ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-399-405

Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток[1]

Е. М. Рарова

Рарова Елена Михайловна — заместитель декана, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: rarova82@mail.ru

Аннотация

В работе продолжены исследования автора по оценки тригонометрических сумм алгебраической сетки с весами с простейшей весовой функцией второго порядка.

Для параметра $\vec{m}$ тригонометрической суммы $S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{m})$ выделены три случая.

Если $\vec{m}$ принадлежит алгебраической решётке $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$, то справедлива асимптотическая формула

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(t(m,\ldots,m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^2}\right).$$

Если $\vec{m}$ не принадлежит алгебраической решётке $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$, то определены два вектора $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1,\ldots,n_s)$ и $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ из условий $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})\in\Lambda$, $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{m}) + \vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ и произведение $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) = \overline{n_1}\cdot\ldots\cdot\overline{n_s}$ минимально. Доказано асимптотическая оценка

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(t(m,\ldots,m)) = \frac{1-\delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^2} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^2\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^2}\right).$$

Ключевые слова: алгебраические решётки, алгебраические сетки, тригонометрические суммы алгебраических сеток с весами, весовые функции.

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:
Е. М. Рарова. Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 399–405.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 2.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-399-405

Trigonometric sums of nets of algebraic lattices[2].

E. M. Rarova

Rarova Elena Mikhailovna — deputy dean, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: rarova82@mail.ru

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ № 19-41-710004_р_а
[2]The study was carried out under the RFBR grant № 19-41-710004_r_a

Abstract

The paper continues the author's research on the evaluation of trigonometric sums of an algebraic net with weights with the simplest weight function of the second order.

For the parameter $\vec{m}$ of the trigonometric sum $S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{m})$, three cases are highlighted.

If $\vec{m}$ belongs to the algebraic lattice $\Lambda(t\ cdotT(\vec{a}))$, then the asymptotic formula is valid

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(t(m,\ldots,m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^2}\right).$$

If $\vec{m}$ does not belong to the algebraic lattice $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$, then two vectors are defined $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1,\ldots,n_s)$ and $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ from the conditions $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \in \Lambda$, $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{M}) + \vec{K}_\lambda(\vec{m})$ and the product $q(\vec{n}_\lambda(\vec{m})) = \overline{n_1}\cdot\ldots\cdot\overline{n_s}$ is minimal. Asymptotic estimation is proved

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(t(m,\ldots,m)) = \frac{1-\delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^2} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^2\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^2}\right).$$

Keywords: algebraic lattices, algebraic net, trigonometric sums of algebraic net with weights, weight functions.

Bibliography: 5 titles.

For citation:
E. M. Rarova, 2019, "Trigonometric sums of nets of algebraic lattices *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 399–405.

1. Введение

Рассматриваются: единичные $s-$мерные кубы

$$\overline{G}_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu \leqslant 1,\ \nu = 1,2,\ldots,s\},\quad G_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu < 1,\ \nu = 1,2,\ldots,s\}.$$

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\}=(\{x_1\},\ldots,\{x_s\})$. Отсюда следует, что всегда $\{\vec{x}\} \in G_s$.

Далее везде под произвольной решеткой $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть

$$\Lambda = \{m_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s\vec{\lambda}_s = \vec{m}\cdot A\,|\,\vec{m} = (\,m_1,\ldots,m_s) \in \mathbb{Z}^s\},$$

где $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1\,1},\ldots,\lambda_{1\,s})$,…,$\vec{\lambda}_s = (\lambda_{s\,1},\ldots,\lambda_{s\,s})$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$, а матрица решётки A задана соотношениями

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{1\,1} & \ldots & \lambda_{1\,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s\,1} & \ldots & \lambda_{s\,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \vec{\lambda}_s \end{pmatrix}.$$

Взаимная решетка $\Lambda^* = \{\vec{x}\,|\,\forall\vec{y} \in \Lambda\ (\vec{x},\vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$. Непосредственно из определения следует равенство $(q\Lambda)^* = \dfrac{1}{q}\Lambda^*$.

Определение 1. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$. Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1;1)^s$.*

Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x}\,|\,\vec{x} = \{\vec{y}\},\vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

Определение 2. *Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=-1}^{0} \rho(\vec{x}+(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s)) = 1 \text{ при } \vec{x}\in G_s, \tag{1}$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{при} \quad \vec{x}\notin(-1;1)^s, \tag{2}$$

$$\left|\int\limits_{-1}^{1}\ldots\int\limits_{-1}^{1}\rho(\vec{x})e^{2\pi i(\vec{\sigma},\vec{x})}d\vec{x}\right| \leqslant B(\overline{\sigma}_1\ldots\overline{\sigma}_s)^{-r} \quad \text{для любого} \quad \vec{\sigma}\in\mathbb{R}^s. \tag{3}$$

Если выполнены условия (1) и (2), то говорим просто о весовой функции $\rho(\vec{x})$. Простейшим примером весовой функции является функция $\rho_1(\vec{x}) = \rho_1(x_1)\cdot\ldots\cdot\rho_1(x_s)$, где

$$\rho_1(x) = \begin{cases} 1-|x|, & \text{при } |x|\leqslant 1,\\ 0, & \text{при } |x|>1. \end{cases}$$

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \tag{4}$$

неприводим над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и все корни Θ_ν $(\nu = 1,\ldots,s)$ многочлена (4) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1,\ldots,\Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1\\ \Theta_1 & \ldots & \Theta_s\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \Theta_1^{s-1} & \ldots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1,\ldots,\Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t>0$ решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t\cdot T(\vec{a})) = \left\{\vec{x} = \left(t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_1^{\nu-1}m_\nu,\ldots,t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_s^{\nu-1}m_\nu\right) = t\cdot\vec{m}\cdot T(\vec{a})\,\middle|\,\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\right\}.$$

Таким образом, алгебраическая решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ имеет базис $\vec{\lambda}_\nu = t\cdot(\Theta_1^{\nu-1},\ldots,\Theta_s^{\nu-1})$ $(\nu = 1,\ldots,s)$. Нетрудно видеть, что $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))\cap\mathbb{Z}^s = \{t(m,\ldots,m)|m\in\mathbb{Z}\}$.

Совокупность $M\subset G_s$ точек $M_k = (\xi_1(k),\ldots,\xi_s(k))$ $\quad (k = 1\ldots N)$ называется *сеткой* M из N узлов, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные и являются значениями специальной весовой функции.

Лемма 1. *Для любого действительного σ выполняется неравенство*

$$\left|\int\limits_{-1}^{1}(1-|x|)e^{2\pi i\sigma x}dx\right| \leqslant (\overline{\sigma})^{-2}, \tag{6}$$

где $\overline{\sigma} = \max(1,|\sigma|)$.

Для произвольных целых $m_1,\ldots,m_s$ суммы $S_{M,\vec\rho}(m_1,\ldots,m_s)$, определённые равенством

$$S_{M,\vec\rho}(m_1,\ldots,m_s)=\sum_{k=1}^{N}\rho_k e^{2\pi i[m_1\xi_1(k)+\ldots+m_s\xi_s(k)]}, \tag{7}$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами.*

Пусть матрица $T=T(\vec a)$ и $t>0$. Рассмотрим алгебраическую сетку $M(t)=M'(t\cdot\Lambda(T))$ из $N'(t\cdot\Lambda(T))$ узлов $\vec x_k$ $(k=1,\ldots,N'(t\cdot\Lambda(T))\,)$ с весами

$$\rho_k=\rho_{\vec x_k}=(\det(t\cdot\Lambda(T)))^{-1}\sum_{\{\vec y\}=\vec x_k,\,\vec y\in M_1(t\cdot\Lambda(T))}\rho(\vec y)$$

и её тригонометрическую сумму с весами

$$S_{M(t),\vec\rho}(\vec m)=(\det(t\cdot\Lambda(T)))^{-1}\sum_{\vec x\in M(t)}\left(\sum_{\{\vec y\}=\vec x,\,\vec y\in M_1(t\cdot\Lambda(T))}\rho(\vec y)\right)e^{2\pi i(\vec m,\vec x)}.$$

Теорема 1. *Для алгебраической решётки $\Lambda(t\cdot T(\vec a))$ и произвольной весовой функции $\rho(\vec x)$ справедливо равенство*[3]

$$S_{M(t),\vec\rho}(\vec m)=\delta(\vec m)+\sum_{\vec x\in\Lambda(t\cdot T(\vec a))}{}' \int_{-1}^{1}\ldots\int_{-1}^{1}\rho(\vec y)e^{2\pi i(\vec y,\vec m-\vec x)}d\vec y, \tag{8}$$

где

$$\delta(\vec m)=\begin{cases}1, & \textit{при } \vec m=\vec 0;\\ 0, & \textit{при } \vec m\neq\vec 0,\ \vec m\in\mathbb{Z}^s.\end{cases}$$

Доказательство. См. [4]. □

С помощью леммы 1 доказываются следующие теоремы.

Теорема 2. *При $t\to\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec\rho_1}(\vec 0)=1+O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^2}\right). \tag{9}$$

Доказательство. См. [4]. □

Теорема 3. *При $t\to\infty$ для произвольного вектора $\vec m\neq\vec 0$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec\rho_1}(\vec m)=O\left(\frac{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^2\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^2}\right). \tag{10}$$

Доказательство. См. [4]. □

Цель данной работы — уточнить теорему 3.

---

[3] Здесь и далее символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена нулевая точка.

2. Новые оценки тригонометрических сумм алгебраических сеток

Теорему 3 можно уточнить. Сначала мы это сделаем для векторов $\vec{m}$ специального вида: $\vec{m} = t(m, \ldots, m)$, где $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$.

Теорема 4. *Для любого целого $m \neq 0$ и натурального t справедливо равенство*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(t(m, \ldots, m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right). \tag{11}$$

Доказательство. Действительно, если $\vec{m} = t(m, \ldots, m)$, и $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$, то по теореме 1 имеем:

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(t(m, \ldots, m)) = \sum_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a})) \setminus \{t(m, \ldots, m)\}} \int\limits_{-1}^{1} \ldots \int\limits_{-1}^{1} \rho(\vec{y}) e^{2\pi i (\vec{y}, \vec{x})} d\vec{y},$$

где $\{t(m, \ldots, m)\}$ — одноэлементное множество, состоящее из вектора $\vec{m} = t(m, \ldots, m)$. Так как при $\vec{x} = \vec{0}$ имеем:

$$\int\limits_{-1}^{1} \ldots \int\limits_{-1}^{1} \rho(\vec{y}) e^{2\pi i (\vec{y}, \vec{x})} d\vec{y} = 1,$$

то

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(t(m, \ldots, m)) = 1 + \sum_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a})) \setminus \{t(m, \ldots, m)\}}{}' \int\limits_{-1}^{1} \ldots \int\limits_{-1}^{1} \rho(\vec{y}) e^{2\pi i (\vec{y}, \vec{x})} d\vec{y}.$$

Поэтому, по лемме 1 получим

$$|S_{M(t),\vec{\rho}_1}(t(m, \ldots, m)) - 1| \leqslant \zeta_H(\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))|2) = O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right),$$

что и доказывает утверждение теоремы. □

Теперь рассмотрим случай, когда $\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ и, следовательно, $\vec{m} \neq t(m, \ldots, m)$ для любого $m \in \mathbb{Z}$.

Для решётки $\Lambda = \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ определим вектора $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1, \ldots, n_s)$ и $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ из условий $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \in \Lambda$, $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{m}) + \vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ и произведение $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) = \overline{n_1} \cdot \ldots \cdot \overline{n_s}$ минимально. Ясно, что существует константа $C(\Lambda) \geqslant 1$ такая, что для любого вектора $\vec{m}$ имеем $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) \leqslant C(\Lambda)$.

Теорема 5. *При $t \to \infty$ для произвольного вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$ и $\vec{m} \notin \Lambda$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{m}) = \begin{cases} \frac{1}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^2} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^2 \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \neq \vec{0}, \\ O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^2 \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) = \vec{0}. \end{cases} \tag{12}$$

Доказательство. Действительно, согласно теореме 1 и лемме 1 имеем:

$$\left|S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{m})\right| \leqslant \sum_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))}{}' \frac{1}{(\overline{m_1 - x_1} \ldots \overline{m_s - x_s})^2}.$$

Если $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) = \vec{0}$, то

$$\sum_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))}{}' \frac{1}{(\overline{m_1 - x_1} \ldots \overline{m_s - x_s})^2} = \sum_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))}{}' \frac{1}{(\overline{n_1 - x_1} \ldots \overline{n_s - x_s})^2}.$$

Если $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \neq \vec{0}$, то

$$\sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))}{}' \frac{1}{(\overline{m_1-x_1}\ldots\overline{m_s-x_s})^2} = \frac{1}{(\overline{n_1}\ldots\overline{n_s})^2} + \sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))\setminus\{-\vec{k}_\Lambda(\vec{m})\}}{}' \frac{1}{(\overline{n_1-x_1}\ldots\overline{n_s-x_s})^2}.$$

Воспользуемся неравенством

$$\frac{1}{\overline{\overline{n-x}}} \leqslant \frac{2\overline{n}}{\overline{x}}, \tag{13}$$

которое доказывается непосредственно, получим

$$\left|S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{m})\right| \leqslant \frac{1-\delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^2} + \sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))}{}' \frac{4^s(\overline{n_1}\ldots\overline{n_s})^2}{(\overline{x_1}\ldots\overline{x_s})^2} =$$

$$= \frac{1-\delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^2} + 4^s(q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})))^2\zeta(\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))|2).$$

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 9, получим доказываемое утверждение. □

3. Заключение

Несомненно, что последнюю теорему можно уточнить, если вместо грубого неравенства (13) использовать более точные неравенства, но это требует дальнейших исследований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рарова Е. М. Разложение тригонометрической суммы сетки с весами в ряд по точкам решетки // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 37–49.

2. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы сетки с весами для целочисленной решётки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 3. С. 34–39.

3. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы алгебраических сеток // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогичекий университет им. Л. Н. Толстого. 2015. С. 356–359.

4. Рарова Е. М. О взвешенном числе точек алгебраической сетки // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 200–219.

5. Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Басалов Ю. А. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК»: Моногр. В 2 ч. Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. – Ч. I. – 232 с.

REFERENCES

1. Rarova E. M., 2014, "Decomposition of the trigonometric sum of a grid with weights in a series by lattice points", *Proceedings of Tula state University. Natural science*, vol. 1, part 1, pp. 37–49.

2. Rarova E. M., 2014, "Trigonometric grid sums with weights for integer lattice", *Proceedings of Tula state University. Natural science*, № 3, pp. 34–39.

3. Rarova E. M., 2015, "Trigonometric sums of algebraic nets", *In the collection: Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications Proceedings of the XIII International conference dedicated to the eighty-fifth anniversary of the birth of Professor Sergei Sergeevich Ryshkov. Tula state pedagogical University. L. N. Tolstoy*, pp. 356–359.

4. Rarova E. M., 2018, "Weighted number of points of algebraic net", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 200–219.

5. Rebrova I. Yu., Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Balaba I. N., Yesayan A. R., Basalov Yu. A. numerical Theoretic method in approximate analysis and its implementation in POIVS "TMK": Monogr. In Under 2 hours. ed. — Tula: Publishing house of Tula. state PED. UN-TA im. L. N. Tolstoy, 2016. – Part I. – 232 p.

Получено 18.03.2017 г.
Принято в печать 12.07.2019 г.