ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 2.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-2-374-382

# Арифметические свойства рядов некоторых классов

Е. С. Крупицын

**Крупицын Евгений Станиславович** — старший преподаватель кафедры теории чисел, Институт математики и информатики, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
*e-mail: krupitsin@gmail.com*

**Аннотация**

В статье рассматриваются свойства лиувиллевых чисел в $p$-адической, $g$-адической и полиадической областях. Каноническое представление $p$-адического числа имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

Каноническое представление $g$-адического числа имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n g^n, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, g-1\}.$$

Каноническое представление полиадического числа имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Основная цель работы — получение оценок снизу норм в соответствующих областях от значений ненулевых многочленов с целыми коэффициентами, вычисленных при подстановке вместо переменных рассматриваемых совокупностей, соответственно, $p$-адических, $g$-адических и полиадических лиувиллевых чисел.

Тем самым, в случае полиадических чисел, доказывается их глобальная трансцендентность и глобальная алгебраическая независимость.

Отметим, что в случае, когда оценивается обычная абсолютная величина значения многочлена от совокупности действительных лиувиллевых чисел, основная трудность состоит в доказательстве отличия от нуля значения этого многочлена в приближающей точке.

В настоящей работе, в случае $p$-адических? $g$-адических и полиадических чисел эту трудность удается обойти, используя известную алгебраическую лемму о величине корней многочлена.

Кроме того, в работе известная теорема П. Эрдёша о представлении действительного числа суммой двух лиувиллевых чисел переносится на случаи $p$-адических, $g$-адических и полиадических чисел.

*Ключевые слова:* оценка многочлена, $p$-адическое число, $g$-адическое число, полиадическое число, трансцендентность.

*Библиография:* 19 названий.

**Для цитирования:**
Е. С. Крупицын. Арифметические свойства рядов некоторых классов // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 374–382.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-2-374-382

# Arithmetic properties of series of some classes

E. S. Krupitsyn

**Krupitsyn Evgeny Stanislavovich** — Senior Lecturer, Department of Number Theory, Institute of Mathematics and Computer Science, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
*e-mail: krupitsin@gmail.com*

**Abstract**

The paper studies properties of Liouvillean numbers in $p$-adic, $g$-adic, polyadic domains. The canonical representation of $p$-adic integer is

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

For a $g$-adic integer it is of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n g^n, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, g-1\}.$$

Polyadic integers are of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

The main purpose of this work is to estimate from below the correspponding norm of the elements, which is the result of substitution of $p$-adic, $g$-adic or polyadic integers for the variables into a non-zero polynomial with integer coefficients.

Therefore, in the case of polyadic integers, we prove the global transcendence and global algebraic independence.

Note that when we evaluate the usual absolute value of the considered polynomial, the main difficulty arises to prove the nonvanishing of this polynomial at the approximating point.

In $p$-adic, $g$-adic, polyadic cases we avoid it using a well known algebraic lemma on the values of roots of the polynomial.

Besides the paper gives some generalization of a theorem by P. Erdös on representation of real number as a sum of two Liouvillean numbers to the cases of $p$-adic, $g$-adic and polyadic numbers.

*Keywords:* $p$-adic integer, $g$-adic integer, polyadic integer, estimates of polynomials.

*Bibliography:* 19 titles.

**For citation:**
E. S. Krupitsyn, 2019, "Arithmetic properties of series of some classes", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 374–382.

## 1. Введение

В 1844 г. Ж. Лиувилль [1] рассмотрел действительные числа, допускающие сколь угодно высокий порядок приближения рациональными числами и доказал их трансцендентность. В 1972 году Цайсов [2] установил оценку меры трансцендентности некоторых лиувиллевых чисел.

Для каждого простого числа $p$ определено $p$-адическое нормирование поля рациональных чисел: для любого $a \in \mathbb{Q}$, $a = \dfrac{c}{b}$

$$|a|_p = \begin{cases} p^{\nu_p(b)-\nu_p(c)}, a \neq 0, \\ 0, a = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Определённая равенствами (1) величина обладает всеми свойствами нормы. Помимо свойства $|a+b|_p \leqslant |a|_p + |b|_p$ выполняется более сильное неравенство

$$|a+b|_p \leqslant \max(|a|_p, |b|_p), \tag{2}$$

и если $|a|_p \neq |b|_p$, то

$$|a+b|_p = \max(|a|_p, |b|_p). \tag{3}$$

Из определения $p$-адической нормы (1) сразу вытекает формула (назваемая формулой произведения): если $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$, то

$$|x| \prod |x|_p = 1, \tag{4}$$

где произведение в левой части взято по всем $p$-адическим нормированиям поля $\mathbb{Q}$.

Пополнение $\mathbb{Q}$ по норме $| \, |_p$ называется полем $p$-адических чисел.

Пусть $g \in \mathbb{N}$. Если $g = p$ — простое число, то $\mathbb{Q}_p$ — поле $p$-адических чисел, см. [7, гл. 1, §3]. Если $g$ — составное число, то $\mathbb{Q}_g$ — кольцо $g$-адических чисел, в котором можно определить псевдо-нормирование. Пусть $r, s$ и $g$ — целые числа, такие что

$$r \neq 0, \quad s \geqslant 1, \quad \textbf{НОД } (r,s) = 1, \quad g \geqslant 2.$$

и $a = \dfrac{r}{s}$, при $a \neq 0$, положим

$$|a|_g = g^f, \quad |0|_g = 0.$$

Так определённая функция $|x|_g$ называется $g$-адической псевдо-нормой $x$. Неравенство

$$\left|\frac{r}{s}\right|_g \leqslant 1$$

выполняется при условии

$$\textbf{НОД } (g,s) = 1.$$

Числа, для которых выполняется данное свойство называются целыми $g$-адическими.

Приняв в качестве полной системы окрестностей $O$ кольца $\mathbb{Z}$ целых рациональных чисел систему идеалов $(m)$, $1 \leqslant m < +\infty$, можно превратить $\mathbb{Z}$ в топологическое кольцо с недискретной топологией.

Полученную топологию в $\mathbb{Z}$ называют полиадической. Символом $\mathbb{Z}_\tau$ обозначают кольцо $\mathbb{Z}$ в полиадической топологии. Можно доказать, что $\mathbb{Z}_\tau$ обладает полной несвязностью и, что кольцо $\mathbb{Z}_\tau$ можно сделать метрическим простанством.

Обозначим $\mathbb{Z}_\tau$ — кольцо целых чисел с топологией $\tau$, в которой идеалы $(m)$ задают полную систему окрестностей нуля аддитивной группы целых чисел. На этом кольце можно ввести расстояние:

$$\rho(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta_m(x,y)}{2^m}, \tag{5}$$

где

$$\delta_m(x,y) = \begin{cases} 0, \text{если } x \equiv y \pmod{m}, \\ 1, \text{если } x \not\equiv y \pmod{m}. \end{cases} \tag{6}$$

Бесконечная последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in \mathbb{Z}$ называется фундаментальной, если для любого $K \in \mathbb{N}$ существует $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$, такое что для всех $m, n > \mathcal{N}$ имеет место сравнение $x_m \equiv x_n \pmod{K!}$.

Фундаментальные последовательности элементов $\mathbb{Z}_\tau$ образуют кольцо.

Последовательность $\{z_n\}$ называется нулевой последовательностью, если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, где предел понимается в смысле топологии кольца $\mathbb{Z}_\tau$. Фундаментальные последовательности называются эквивалентными, если их разность является нулевой последовательностью.

Полиадическим числом называется класс эквивалентных фундаментальных последовательностей.

Пополнение $\mathbb{Z}_\tau$ приводит к топологическому пространству $\mathfrak{G}_\tau$, называемому кольцом целых полиадических чисел. Это кольцо можно метризовать следующим образом. Пусть $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}_\tau$ состоит из последовательностей $\{\alpha_k\}$, а $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}_\tau$ состоит из посдедовательностей $\{\beta_k\}$. Положим полиадическое расстояние $\rho(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ равным

$$\rho(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \lim_{k\to\infty} \rho(\alpha_k, \beta_k). \tag{7}$$

Элемент $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}_\tau$ можно представить каноническим рядом

$$\mathfrak{a} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n!, \tag{8}$$

где $a_n \in \{0, 1, \dots, n\}$. Такой ряд сходится в любом поле $\mathbb{Q}_p$, так как степень, в которой простое число $p$ входит в разложение числа $n!$ на простые множители равна

$$\frac{n - S_n}{p - 1},$$

где $S_n$ — сумма цифр в $p$-ичном разложении числа $n$, при этом

$$|a_n \cdot n!|_p \to 0,$$

что является необходимым и достаточным условием сходимости ряда (8) в $\mathbb{Q}_p$.

Представление вида (8) элемента $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}_\tau$ — частный случай представления более общего вида. Пусть $\pi(k) = \mathcal{N}_1 \cdot \ldots \cdot \mathcal{N}_k$, $\mathcal{N}_i \in \mathbb{N}$, причём $\mathcal{N}_1 = 1, \mathcal{N}_k > 1$ при $k > 1$ и $\pi(k) \to 0$ в смысле топологии кольца $\mathbb{Z}_\tau$. Любое $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}_\tau$ можно представить единственным образом представить в виде

$$\mathfrak{a} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \pi(k),\ 0 \leqslant a_k \leqslant \mathcal{N}_{k+1} - 1. \tag{9}$$

Кольцо $\mathfrak{G}_\tau$ представляет собой прямое произведение колец $\mathbb{Z}_{p_i}$ по всем простым $p_i$.

Пусть $p_m$ обозначает простое число с номером $m$.

Целое полиадическое число $L$ будем называть лиувиллевым, если для любого $m \in \mathbb{N}$ существует число $A \in \mathbb{N}$ такое, что для любого простого числа $p \in \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ выполняется неравенство

$$|L - A|_p < A^{-m} \tag{10}$$

Кольцо целых полиадических чисел представляет собой прямое произведение колец целых $p$-адических чисел.

Арифметические свойства полиадических чисел и вопросы трансцендентности чисел рассмотрены в статьях [3] – [18].

## 2. Основной текст статьи

Пусть $\gamma(x)$ – возрастающая функция такая, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\gamma(x+1)}{\gamma(x)} = \infty$ и $\gamma(n) \in \mathbb{N}$ при $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $p$ – фиксированное простое число, $a(n), \gamma(n)$ – натуральнозначные функции такие, что $1 \leqslant a(n) < p$, $\gamma(n)$ возрастающая и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\gamma(n+1)}{\gamma(n)} = \infty$. Обозначим $\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a(n) p^{\gamma(n)}$.

Теорема 1. *Для любого натурального числа $d$ найдется постоянная $H_0(d)$ такая, что для каждого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени $d$ и высоты $H \geqslant H_0(d)$ выполняется неравенство*

$$|P(\alpha)|_p \geqslant \left( H \cdot (d+1) \cdot \left( \frac{p^2}{p-1} \right)^d p^{d(\gamma(\gamma^{-1}(\log_p H)+1))} \right)^{-1}.$$

Теорема 2. *Пусть*

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n!}. \tag{11}$$

*Тогда для любого натурального числа $d$ и любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $H_0 = H_0(\varepsilon, d)$ такая, что для любого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени $d$ и высоты $H \geqslant H_0$ выполняется неравенство*

$$|P(\alpha)|_p \geqslant \left( H(d+1) \left( \frac{p}{p-1} \right)^d \right)^{-1} H^{-d(\ln \log_p H)^{1+\varepsilon}}. \tag{12}$$

Пусть $\alpha_i = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n,i} p^{\gamma_i(n)}, i = 1, \ldots, m$, где $a_{n,i} \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant a_{n,i} < p$. Пусть функции $\gamma_i(x)$ возрастающие, такие что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_{i+1}(x)}{\gamma_i(x)} = \infty, \quad i = 1, \ldots, m-1 \tag{13}$$

и (14)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_1(n+1)}{\gamma_m(n)} = \infty \tag{15}$$

Теорема 3. *Для любого многочлена $P(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$, отличного от тождественного нуля, высоты $H$ и степени $d$ по совокупности переменных $x_1, \ldots, x_m$, при условии $H \geqslant H_0(d)$ выполнено неравенство*

$$|P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)|_p > H^{-1} \left( \frac{(d+m-1)!}{d!m!} \right)^{-1} \cdot \left( p^{\gamma_m(\tau^{-1}(H))+1} \right)^{-d} \tag{16}$$

Теорема 4. *Любое целое $p$-адическое число представимо суммой двух Лиувиллевых чисел.*

Пусть $g = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$, $a(n), \gamma(n)$ – натуральнозначные функции такие, что $1 \leqslant a(n) < g$, $\gamma(n)$ возрастающая и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\gamma(n+1)}{\gamma(n)} = \infty$. Обозначим $\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a(n) g^{\gamma(n)}$.

Теорема 5. *Для любого натурального числа $d$ найдется постоянная $H_0(d)$ такая, что для каждого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени $d$ и высоты $H \geqslant H_0(d)$ выполняется неравенство*

$$|P(\alpha)|_g \geqslant \left( H \cdot (d+1) \cdot \left( \frac{g^2}{g-1} \right)^d g^{d(\gamma(\gamma^{-1}(\log_g H)+1))} \right)^{-1}.$$

Теорема 6. *Пусть $\varepsilon > 0$,*

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} g^{n!}. \tag{17}$$

*Существует эффективная постоянная $H_0 = H_0(\varepsilon, d)$ такая, что для любого отличного от нуля многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени $d$ и высоты $H \geqslant H_0$ выполнена оценка*

$$|P(\alpha)|_g \geqslant \left( H(d+1) \left( \frac{g}{g-1} \right)^d \right)^{-d} H^{-d(\ln \log_g H)^{1+\varepsilon}}. \tag{18}$$

Пусть $\alpha_i = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n,i} g^{\gamma_i(n)}, i = 1, \ldots, m$, где $a_{n,i} \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant a_{n,i} < g$. Пусть функции $\gamma_i(x)$ возрастающие, такие что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_{i+1}(x)}{\gamma_i(x)} = \infty, \quad i = 1, \ldots, m-1 \tag{19}$$

и (20)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_1(n+1)}{\gamma_m(n)} = \infty \tag{21}$$

Теорема 7. *Для любого многочлена $P(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$, отличного от тождественного нуля, высоты $H$ и степени $d$ по совокупности переменных $x_1, \ldots, x_m$, при условии $H \geqslant H_0(d)$ выполнено неравенство*

$$|P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)|_g > H^{-1} \left( \frac{(d+m-1)!}{d!m!} \right)^{-1} \cdot \left( g^{\gamma_m(\tau^{-1}(H))+1} \right)^{-d} \tag{22}$$

Теорема 8. *Пусть*

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k n_k!, \quad a_k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant a_k \leqslant n_k, \quad n_k \in \mathbb{N}, \tag{23}$$

$$\frac{(n_k+1)\ln(n_k+1)}{n_k+1} \to 0 \text{ при } k \to +\infty. \tag{24}$$

*Пусть $\varepsilon(H) \to 0$ при $H \to +\infty$. Пусть $\widetilde{p} \in \mathbb{N}$. Тогда существует $H_0 = H_0(\widetilde{p})$ такая, что для любого простого числа $p \leqslant \widetilde{p}$ и любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, не превосходящими по абсолютной величине числа $H$, $H \geqslant H_0$, имеющего степень $m$, удовлетворяющую неравенству*

$$m\varepsilon(H) < \frac{\ln \widetilde{p}}{2(\widetilde{p}-1)} \tag{25}$$

*выполнено неравенство*

$$|P(\alpha)|_p > \frac{1}{m+1} \cdot H^{-1-\varepsilon^{-1}(H)\left(\ln\ln H + \ln \varepsilon^{-1}(H)\right)\cdot m}. \tag{26}$$

Теорема 9. *Пусть*

$$\alpha_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i}(\varphi_i(n))!, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{27}$$

*где*

$$a_{n,i} \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant a_{n,i} \leqslant \varphi_i(n), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{28}$$

*а функции $\varphi_i(n)$ принимают натуральные значения и удовлетворяют условиям*

$$\frac{\varphi_{i+1}(n)}{\varphi_i(n)\ln\varphi_i(n)} \to +\infty, \quad n \to +\infty, \quad i = 1, \ldots, m-1 \tag{29}$$

$$\frac{\varphi_1(n+1)}{\varphi_m(m)\ln\varphi_m(n)} \to +\infty, \quad n \to +\infty \tag{30}$$

$$\frac{\varphi_1(n)\ln\varphi_1(n)\,(\ln\varphi_m(n))^{\frac{3}{2}m}}{\varphi_m(n)} \to +\infty \quad n \to +\infty. \tag{31}$$

*Пусть $p_0 \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0, \delta = 1 - \dfrac{1}{(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}m+2}}$. Тогда существует число $H_0 = H_0(p_0, \varepsilon)$ такое, что для любого отличного от нулевого многочлена $P(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$ высоты $H$ и степени $d$ по совокупности переменных $x_1, \ldots, x_m$ при условиях $H \geqslant H_0$,*

$$\ln\frac{(d+m)!}{d!m!} \leqslant (1+\delta)\ln H \tag{32}$$

*для любого простого числа $p \leqslant p_0$ выполнено неравенство*

$$|P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)|_p > H^{-d(1+\varepsilon)(\ln\ln H)^{\frac{3}{2}m+1}}. \tag{33}$$

Теорема 10. *Любое целое полиадическое число $\alpha$ допускает представление в виде*

$$\alpha = L_1 + L_2, \tag{34}$$

*где $L_1, L_2$ — полиадические лиувиллевы числа.*

## 3. Заключение

В работе собраны результаты автора об оценках многочленов от $p$-адических, $g$-адических и полиадических чисел и некоторые результаты о представлении этих чисел в виде суммы двух лиувиллевых чисел.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Liouville. Sur des classes tres etendues de quantities don't la valeur n'est ni algebriques, ni meme reductible a des irrationelles algebriques. C.R. Acad.Sci.Paris, Ser. A, 18, 883–885.

2. Cijsow P. L. Transcendental measures. Doctoral Dissertation, Univ. Amsterdam., 1972, Zbl. 252.10031

3. Chirskii V. G. Topical problems of the theory of Transcendental numbers: Developments of approaches to tyeir solutions in the works of Yu.V. Nesterenko // Russian Journal of Mathematical Physics, vol. 24, № 2, 2017, p. 153–171.

4. Chirskii V. G.,Bertrand D.,Yebbou J. Effective estimates for global relations on Euler-type series, Ann. Fac. Sci. Toulouse, Vol. XIII, № 2, 2004, 241–260.

5. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. Серия математическая, т. 81, вып. 2, 2017, с. 215–232.

6. Чирский В. Г. О рядах, алгебраически независимых во всех локальных полях // Вестн. Моск. ун-та. — Сер. 1, матем., механ., № 3, 1978, с. 29–34.

7. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады академии наук, 2014, т. 459, № 6, с. 677–679.

8. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщённых гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН. Серия математическая, 2014, т. 786, вып. 6, с. 193–210.

9. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестник Московского ун-та. Сер. 1, матем., механ., 2015, № 1, с. 59–61.

10. Чирский В. Г. Оценки линейных форм и многочленов от совокупностей полиадических чисел // Чебышевский сборник, 2011, т. 12, № 4, с. 129–134.

11. Чирский В. Г. Арифметические свойства некоторых полиадических рядов // Вестник МГУ, сер. 1, матем., механ., 2012, № 5, с. 52–54.

12. Чирский В. Г. Полиадические оценки для $F$-рядов // Чебышёвский сборник, т. 13, вып. 2, 2012, с. 131–136.

13. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщенных гипергеометрических $F$-рядов // Доклады академии наук, 2018, т. 483, № 3, с. 257–259.

14. Chirskii V. G. Product Formula, Global Relations and Polyadic Numbers // Russian Journal of Math. Physics, 2019, v. 26, no. 3, pp. 286–305.

15. Крупицын Е. С. Оценка многочлена от полиадического лиувиллева числа // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики». 2017. С. 113–114.

16. Крупицын Е. С. Оценка многочлена от глобально трансцендентного полиадического числа // Чебышевский сборник, 2017, т. 18, вып. 4.

17. Чирский В. Г., Крупицын Е. С. Оценки многочленов от некоторых полиадических чисел // Преподаватель XXI век, 2012, № 4, с. 217–224.

18. Чирский В. Г. О рядах, алгебраически независимых во всех локальных полях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, матем., механ., 1994, № 3, с. 93–95.

19. Mahler K. $p$–adic numbers and their functions. London: Cambridge University Press, 1981.


## REFERENCES


1. J. Liouville. Sur des classes tres etendues de quantities don't la valeur n'est ni algebriques, ni meme reductible a des irrationelles algebriques. C.R. Acad.Sci.Paris, Ser.A, 18, 883–885.

2. Cijsow P. L. 1972, *Transcendental measures.* Doctoral Dissertation, Univ. Amsterdam. Zbl. 252.10031.

3. Chirskii V. G. 2017, "Topical problems of the theory of Transcendental numbers: Developments of approaches to tyeir solutions in the works of Yu.V. Nesterenko", *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol. 24, no 2, pp. 153–171.

4. Chirskii V. G., D. Bertrand, J. Yebbou 2004, "Effective estimates for global relations on Euler-type series", *Ann. Fac.Sci. Toulouse*, vol. XIII, no 2, pp. 241–260.

5. Chirskii V. G. 2017, "Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients", *Izvestiya: Mathematics*, vol. 81, iss. 2, pp. 215–232.

6. Chirskii V. G. 1978, "On series that are algebraically independent in all local fields", *Vestn. Moscow. University. Ser.1, Math., Mechan.*, no 3, pp. 29–34.

7. Chirskii V. G. 2014, "Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients", *Doklady Mathematics*, vol. 459, no 6, pp. 677–679.

8. Chirskii V. G. 2014, "On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters", *Izvestiya: Mathematics*, vol. 786, iss. 6, pp. 193–210.

9. Chirskii V. G. 2015, "On the arithmetic properties of the Euler series", *Vestn. Moscow. University. Ser. 1, Math., Mechan.*, no 1, pp. 59–61.

10. Chirskii V. G. 2011, "Estimates of linear forms and polynomials from sets of polyadic numbers", *Chebushevskii sb.*, vol. 12, no 4, pp. 129–134.

11. Chirskii V. G. 2012, "Arithmetic properties of some polyadic series", *Vestn. Moscow. University. Ser. 1, Math., Mechan.*, no 5, pp. 52–54.

12. Chirskii V. G. 2018, "Arithmetic properties of generalized hypergeometric $F$ -series", *Reports of the Academy of Sciences*, vol. 483, no. 3, pp. 257–259.

13. Chirskii V. G. 2019, "Product Formula, Global Relations and Polyadic Numbers", *Russian Journal of Math. Physics*, vol. 26, no. 3, pp. 286–305.

14. Chirskii V. G. 2012, "Polyadic estimates for $F$-series", *Chebushevskii sb.*, vol. 13, iss. 2, pp. 131–136.

15. Krupitsyn E. S. 2017, "Estimation of a polynomial from a polyadic Liouville number", *Materials of the international scientific conference «Actual problems of applied mathematics and physics»*, pp. 113–114.

16. Krupitsyn E. S. 2017, "Estimates of polynomials in a Liovillean polyadic integer", *Chebushevskii sb.*, vol. 18, iss. 4.

17. Chirskii V. G., Krupitsyn E. S. 2012, "Estimates of polynomials in some polyadic numbers", *Teacher of the XXI century*, no 4, pp. 217–224.

18. Chirskii V. G. 1994, "On series that are algebraically independent in all local fields", *Vestn. Moscow. University. Ser. 1, Math., Mechan.*, no 3, pp. 93–95.

19. Mahler K. $p$–adic numbers and their functions. London: Cambridge University Press, 1981.

Получено 18.05.2019 г.
Принято в печать 12.07.2019 г.