлетворять условию текучести и не возникает возможность пластического течения. При этом некоторые части тела останутся жесткими, и нужно найти такие решения в пластических зонах, чтобы скорости на их границах соответствовали скоростям движения жестких частей.

Естественно, что эта схема не всегда пригодна. Она приведет к подходящему приближенному решению, если пластическая область такова, что ничто не сдерживает развития пластических деформаций. Примером такого рода может служить задача о растяжении полосы с достаточно большим отверстием; здесь пластическая деформация локализуется в ослабленном сечении. Благодаря этому пластические деформации могут значительно превзойти упругие, что оправдывает использование схемы жесткопластического тела.

Если же пластическая область заключена внутри упругой или же пластическое течение затруднено вследствие особенностей геометрической формы тела или специального характера граничных условий, то схема жесткопластического тела может привести к значительным погрешностям. В ряде случаев (например, при чистом изгибе стержня) упругие области исчезают лишь при бесконечно большой кривизне, т. е. указанный предельный переход требует анализа больших деформаций. Отсутствуют теоремы, которые позволили бы судить о близости решений упругопластических задач к решениям жесткопластических. Тем не менее концепция жесткопластического тела уже позволила построить ряд новых решений, хорошо подтвержденных опытами, и более правильно сформулировать многие задачи теории пластичности.

В заключение заметим, что, подобно схеме жесткопластического тела (характеризуемого площадкой текучести), иногда вводится схема жестко-упрочняющегося тела,показанная на рис. 2г, для случая линейного упрочнения. Здесь также полностью пренебрегают упругими деформациями.

Математическое моделирование в предположении, что материал жесткопластический, несжимаемый, изотропный, будем выполнять с использованием следующих основных уравнений (2-4):

Условие текучести запишем в виде

$$f(\sigma_{\mathrm{ij}}) = \sigma_u + f(\xi_u) = 0 \tag{1}$$

В приведенных выражениях ξ_u и σ_u – соответственно интенсивности скоростей деформаций и напряжений, определяемые выражениями

$$\xi_u = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\xi_x-\xi_y)^2+(\xi_y-\xi_z)^2+(\xi_z-\xi_x)^2+\frac{3}{2}(\eta_{xy}^2+\eta_{yz}^2+\eta_{zx}^2)}; \quad (2)$$

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+\frac{3}{2}(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)}; \quad (3)$$

При построении численных решений технологических задач теории пластичности принимаем:

– в случае медленного пластического течения уравнение равновесия

$$1_{ij,j} = 0; \quad (4)$$

– определяющие уравнения в формулировке Леви-Мизеса

$$\xi_{ij} = \frac{3}{2}\frac{\xi_u}{1_u}s_{ij}; \quad (5)$$

– соотношения связи компонентов скоростей деформаций с компонентами вектора скорости перемещения

$$\xi_{ij} = (\nu_{i,j}+\nu_{j,i})/2; \quad (6)$$

– условие несжимаемости

$$\xi_{ij} = 0; \quad (7)$$

– начальные условия для компонентов скорости

$$\nu_i|_{t=0} = \nu_i(t_0); \quad (8)$$

В приведенных выражениях σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}$ – компоненты девиатора напряжений; δ_{ij} – символ Кронекера; ξ_{ij} – компоненты скоростей деформаций; v_i – компоненты вектора скоростей; t – время; индексы $i, j = 1,\ 2,\ 3$.

Связь между инвариантами σ_u, ε_u и ξ_u может определяться уравнением состояния в общем виде

$$\sigma_u = \sigma_u(\varepsilon_u, \xi_u, T, \chi_k); \quad (9)$$

где ε_u – интенсивность деформаций; T – температура; χ_k – физико-структурные параметры, характеризующие состояние материала в рассматриваемый момент времени и определяемые соответствующими кинетическими уравнениями. В качестве физико-структурных параметров обрабатываемых материалов могут, например, рассматриваться скалярные характеристики поврежденности структуры микродефектами, зернистости поликристаллических агрегатов, энергетические характеристики необратимых изменений кристаллической решетки и другие.

Рассмотренная система уравнений является замкнутой относительно функций σ_{ij}, ξ_{ij} и ν_i. Они должны быть проинтегрированы по объему V.

Для построения единственного решения сформулируем граничные условия в любой текущий момент деформирования t на поверхности тела S объемом V в предположении, что поверхность S состоит из трех частей $S = S_v \cup S_s \cup S_f$.

На поверхности S_v

$$\nu_i = \nu_i^*, (10)$$

где $?_i^*$ – заданная скорость перемещения - в технологических задачах, как правило, скорость инструмента.

На поверхности S_s

$$\nu_{n_i} = \nu_{n_i}^*, \quad (10)$$

где $?^{*}_{n_i}$ – нормальные составляющие скорости. Условие (10) называют иногда условием обтекания или непроницаемости, согласно которому приконтактные частицы деформируемой среды перемещаются по поверхности инструмента.

Если, в касательной к поверхности $\mathrm{S_s}$, к плоскости инструмента имеет место скольжение деформируемого металла со скоростью $?_n$, направление и величина которой известна, то граничные условия включают учет трения. Напряжение от сил трения определяется с помощью какого-либо известного закона трения, который в общем виде определяется выражением

$$\tau_k = \tau_k(f_n, \nu_s, ...), \tag{11}$$

где f_n – нормальное давление.

На поверхности S_f – задается вектор поверхностного напряжения

$$f_i = f_i^*. \tag{12}$$

В частном случае, если плоскость свободна от нагрузок, то $f^* = 0$.

Начальное условие задачи определим в виде задания исходных координат точек тела в начальный момент времени $t = t_0$

$$x_i = x_i(x_0, y_0, z_0, t) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{13}$$

Кроме того, в качестве начальных условий можно задавать значения механических и физико-структурных характеристик в каждой точке тела.

Решение сформулированной задачи ищется в виде совокупности функций:

$$\nu_i = \nu_i\left(x, y, z, t\right);\ \sigma_{ij} = \sigma_{ij}\left(x, y, z, t\right);\ (i, j = 1, 2, 3) \tag{14}$$

в пределах пластически деформируемого объема V, которые связаны системой уравнений (1-8) и граничными условиями (9-13).

Известно, что сформулированная выше система уравнений, для решения статических задач может трактоваться как система уравнений типа Эйлера для некоторого функционала и решение их эквивалентно исследованию на экстремум соответствующего функционала. Для решения технологических задач ОМД будем использовать принцип возможных перемещений с представлением соответствующего функционала для множественных состояний деформируемого тела. В качестве возможных перемещений принимаются величины, пропорциональные скоростям перемещений точек деформируемой среды. Для нестационарной стадии деформирования задача решается шаговым методом, т. е. функционал рассматривается справедливым на некотором достаточно малом временном отрезке $\triangle t$.

Вводятся следующие допущения:

– весь материал в рассматриваемом объеме V находится в пластическом состоянии;

– значение интенсивности напряжений $\sigma_u = \sigma_s$ (σ_s – сопротивление материала пластической деформации), в рассматриваемый момент времени, задано (или вычислено) по известному с предыдущего шага решению в соответствии с уравнением состояния (6);

– ускорение материала на текущем шаге решения задачи не варьируется, а плотность материала в процессе всего периода деформирования остается неизменной и принимается равной ее начальному значению.

Касательное напряжение трения на контактной поверхности определяется по закону Прандтля

$$\tau_k = \mu \tau_s \tag{15}$$

где μ – коэффициент трения по напряжению текучести ($0 \leqslant \mu \leqslant 1$) иногда коэффициент μ называют фактором трения. Величина τ_s принимается осредненной, а коэффициент μ – постоянным, по всей поверхности контакта.

Функционал полной мощности для вычисление силовых режимов, эквивалентный системе уравнений с учетом принятых допущений для статической задачи принимает следующий вид

$$J = \int_V 1_u \xi_u dV + \int_{S_s} \mu\tau_s |\ \nu_{s_i}|\ dS - \int_{S_f} f_i^* \nu_i dS \quad , \tag{16}$$

где f_i^* – известное напряжение на поверхности тела.

Согласно принципу Журдена действительное поле скоростей, в отличие от всех кинематически возможных, сообщает функционалу полной мощности минимальное значение.

Минимум функционала (16) должен быть найден для класса функций, соответствующих условию несжимаемости. При численном решении задачи поле скоростей приближается к действительному всегда с ограниченной точностью и для жесткопластического течения условие несжимаемости должно быть выполнено в пределах этой точности. Отклонение от него в пределах заданной точности не оказывает существенного влияния на полученное решение.

4. Вязкопластическая модель среды

Соединение вязких и пластических элементов приводит к так называемым вязкопластическим средам. Подобная модель впервые была предложена Ф. Н. Шведовым и, независимо от него Бингамом для описания движения структурообразующих суспензий в условиях чистого сдвига. Позже А. А. Ильюшин предложил [5] пространственное обобщение уравнения состояния Шведова-Бингама и решил ряд задач для случая плоских течений вязкопластической среды, имея ввиду приложение полученных результатов к задачам о течении металлов. При этом закон деформации имеет вид [1]

$$\sigma = \sigma_s + \mu \frac{d\varepsilon}{dt}$$

где σ_s – предел текучести, μ – коэффициент вязкости.

Эта схема отражает тот факт, что для многих веществ заметное течение появляется лишь при определенной нагрузке; скорость течения при этом зависит от вязкости среды. Вязкопластическими свойствами характеризуются многие реальные вещества – металлы при достаточно высоких температурах, густые смазочные вещества. Совершенствование многих технологических процессов (горячей и полугорячей обработки металлов) требует изучения движения вязкопластических материалов, основывающихся на уравнениях вязкопластического течения. Рассмотрим более подробно вязкопластическую среду, которая находит широкое практическое применение.

Математическое моделирование в предположении, что материал вязкопластический, будем выполнять с использованием следующих основных уравнений [1]:

Условие несжимаемости запишем в виде

$$\varepsilon_{ij}\delta_{ij} = 0 \tag{17}$$

Далее, компоненты напряжения σ_{ij} складываются из компонент напряжения $\sigma_{ij}^{/}$ связанных с пластическими свойствами, и компонент напряжения $\sigma_{ij}^{//}$, вызываемых вязким сопротивлением

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{/} + \sigma_{ij}^{//} \tag{18}$$

Компоненты напряжения $\sigma_{ij}^{/}$ определяются уравнениями теории пластичности Мизеса,

$$s_{ij}^{/} = \frac{2\tau_s}{H}\varepsilon_{ij} \tag{19}$$

причем удовлетворяется условие текучести Мизеса

$$s_{ij}^{//} s_{ij}^{/} = 2\tau_s^2 \tag{20}$$

Пусть вязкое сопротивление следует закону линейной вязкости Ньютона,

$$s_{ij}^{//} = 2\mu^{/} \varepsilon_{ij} (3\mu^{/} = \mu) \tag{21}$$

Складывая напряжения, приходим к соотношения вязкопластической среды

$$s_{ij} = 2\left(\frac{\tau_s}{H} + \mu^{/}\right)\varepsilon_{ij} \tag{22}$$

Отсюда вытекает зависимость

$$T = \tau_s + \mu^{/} H \tag{23}$$

являющаяся обобщением уравнения (22).

Зависимости (23) вместе с условием несжимаемости (17) и тремя уравнениями движения образуют систему десяти уравнений для десяти неизвестных функций s_{ij}, σ, υ_i.

Подставляя компоненты напряжения согласно (23) в дифференциальные уравнения равновесия, получим (вместе с уравнением несжимаемости (18) систему четырех уравнений для среднего давления σ и составляющих скорости υ_i эта система имеет сложный вид и здесь нет смысла ее выписывать.

Для вычисления силовых режимов процесса пластического деформирования вязкопластических сред используем функционал полной мощности, эквивалентный системе уравнений. Исходя из метода баланса мощностей [6, 7] записывается некоторый функционал, составляющие которого полностью характеризуют состояние деформируемой среды в данных условиях обработки, представляющий собой разность мощностей внутренних и внешних сил, действующих на систему:

$$W_{\text{внутр.}} - W_{\text{внеш.}} = 0. \tag{24}$$

Под мощностью внутренних сил понимаются затраты мощности, определяемые выражением:

$$W_{\text{внутр.}} = W_{\text{пл.}} + W_{\text{вяз.}} \tag{25}$$

где $W_{\text{пл.}}$ – пластическая компонента мощности; $W_{\text{вяз.}}$ – вязкая компонента мощности.

Под мощностью внешних сил понимается мощность, получаемая от воздействия осевой деформирующей нагрузки.

Запишем функционал в форме, непосредственно используемой для расчета вязкопластических сред.

$$I = \int_{\nu} \tau_s H dv + \int_{\nu} {}^{1}\!/\!{}_{2} \mu H^2 dv - \int_{F^*} \vec{x}\vec{v}_0 dF^* = 0, \tag{26}$$

где τ_s – предел текучести сдвига; μ – коэффициент вязкости; H – интенсивность скорости деформации сдвига; F – площадь поверхности разрыва; $\overrightarrow{x}$ – вектор поверхностных сил; $\overrightarrow{v_0}$ – вектор скорости движения инструмента (скорости деформирования); F^* – площадь поверхности воздействия внешних сил.

5. Дилатирующая среда

Необходимость учета необратимого изменения объема материала возникает при расчетах многих технологических процессов, например, формования порошковых материалов, обработки давлением и резанием пористых металлов, уплотнения и резания грунтов, истечения сыпучих материалов при выпуске их из емкостей, проникания тел различной формы в пористые среды, закрытой прокладке трубопроводов способом прокола и т.д. Проводимые исследования пластического формоизменения дилатирующих материалов показывают, что эксплуатационные свойства изделий зависят не только от механических характеристик, но и от физико-структурных свойств обрабатываемых материалов, к которым относится и повреждаемость материала дефектами деформационного характера, связанная с пластическим разрыхлением (или уплотнением) мезоструктуры деформируемого материала. Известно, что основным физическим механизмом повреждаемости металлов при их больших пластических деформациях, является порообразование. Порообразование (наличие объемной фракции пор) в условиях пластической деформации, имеющей сдвиговую физическую природу, приводит к необратимому изменению объема деформируемого материала – его пластической дилатансии.

В результате экспериментальных и теоретических исследований, выполненных в нашей стране и за рубежом, разработаны некоторые методы расчета основных параметров процессов пластического деформирования дилатирующих материалов.

Качественное проектирование технологических процессов основывается как на передовом производственном опыте, так и на теоретическом и экспериментальном анализах этих процессов. Определяющие соотношения деформационной повреждаемости современной механики повреждаемости (Damage Mechanics) строятся на эффекте дилатансии. Следует также отметить, что решение этой задачи требует детального учета локальных свойств обрабатываемого материала, связанных с неоднородным распределением напряжений, скоростей, деформаций и пластической дилатансии. Предполагается использование и основных положений теории движения сплошной среды т. е. исследование кинетики пластической деформации, что возможно только с в сочетании современных методов теории пластичности и механики повреждаемости металлических материалов, а также и достижений вычислительной техники.

Явление пластической дилатансии впервые было обнаружено в 1885 г. О. Рейнольдсом [8] в 1885 г. в опытах с песком и объяснено с помощью простейшей математической модели механического поведения песка в виде системы одинаковых жестких регулярно упакованных шаров. При наиболее плотной укладке шаров на плоскости каждый из них соприкасается с шестью соседними шарами, а при наименее плотной – с четырьмя; поэтому в первом случае сдвиг вызывает разрыхление – переход к менее плотной упаковке шаров, а во втором случае – уплотнение – переход к более плотной упаковке. Первый случай соответствует положительной дилатансии – увеличению объема, а второй – отрицательной – уменьшению объема. В классической теории пластичности [9, 10] рассматриваются несжимаемые материалы (как правило, компактные металлы), не проявляющие дилатансии.

В развитие идей О. Рейнольдса рядом авторов были предложены более сложные математические модели, связанные с различными способами укладки жестких шаров в пространстве, использовавшиеся не только для качественного объяснения, но и для количественного описания эффекта дилатансии [11, 12]. Возможности такого подхода обусловлены тем, что геометрические характеристики различных правильных шаровых упаковок существенно отличаются друг от друга. Например, координационное число (количество соседних контактов) простой кубической упаковки равно 6, а коэффициент компактности (отношение объема шаров ко всему объему, включая пустоты между шарами) – 52,36 %; те же величины для ромбоэдрической упаковки равны соответственно 12 и 74,05 %.

Кроме того, во многих случаях дилатирующие материалы подвергаются преимущественному уплотнению. Таковы, например, процессы прокатки, экструзии и прессования порошковых и пористых металлов и сплавов [13-19].

Поэтому в связи с необходимостью учета уплотнения материала гипотеза о связно-сыпучей среде, соответствующей идеальной пластичности, встретила ряд возражений, опиравшихся на экспериментальные результаты.

Необходимые обобщения условия, обеспечивавшие в той или иной степени согласование теории дилатансии с экспериментами, выполнили в 1957 г. Д. Друккер, Р. Гибсон и Д. Хенкель, в 1959 г. – Э. Дженике и Р. Шилд, в 1969 г. – Н. Су, Дж. Вейдлер и П. Пэсли, в 1970 г. – Ф. Димаджио и И. Сандлер, – полученные ими результаты [20] сводились в основном к построению замкнутых поверхностей текучести в пространстве напряжений.

Наибольшее распространение в расчетах технологических процессов порошковой металлургии получили квадратичное условие текучести Р. Грина [21].

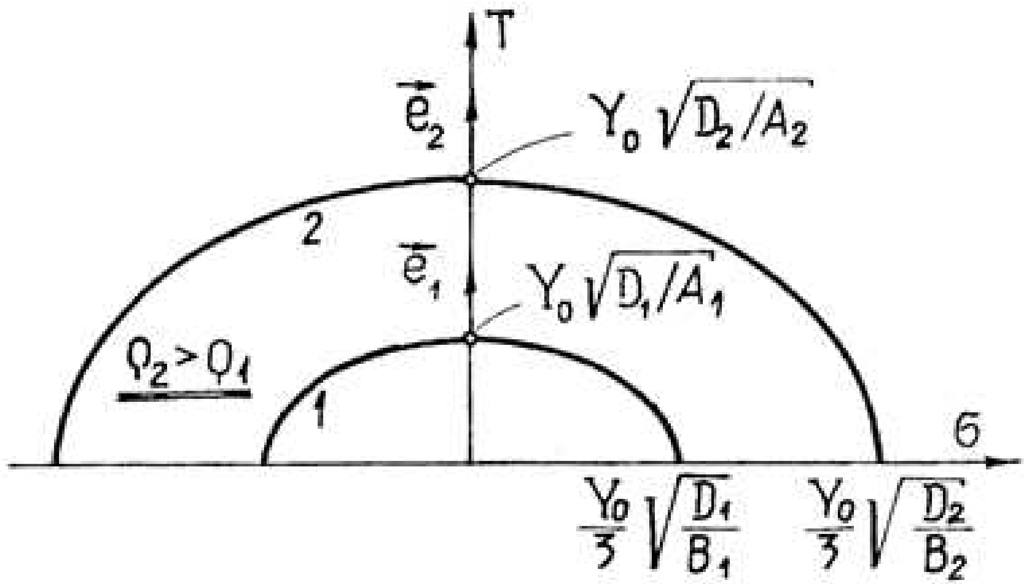

Рис.3: Обобщенное условие текучести Грина.

Основные соотношения пластического течения дилатирующих сред содержат уравнение неразрывности

$$\rho\left(\frac{v}{\partial r}+\frac{v}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+v\frac{\rho}{\partial r}+w\frac{\rho}{\partial z}=0 \tag{27}$$

где ρ – плотность среды, $\rho=\rho_0\,(exp-\varepsilon)$; ρ_0 – начальная плотность; ε – объемная деформация (дилатансия), $\varepsilon=\int\dot{\varepsilon}dt$; $\dot{\varepsilon}$ – скорость дилатансии; t – время.

Выписанные соотношения для пластического формоизменения позволяют составить основное энергетическое уравнение, которое характеризует состояние материала при данных условиях обработки.

Для анализа указанных процессов деформации, исходя из баланса мощности внутренних и внешних сил можно составить энергетический функционал, который полностью характеризуют состояние деформируемой среды в данных условиях обработки.

Под мощностью внешних сил понимается мощность, получаемая от воздействия осевой деформирующей нагрузки. Запишем составляющие мощности внешних и внутренних сил в форме, непосредственно используемой для расчета:

$$\begin{cases} W_{\text{пл.}} = \int\limits_V \sigma_{ij} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}\ dV \\ W_{mp.}\ = \int\limits_{F_k} f \cdot \tau_s \cdot [\nu_k]\, dF_k \\ W_{\text{внешн.}} = \int\limits_{S^*} \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{V} dS \end{cases}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – компоненты тензора скоростей деформации; V – объём; f – коэффициент трения; $[\nu_k]$ – скорость скольжения металла по инструменту; F_k – площадь контакта границы с инструментом; $\overrightarrow{X}$ – вектор поверхностных сил; $\overrightarrow{V}$ – вектор скорости движения инструмента (скорости деформирования); S – площадь торца рабочей части инструмента.

Таким образом, с учетом всего вышеизложенного, общее выражение функционала, описывающего состояние деформируемой среды в произвольный момент времени, имеет вид:

$$\int_V^{\cdot} \left(?\dot{?} + TH \right) + \int_F^{\cdot} f ?_s\, [?_k]\, dF_k + \int_S^{\cdot} \overline{X}\ \overline{V} dS = 0 \tag{28}$$

Функционал (28) используется для анализа процессов пластического формоизменения дилатирующих сред при статических скоростях деформации.

6. Заключение

В работе показано, что использование различных моделей пластических сред: жесткопластическая, вязкопластическая, дилатирующая, позволяет повышать точность расчета напряжений, деформаций, температуры, повреждаемости с учетом неравномерности их распределения при решении прикладных задач.

Сформулированы их основные определяющие соотношения пластического формоизменения и составлены энергетические функционалы, позволяющие определять кинематику течения материала, силовые, температурные режимы, напряженное и деформированное состояния, деформационную повреждаемость. Таким образом, можно построить связанные поля основных физических процессов, происходящих в материале при пластических деформациях. Это позволяет теоретически прогнозировать и определять параметры технологических процессов с визуализацией схем процессов и исследованием кинетики, полученных значений в виде графиков.

Полученные результаты исследований могут быть применены для разработки технологических процессов получения изделий методами аддитивных технологий с использованием лазерного воздействия на поликристаллические металлические системы (спекание и сплавление порошковых сплавов), технологий термопластической обработки и технологий упрочняющей химико-термической и термической обработок металлических систем различных химических составов, разработки оптимальных режимов ресурсосберегающих процессов термопластической обработки сталей и сплавов с использованием различных методов оптимизации, математического анализа и теории приближений [22-32].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.

2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.

3. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.

4. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.

5. Ильюшин А.А. Деформация вязкопластического тела. Уч. зап. МГУ, Механика. Вып. 39. 1940. С. 3–81.

6. Баничук Н.В., Петров В. М., Черноусько Ф. Л. Численное решение вариационных и краевых задач методом локальных вариаций / Журнал вычислительной математики и вычислительной физики. 1966. Т. 6. № 6. С. 947–961.

7. Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 238 с.

8. Рейнер М. Реология. М.: Наука, 1965. 224 с.

9. Екобори Т. Физика и механика разрушения и прочности твердых тел. М.: Металлургия, 1971. 264 с.

10. Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956. 398 с.

11. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. М.: Мир, 1989. 510 с.

12. Вялов С. С. Реологические основы механики грунтов. М.: Высшая школа, 1978. 448 с.

13. Виноградов Г. А., Каташинский В. П. Теория листовой прокатки металлических порошков и гранул. М.: Металлургия, 1979. 224 с.

14. Перельман В. Е. Формование порошковых материалов. М.: Металлургия, 1979. 232 с.

15. Макаров Э. С. К теории формования металлических порошков в условиях плоской деформации // Известия вузов, Машиностроение. 1973. № 10. С. 158–162.

16. Павлов В. А., Кипарисов С. С., Щербина В. В. Обработка давлением порошков цветных металлов. М.: Металлургия, 1977. 176 с.

17. Новые процессы деформации металлов и сплавов / А. П. Коликов, П. И. Полухин, А. В. Крупин и др. М.: Высшая школа, 1986. 352 с.

18. Порошковая металлургия и напыленные покрытия / Под ред. Б. С. Митина. М.: Металлургия, 1987. 792 с.

19. Экономичные методы формообразования деталей / Под ред. К. Н. Богоявленского и В. В. Риса. Л.: Лениздат, 1984. 144 с.

20. Херрманн В. Определяющие уравнения уплотняющихся пористых материалов // Проблемы теории пластичности. М.: Мир, 1976. С. 178–216.

21. Green R. J. A plasticity theory for porous solids. // Int. J. Mech. Sci., vol. 14, 1972, pp. 215–224.

22. Навоев А. П., Жуков А. А., Кутепов С. Н., Гвоздев А. Е. Особенности работы, процессы упрочнения, структура, свойства и качество стальных зубчатых колес привода агрегатов двигателей внутреннего сгорания: монография / Под ред. д-ра техн. наук, проф. А. Е. Гвоздева. Тула: Изд-во ТулГУ, 2019. 212 с.

23. Zhuravlev G. M., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G., Sergeev A. N., Maliy D. V. Application of mathematical method of local variations to solve problems of plastic formification of metal, powder and nanocomposition materials. Chebyshevskii Sbornik. 2018;19(4):43-54. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-4-43-54

24. Makarov E. S., Gvozdev A. E., Zhuravlev G. M., Sapozhnikov S. V., Sergeev A. N., Kolmakov A. G., Breki A. J., Maliy D. V., Dobrovolsky N. N. Analysis of plasticity theory equations of powder metal systems. Chebyshevskii Sbornik. 2018;19(1):152-166. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-1-152-166

25. Журавлев Г. М., Гвоздев А. Е. Обработка сталей и сплавов в интервале температур фазовых превращений: монография. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 320 с.

26. Гвоздев А. Е., Журавлев Г. М., Кузовлева О. В. Основы формирования состояния высокой деформационной способности металлических систем: монография. Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 382 с.

27. Гвоздев А. Е., Стариков Н. Е., Сергеев Н. Н., Кутепов С. Н., Сапожников С. В., Калинин А. А., Клементьев Д. С. Основы ресурсосберегающих процессов получения быстрорежущего инструмента: монография / Под ред. проф. А. Е. Гвоздева. Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 209 с.

28. Gvozdev A. E., Juravlev G. M., Sapognikov S. V. Theoretical analysis of the compacting powder materials process by pressing // Proceedings of the Tula States University-Sciences of Earth, volume 4, pp. 273–283.

29. Макаров Э. С., Гвоздев А. Е., Журавлев Г. М. Теория пластичности дилатирующих сред: монография / Под ред. проф. А. Е. Гвоздева. 2-е изд., перераб. и доп. Тула: Изд-во ТулГУ, 2015. 337 с.

30. Makarov E. S., Gvozdev A. E., Zhuravlev G. M., Sergeev A. N., Minaev I. V., Breki A. D., Maliy D. V. Application of plasticity theory of dilating media to sealing processes of powders of metallic systems. Chebyshevskii Sbornik. 2017;18(4):268-284. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-4-268-284

31. Гвоздев А. Е. Ресурсосберегающая технология термомеханической обработки быстрорежущей вольфрамомолибденовой стали Р6М5 // Металловедение и термическая обработка металлов. 2005. № 12 (606). С. 27–30.

32. Гвоздев А. Е., Маркин А. А. Термомеханика упруговязкопластического конечного деформирования // Механика твердого тела. 1998. № 6. С. 115–120.

REFERENCES

1. Kachanov, L. M., 1969, "Osnovy teorii plastichnosti" [Basics of plasticity theory], *Nauka, Moskva, Rossiya,* 420 p.

2. Vasidzu, K., 1987, "Variacionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti" [Variational methods in the theory of elasticity and plasticity], *Mir, Moskva, Rossiya,* 542 p.

3. Zenkevich, O., Morgan, K. 1986, "Konechnye elementy i approksimaciya" [Finite elements and approximation], *Mir, Moskva, Rossiya,* 318 p.

4. Oden, Dzh., 1976, "Konechnye elementy v nelinejnoj mekhanike sploshnyh sred" [Finite elements in nonlinear continuum mechanics], *Mir, Moskva, Rossiya,* 464 p.

5. Ilyushin, A. A., 1940, "The deformation of a viscoplastic body", *Uch. zap. MGU, Mekhanika,* vol. 39, pp. 3–81.

6. Banichuk, N. V., Petrov, V. M., Chernousko, F. L., 1966, "Numerical solution of variational and boundary value problems by the method of local variations", *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i vychislitelnoj fiziki,* vol. 6, no. 6, pp. 947–961.

7. Chernousko, F. L., Banichuk, N. V., 1973, "Variacionnye zadachi mekhaniki i upravleniya" [Variational problems of mechanics and control], *Nauka, Moskva, Rossiya,* 238 p.

8. Rejner, M., 1965, "Reologiya" [Rheology], *Nauka, Moskva, Rossiya,* 224 p.

9. Ekobori, T., 1971, "Fizika i mekhanika razrusheniya i prochnosti tverdyh tel" [Physics and mechanics of fracture and strength of solids], *Metallurgiya, Moskva, Rossiya,* 264 p.

10. Prager, V., Hodzh, F. G., 1956, "Teoriya idealno plasticheskih tel" [Theory of perfectly plastic bodies], *Moskva, Rossiya,* 398 p.

11. Dzhonson, K., 1989, "Mekhanika kontaktnogo vzaimodejstviya" [Mechanics of contact interaction], *Mir, Moskva, Rossiya,* 510 p.

12. Vyalov, S. S., 1978, "Reologicheskie osnovy mekhaniki gruntov" [Rheological fundamentals of soil mechanics], *Vysshaya Shkola, Moskva, Rossiya,* 448 p.

13. Vinogradov, G. A., Katashinskij, V. P., 1979, "Teoriya listovoj prokatki metallicheskih poroshkov i granul" [Theory of sheet rolling of metal powders and granules], *Metallurgiya, Moskva, Rossiya,* 224 p.

14. Perelman, V. E., 1979, "Formovanie poroshkovyh materialov" [Powder material forming], *Metallurgiya, Moskva, Rossiya,* 232 p.

15. Makarov, E. S., 1973, "On the theory of metal powder forming under plane deformation", *Izvestiya Vuzov, Mashinostroenie,* no. 10, pp. 158–162.

16. Pavlov, V. A., Kiparisov, S. S., Shcherbina, V. V., 1977, "Obrabotka davleniem poroshkov cvetnyh metallov" [Pressure treatment of non-ferrous metal powders], *Metallurgiya, Moskva, Rossiya,* 176 p.

17. Kolikov, A. P., Poluhin, P. I., Krupin, A. V., et al., 1986, "Novye processy deformacii metallov i splavov" [New processes of deformation of metals and alloys], *Vysshaya Shkola, Moskva, Rossiya,* 352 p.

18. Mitin, B. S., 1987, "Poroshkovaya metallurgiya i napylennye pokrytiya" [Powder metallurgy and sprayed coatings], *Metallurgiya, Moskva, Rossiya,* 792 p.

19. Bogoyavlenskogo, K. N., Risa, V. V., 1984, "Ekonomichnye metody formoobrazovaniya detalej" [Economical methods of forming parts], *Leningrad, Lenizdat, Rossiya,* 144 p.

20. Herrmann, V., 1976, "The governing equations of the overall porous materials", *Problemy teorii plastichnosti, Mir, Moskva, Rossiya,* pp. 178–216.

21. Green, R. J., 1972, "A plasticity theory for porous solids", *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 14, pp. 215–224.

22. Navoev, A. P., Zhukov, A. A., Kutepov, S. N., et al., 2019, “Osobennosti raboty, processy uprochneniya, struktura, svojstva i kachestvo stalnyh zubchatyh koles privoda agregatov dvigatelej vnutrennego sgoraniya” [Features of operation, hardening processes, structure, properties and quality of steel gears drive units of internal combustion engines], *Izd-vo TulGU, Tula, Rossiya,* 212 p.

23. Zhuravlev, G. M., Gvozdev, A. E., Kolmakov, A. G., et al., 2018 “Application of mathematical method of local variations to solve problems of plastic formification of metal, powder and nanocomposition materials”, *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 19(4), pp. 43–54. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-4-43-54

24. Makarov, E. S., Gvozdev, A. E., Zhuravlev, G. M., et al., 2018, “Analysis of plasticity theory equations of powder metal systems”, *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 19(1), pp. 152–166. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-1-152-166

25. Zhuravlev, G. M., Gvozdev, A. E., 2016, “Obrabotka stalej i splavov v intervale temperatur fazovyh prevrashchenij” [Processing of steels and alloys in the temperature range of phase transformations], *Izd-vo TulGU, Tula, Rossiya,* 320 p.

26. Gvozdev, A. E., Zhuravlev, G. M., Kuzovleva, O. V., 2018, “Osnovy formirovaniya sostoyaniya vysokoj deformacionnoj sposobnosti metallicheskih sistem” [Bases of formation of the state of high deformation ability of metal systems], *Izd-vo TulGU, Tula, Rossiya,* 382 p.

27. Gvozdev, A. E., Starikov, N. E., Sergeev, N. N., et al., 2018, “Osnovy resursosberegayushchih processov polucheniya bystrorezhushchego instrumenta” [Basics of resource-saving processes for obtaining high-speed tools], *Izd-vo TulGU, Tula, Rossiya,* 209 p.

28. Gvozdev, A. E., Juravlev, G. M., Sapognikov, S. V., 2017, “Theoretical analysis of the compacting powder materials process by pressing”, *Proceedings of the Tula States University-Sciences of Earth*, vol. 4, pp. 273–283.

29. Makarov, E. S., Gvozdev, A. E., Zhuravlev, G. M., 2015, “Teoriya plastichnosti dilatiruyushchih sred” [Theory of plasticity gelatinous environments], *Izd-vo TulGU, Tula, Rossiya,* 337 p.

30. Makarov, E. S., Gvozdev, A. E., Zhuravlev, G. M., et al., 2017, “Application of plasticity theory of dilating media to sealing processes of powders of metallic systems”, *Chebyshevskii Sbornik,* vol. 18(4), pp. 268–284. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-4-268-284

31. Gvozdev, A. E., 2005, “Resource-saving technology of thermomechanical processing of high-speed tungsten molybdenum steel R6M5”, *Metallovedenie i termicheskaya obrabotka metallov,* no. 12 (606), pp. 27–30.

32. Gvozdev, A. E., Markin, A. A., 1998, “Thermomechanics of elastic-viscoplastic final deformation”, *Mekhanika tverdogo tela,* no. 6, pp. 115–120.

Получено 18.03.2019 г.
Принято в печать 12.07.2019 г.