ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-383-390

Свойства элементов прямых произведений полей

В. Ю. Матвеев

Матвеев Владимир Юрьевич — аспирант кафедры теории чисел, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: salomaa@mail.ru

Аннотация

В статье рассказано об арифметических свойствах значений некоторых F -рядов. F -ряд — это ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n! \cdot z^n,$$

коэффициенты a_n которого принадлежат некоторому алгебраическому полю $\mathbb{K}$ конечной степени над полем $\mathbb{Q}$. При этом наибольшая из абсолютных величин сопряженных с a_n чисел не превосходит величину $e^{C_1 n}$, $n = 0, 1, \dots$. Кроме того, существует последовательность натуральных чисел $d_n = d_{0,n} q^n$, $q \in \mathbb{N}$, такая, что $d_n a_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $n = 0, 1, \dots$, $k = 0, 1, \dots, n$. При этом $d_{0,n}$ делится только на простые числа p , $p \leq C_2 n$ и

$$\text{ord}_p d_{0,n} \leq C_3 \left(\log_p^n + \frac{n}{p^2} \right).$$

Устанавливается некоторая общая теорема, подобная теореме В.Х. Салихова для E -функций. Эта теорема дает условие алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ для F -рядов, каждый из которых является решением линейного дифференциального уравнения первого порядка. Приведем примеры применения этой общей теоремы к некоторым гипергеометрическим рядам.

Полученные результаты позволяют применять общие теоремы В.Г. Чирского об арифметических свойствах значений F -рядов.

В результате получено, что значения рассматриваемых рядов как в алгебраических точках, так и в полиадических точках, хорошо приближаемых натуральными числами, бесконечно алгебраически независимы.

В работе также упомянуты некоторые приложения полиадических и почти полиадических чисел к ряду задач.

Ключевые слова: F — ряды, бесконечная алгебраическая независимость, полиадические числа.

Библиография: 26 названий.

Для цитирования:

В. Ю. Матвеев. Свойства элементов прямых произведений полей // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 383–390.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-383-390

Properties of elements of direct products of fields

V. Yu. Matveev

Matveev Vladimir Yurievich — Postgraduate student, Department of Theory of Number, Moscow Pedagogical State University (Moscow).

e-mail: salomaa@mail.ru

Abstract

The paper describes certain arithmetic properties of values of F -series, i.e. of series of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n! \cdot z^n.$$

Here $a_n \in \mathbb{K}$, a certain algebraic number field of a finite degree over $\mathbb{Q}$. The maximum of the absolute values of the conjugates to a_n doesn't exceed $e^{C_1 n}$.

Also there exists a sequence of rational integers

$$d_n = d_{0,n} q^n, \quad q \in \mathbb{N}, \quad n = 0, 1, \dots \text{ such that } d_n a_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, \quad n = 0, 1, \dots, k = 0, 1, \dots, n.$$

Meanwhile $d_{0,n}$ is divisible only by primes p , $p \leq C_2 n$ and

$$\text{ord}_p d_{0,n} \leq C_3 \left(\log_p^n + \frac{n}{p^2} \right).$$

Some general theorem is proved in analogy to Salikhov's theorem for the E -functions.

It gives conditions of the algebraic independence over $\mathbb{C}(z)$ of a set of F -series, each being a solution of a linear differential equation of the first order.

Certain applications to hypergeometric series are given.

The results allow to apply general theorems after V.G. Chirskii on the arithmetic properties of the values of F -series.

The result is that the values of the considered series at algebraic points, as well as at polyadic points, which are well approximable by rational integers, are infinitely algebraically independent.

The paper also mentions some applications of polyadic and almost polyadic numbers to some practical problems.

Keywords: F – series, infinite algebraic independence, polyadic numbers.

Bibliography: 26 titles.

For citation:

V. Yu. Matveev, 2019, "Properties of elements of direct products of fields", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 383–390.

1. Введение

Основные понятия теории полиадических чисел изложены в книге А. Г. Постникова [1]. Подробное изложение метода Зигеля–Шидловского содержится в книге А. Б. Шидловского [2]. Теория арифметических свойств F -рядов рассматривается в работах [3]–[26].

2. Основная часть. Формулировки теорем

Назовем полиадическое число $\mathbf{a}$ *алгебраическим*, если существует отличный от нуля многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что полиадическое число $P(\mathbf{a})$ равно нулю, т.е. для любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено равенство $P(a^{(p)}) = 0$.

Полиадическое число, которое не является алгебраическим, естественно называть *трансцендентным полиадическим числом*. В этом случае для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует хотя бы одно простое число p такое, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Будем называть полиадическое число *бесконечно трансцендентным*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Наконец, будем называть полиадическое число *глобально трансцендентным*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Отметим, что из бесконечной трансцендентности $\mathbf{a}$ не следует трансцендентность $a^{(p)}$ хотя бы для одного простого числа p .

Назовем полиадические числа $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ *алгебраически зависимыми*, если существует отличный от нуля многочлен $P(x_1, \dots, x_m)$ с целыми коэффициентами такой, что полиадическое число $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$ равно нулю, т.е. для любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено равенство $P(a_1^{(p)}, \dots, a_m^{(p)}) = 0$.

Полиадические числа $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ называются *алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1, \dots, x_m)$ с целыми коэффициентами существует хотя бы одно простое число p такое, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)}, \dots, a_m^{(p)}) \neq 0$.

Будем называть полиадические числа *бесконечно алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1, \dots, x_m)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)}, \dots, a_m^{(p)}) \neq 0$.

Наконец, будем называть полиадические числа *глобально алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1, \dots, x_m)$ с целыми коэффициентами и любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)}, \dots, a_m^{(p)}) \neq 0$.

Термин *почти полиадическое число* использован для обозначения того случая, когда рассматриваемый ряд сходится во всех полях $\mathbb{Q}_p$, кроме, быть может, конечного их числа.

Термины *алгебраическое почти полиадическое число*, *трансцендентное почти полиадическое число*, *бесконечно трансцендентное почти полиадическое число*, *глобально трансцендентное почти полиадическое число*, *алгебраически зависимые почти полиадические числа*, *алгебраически независимые почти полиадические числа*, *бесконечно алгебраически независимые почти полиадические числа*, *глобально алгебраически независимые почти полиадические числа* определяются аналогично.

Отметим, что из бесконечной трансцендентности $\mathbf{a}$ не следует трансцендентность $a^{(p)}$ хотя бы для одного простого числа p .

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$f_1(z), \dots, f_m(z) \quad (1)$$

представляют собой трансцендентные F -ряды с целыми коэффициентами, составляющие решение системы вида

$$P_{1,i}y'_i + P_{0,i}y_i = Q_i, i = 1, \dots, m \quad (2)$$

где $P_{0,i}, P_{1,i}, Q_i \in \mathbb{Q}(z)$.

Пусть $\xi \in \mathbb{Z}$, $\xi \neq 0$, ξ отлично от особых точек системы (2), а также выполняются следующие условия:

$$\exp \left(\int \left(\frac{P_{0,i}(z)}{P_{1,i}(z)} - \frac{P_{0,j}(z)}{P_{1,j}(z)} \right) dz \right) \notin \mathbb{C}(z), \quad i \neq j. \quad (3)$$

Тогда почти полиадические числа $\alpha_1 = f_1(\xi), \dots, f_m(\xi) = \alpha_m$ бесконечно алгебраически независимы.

Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраическое числовое поле конечной степени k над полем $\mathbb{Q}$

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$f_1(z), \dots, f_m(z) \quad (4)$$

представляют собой трансцендентные F -ряды с целыми коэффициентами, составляющие решение системы вида

$$P_{1,i}y'_i + P_{0,i}y_i = Q_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (5)$$

где $P_{0,i}, P_{1,i}, Q_i \in \mathbb{Q}(z)$,

а также выполняются следующие условия:

$$\exp \left(\int \left(\frac{P_{0,i}(z)}{P_{1,i}(z)} - \frac{P_{0,j}(z)}{P_{1,j}(z)} \right) dz \right) \notin \mathbb{C}(z), \quad i \neq j. \quad (6)$$

Пусть θ_k – целые числа из $\mathbb{K}$ и

$$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k, \quad \Theta_n = \sum_{i=1}^n \theta_i.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1$, $d \in \mathbb{N}$, $M = \binom{m+d}{m}$ и существует бесконечное множество номеров n таких, что для всех простых чисел p таких, что $p \leq \exp(\ln^{1+2\varepsilon} |\overline{\Theta_n}|)$, и любого нормирования v , продолжающего p – адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, выполнено неравенство

$$|\xi - \Theta_n|_v < \exp \left(- (M - 1 + \delta) \exp(\ln^{1+\varepsilon} |\overline{\Theta_n}|) \ln^{1+2\varepsilon} |\overline{\Theta_n}| \right).$$

Пусть последовательность h_n определена равенством

$$\ln h_n = \delta \exp(\ln^{1+\varepsilon} |\overline{\Theta_n}|) \ln^{1+\varepsilon} |\overline{\Theta_n}| - c_4 \exp(\ln^{1+\varepsilon} |\overline{\Theta_n}|) \ln^{(1+\varepsilon)/2} |\overline{\Theta_n}|,$$

где $c_4 = 2 + c_5$ при $\varepsilon \leq 1$ и $c_4 = 2$ при $\varepsilon < 1$, а

$$c_5 = M^2 (c_1^* \log_p q^* + 1.25c_2^*c_3^* + 2c_3^* + 5).$$

Тогда существует эффективная постоянная n_0 такая, что для любого отличного от тождественного нуля многочлена $P(y_1, \dots, y_m)$ степени d по совокупности переменных с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, высота которого h удовлетворяет условиям $h_{n-1} < h \leq h_n$ при $n > n_0$, существует простое число p в интервале

$$|\overline{\Theta_n}| \leq p \leq M \exp(\ln^{1+\varepsilon} |\overline{\Theta_n}|)$$

и нормирование v , продолжающее p – адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, такие, что в поле $\mathbb{K}_v$

$$\begin{aligned} |P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi))|_v &\geq \exp \left(-\ln h + \left(-\frac{M-1}{\delta} - \frac{c_4(M-1)(1-\delta)}{\delta (\ln \ln h_n)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)}} \right) \ln h_n \right) \\ &= \exp(-B(h, h_n)). \end{aligned}$$

Иными словами, $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$ бесконечно алгебраически независимые почти полиадические числа.

Пусть $\Phi(k, N)$ – N – кратное возведение в степень и $n_N = \Phi(k, N)$.

$$\Phi(k, N) = \underbrace{k^{k \dots k}}_{N \text{ кратное возведение в степень}}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любых натуральных чисел k, N и всякого простого числа p ряд

$$\xi = \sum_{m=0}^{\infty} (n_m)!$$

представляет собой трансцендентный над $\mathbb{Q}$ элемент $\mathbb{Z}_p$ и удовлетворяет условию теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$f_1(z), \dots, f_m(z) \quad (7)$$

представляют собой трансцендентные F -ряды с целыми коэффициентами, составляющие решение системы вида

$$P_{1,i}y'_i + P_{0,i}y_i = Q_i, i = 1, \dots, m \quad (8)$$

где $P_{0,i}, P_{1,i}, Q_i \in \mathbb{Q}(z)$.

Пусть выполняются следующие условия:

$$\exp \left(\int \left(\frac{P_{0,i}(z)}{P_{1,i}(z)} - \frac{P_{0,j}(z)}{P_{1,j}(z)} \right) dz \right) \notin \mathbb{C}(z), \quad i \neq j. \quad (9)$$

тогда ряды $f_1(z), \dots, f_m(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.

ТЕОРЕМА 4. Почти полиадические числа $\mathbf{a}_i$, определенные равенствами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_i (a_i + b_i) \dots (a_i + (n-1)b_i) = \mathbf{a}_i, \quad (10)$$

где $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $(a_i, b_i) = 1$, $i = 1, \dots, m$;

$$\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_j}{b_j} \notin \mathbb{Z}, \quad i \neq j$$

бесконечно алгебраически независимы.

Уточним теорему 4 в представляющем интерес частном случае.

ТЕОРЕМА 5. Для любого ненулевого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ существует бесконечное множество непересекающихся интервалов

$(P_n(\ln H), P_6(\ln H))$, где $P_n(x), P_6(x)$ определены равенствами

$$P_n(x) = \ell \left(\frac{x}{\ln x} \right), \quad P_6(x) = u \left(\frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{2(m+3 + (m-1)c_5)}{(\ln(\frac{x}{\ln x}))^{\frac{1}{2}}} \right) \right)$$

, в каждом из этих интервалов содержится простое число p такое, что в поле $\mathbb{Q}_p$ элемент $\mathbf{a} \in \mathbb{Q}_p$, определенный равенством

$$\mathbf{a} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\lambda+1) \dots (\lambda+(n-1)) b^n$$

, удовлетворяет неравенству $P(\mathbf{a}) \neq 0$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть числа $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ определяются условиями: при $s \geq \sigma_1$ выполнено $s > (|\lambda| - \frac{1}{2}) \ln s$, при $s \geq \sigma_2$ выполнены неравенства $s \geq \sigma_1$ и $(s+1)\sqrt{\ln s} \geq \ln(s+1)e^{\sqrt[4]{\ln s}}$, при $s \geq \sigma_3$ выполнены неравенства $s \geq \sigma_2$ и $\ln s > C_1 + 3\sqrt{\ln s}$. Рассматриваем теперь последовательность $s_k \in \mathbb{N}$ такую, что $s_1 \geq \sigma_3$ и для каждого $k \geq 1$ выполняются неравенства

$$e^{\sqrt[4]{\ln s_{k+1}}} > a + b s_k.$$

Тогда отрезки

$$\left[e^{\sqrt[4]{\ln s_k}}, a + b s_k \right], \quad k = 1, 2, \dots$$

не пересекаются и в каждом из них есть простое число p такое, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполнено неравенство.

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a(a+b) \dots (a+b(n-1)) \neq 0 \quad (11)$$

ТЕОРЕМА 7. Пусть ξ - полиадическое число, обладающее следующими свойствами:

(i) Существует бесконечное множество полиадических чисел $\tau_s, s \in \mathbb{N}$ таких, что

$$\xi = \beta_s + \tau_s, \quad \beta_s \in \mathbb{N}, \quad \beta_s \leq C_1 e^{\sqrt{\ln s}} \quad (12)$$

(ii) Для всех простых чисел $p, p \leq a + bs$, выполнено неравенство

$$|\tau_s|_p = |\xi - \beta_s|_p < e^{-s \ln s - 2s\sqrt{\ln s} - C_2 s}. \quad (13)$$

Тогда существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ справедливо неравенство

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\lambda+1) \dots (\lambda+(n-1)) \xi^n \neq 0. \quad (14)$$

ТЕОРЕМА 8. Асимптотическая оценка длины k разложения

$$N = \sum_{n=1}^k a_n \cdot n!, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, n\}, a_k \neq 0$$

имеет вид

$$k \sim \frac{\ln N}{\ln \ln N}, \quad N \rightarrow +\infty.$$

Количество вспомогательных вычислений, используемых в алгоритме полиадического разложения числа N , имеет асимптотическую оценку с главным членом вида

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\ln N}{\ln \ln N} \right)^2, \quad n \rightarrow +\infty.$$

3. Заключение

В работе получены теоремы об арифметических свойствах значений некоторых F -рядов. Кроме того указаны возможные приложения теории полиадических чисел, открывающие дальнейшие перспективы для исследований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971.
2. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: "Наука", 1987. 417 с.
3. Чирский В. Г. О нетривиальных глобальных соотношениях // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1989, № 5. С. 33–36.
4. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций // Мат. заметки. 1992. Т. 52. № 2. С. 125–131.
5. Чирский В. Г. Оценки многочленов и линейных форм в прямых произведениях полей // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1994. № 4. С. 35–39.
6. Чирский В. Г. О глобальных соотношениях для гипергеометрических рядов // Труды семина. им. И. Г. Петровского. 1995, № 18. С. 204–212.
7. Чирский В. Г. О линейных глобальных соотношениях // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1998, № 4. С. 70–72.
8. Чирский В. Г., Шакиров Р. Ф. О представлении натуральных чисел с использованием нескольких оснований. М. Чебышевский сборник. 2013, № 1.
9. Chirskii V. G. On the arithmetic properties of polyadic integers // International Mathematical Forum. Vol. 8. 2013, no. 37, 1793–1796.
10. Чирский В. Г. Арифметические свойства целых полиадических чисел, 2015, *Чебышевский сборник*, том 16, вып. 1, с. 254–264.
11. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами, 2014, *Доклады Академии наук, математика*, т. 439, № 6, с. 677–679.
12. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщенных гипергеометрических F – рядов // Доклады Академии Наук, 2018, сер. Матем. т. 483, №3, 257–259. Перевод Doklady math.v.98, N.3, pp. 589–591.
13. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН, 2017, т. 81, №2, с. 215–232. Перевод Izvestiya Math., v. 81, no. 2, pp. 444–461.
14. Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic numbers // Russian Journal of Mathematical Physics, 2019, v. 26, no. 3, pp. 286–305.
15. Chirskii V. G. Topical problems of the theory of transcendental numbers // Developments of approach to their solutions in the works of Yu. V. Nesterenko. Russian Journal of Mathematical Physics, 2017, v. 24, no. 2, pp. 153–171.
16. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Изв. РАН. Сер. матем., 78:6 (2014), 193–210; Izv. Math., 78:6 (2014), 1244–1260.
17. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2015, №1, 59–61; Moscow University Mathematics Bulletin, 70:1 (2015), 41–43.

18. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О представлениях натуральных чисел // Вестник Московского университета, сер. 1, математика, механика. 2013. №6 с. 57–59; "Representations of positive integers", Moscow University Mathematics Bulletin, 68:6 (2013), 307–308.
19. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О ряде из произведений членов арифметической прогрессии // Преподаватель 21 век, № 4, 2013.
20. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О представлениях натуральных чисел // Чебышевский сборник, т. 14, вып. 1(45), 2013, с. 91–101.
21. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О некоторых свойствах полиадических разложений // Чебышевский сборник, т. 14, вып. 2(46), 2013, с. 163–171.
22. Матвеев В. Ю. О значениях некоторого ряда в полиадических точках, хорошо приближаемых натуральными числами // Преподаватель 21 век, № 4, 2013.
23. Матвеев В. Ю. Алгебраическая независимость некоторых почти полиадических рядов // Чебышевский сборник, т. 16, вып. 3, 2015, с. 339–354.
24. Матвеев В. Ю. Алгебраическая независимость некоторых почти полиадических рядов // Чебышевский сборник, т. 17, вып. 3, 2016, с. 156–167.
25. Матвеев В. Ю. О бесконечной алгебраической независимости некоторых полиадических чисел // Материалы международной конференции «Математика и информатика», Москва, (13–17 марта 2016 года), с. 125–126.
26. Азаматов Т. Р. Эффективные оценки для обобщенных глобальных соотношений // УМН, 62:5(377) (2007), с. 145–146.

Получено 18.05.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.