ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-366-373

**Приближение квадратичных алгебраических решёток
целочисленными решётками¹**

А. Н. Кормачева

Кормачева Антонина Николаевна — аспирант кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: juska789@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена вопросам приближения квадратичной алгебраической решётки целочисленной решёткой. В ней вычисляются расстояния между квадратичной алгебраической решёткой и целочисленной решёткой, когда они заданы числителем и знаменателем подходящей дроби к корню квадратному из простого числа p вида $p = 2$ или $p = 4k + 3$.

Результаты данной работы позволяют изучать вопросы о наилучших приближениях квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками.

Ключевые слова: квадратичные поля, приближение алгебраических решёток, метрическое пространство решёток.

Библиография: 6 названий.

Для цитирования:

А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 366–373.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-366-373

Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices²

A. N. Kormacheva

Kormacheva Antonina Nikolaevna — Postgraduate Student, Department of Algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: juska789@mail.ru

Abstract

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_r_a.

²Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

This paper is devoted to the approximation of a quadratic algebraic lattice by an integer lattice. It calculates the distances between a quadratic algebraic lattice and an integer lattice when they are given by the numerator and denominator of a suitable fraction to the square root of a Prime p of the form $p = 2$ or $p = 4k + 3$.

The results of this work allow us to study questions about the best approximations of quadratic algebraic lattices by integer lattices.

Keywords: quadratic fields, approximation of algebraic lattices, metric space of lattices.

Bibliography: 6 titles.

For citation:

A. N. Kormacheva, 2019, "Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 366–373.

1. Введение

В работе [5] рассматривалось квадратичное поле $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, где p — простое число и $p = 2$ или $p \equiv 3 \pmod{4}$. Для него кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_F$ имеет вид: $\mathbb{Z}_F = \{n + k\sqrt{p} | n, k \in \mathbb{Z}\}$.

Через $\Lambda(F)$ обозначается алгебраическая решётка поля F :

$$\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) | \Theta = \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}$$

и $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}$ — целые алгебраически сопряжённые числа.

Таким образом, $\Theta^{(1)} = n + k\sqrt{p}$, $\Theta^{(2)} = n - k\sqrt{p}$ $n, k \in \mathbb{Z}$ и $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}$ — корни уравнения $x^2 - 2nx + n^2 - pk^2 = 0$. Базис решётки $\Lambda(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (\sqrt{p}, -\sqrt{p})$, а детерминант решётки $\det \Lambda(F) = 2\sqrt{p}$.

Рассмотрим разложение $\sqrt{p}$ в цепную периодическую дробь:

$$\sqrt{p} = q_0 + [(q_1, \dots, q_n, 2q_0)] = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{2q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots}}}}}$$

с периодом $(q_1, \dots, q_n, 2q_0)$. Через $\frac{P_m}{Q_m}$ обозначается m -ая подходящая дробь к $\sqrt{p}$. Таким образом,

$$\sqrt{p} = \frac{P_m}{Q_m} + \frac{(-1)^m \theta_m}{Q_m^2}, \quad Q_m \sqrt{p} = P_m + \frac{(-1)^m \theta_m}{Q_m}, \quad 0 < \theta_m < 1 \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (1)$$

Через $\Lambda_m(F)$ обозначается алгебраическая решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(F) = \{(Q_m(n + k\sqrt{p}), Q_m(n - k\sqrt{p})) | n, k \in \mathbb{Z}\},$$

а через $\Lambda_m(p)$ — целочисленная решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(p) = \{(Q_m n + kP_m, Q_m n - kP_m) | n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Базис решётки $\Lambda_m(F)$ имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2} = (Q_m\sqrt{p}, -Q_m\sqrt{p})$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(F) = 2Q_m^2\sqrt{p}$.

Для целочисленной решётки $\Lambda_m(p)$ базис имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2,Z} = (P_m, -P_m)$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(p) = 2Q_m P_m$.

В работах [1], [4]–[6] двумерные решётки изучались с точки зрения построения двумерных параллелепипедальных сеток для квадратурных формул. В данной работе нас будет интересовать вопрос о приближении квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками в метрическом пространстве решёток.

Как известно (см. [3], стр.165) множество всех s -мерных решёток образуют полное метрическое пространство относительно метрики $\rho(\Lambda, \Gamma)$, которая задана равенствами

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1 + \mu), \ln(1 + \nu)), \quad \mu = \inf_{A \in \Lambda \cdot \Gamma} \|A - E_s\|, \quad \nu = \inf_{B \in \Lambda = \Gamma} \|B - E_s\|,$$

$$E_s = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq s}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad \|A\| = s \cdot \max_{1 \leq i, j \leq s} |a_{ij}|.$$

Цель данной работы — найти расстояние $\rho(\Lambda_m(F), \Lambda_m(p))$ для любого натурального m и простого p вида $p = 2$ или $p \equiv 3 \pmod{4}$.

2. Сведения из теории решёток

Так как все рассуждения мы проводим для двумерных решёток, то и необходимые сведения из геометрии чисел мы сформулируем только для размерности $s = 2$. Для удобства записи мы будем отождествлять вектор-строку $\vec{x} = (x_1, x_2)$ и транспонированный вектор-столбец

$$\vec{x}^\top = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Целочисленная решётка $\mathbb{Z}^2$ называется фундаментальной решёткой. Обозначим через $\mathbb{U}_2$ множество унимодулярных целочисленных матриц:

$$\mathbb{U}_2 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{Z}, \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \pm 1 \right\}.$$

$\mathbb{U}_2$ является группой автоморфизмов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^2$:

$$A\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}^2 \quad \text{для любой матрицы } A \in \mathbb{U}_2.$$

Тем самым задается бесконечное множество базисов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^2$:

$$\vec{\lambda}_{1A} = (a_{11}, a_{21}), \quad \vec{\lambda}_{2A} = (a_{12}, a_{22}) \quad \text{для любой матрицы } A \in \mathbb{U}_2.$$

Векторами такого типа исчерпываются все базисы фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^2$.

Через $\mathfrak{M}_2$ обозначим кольцо вещественных квадратных матриц второго порядка, а через $\mathfrak{M}_2^*$ — мультипликативную группу этого кольца.

Через $\mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$ обозначим кольцо целочисленных квадратных матриц второго порядка, а через $\mathfrak{M}_2^*(\mathbb{Z})$ — мультипликативный моноид этого кольца, состоящий из невырожденных целочисленных матриц. Очевидно, что $\mathbb{U}_2 \subset \mathfrak{M}_2^*(\mathbb{Z})$ и это максимальная мультипликативная группа кольца $\mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$.

Рассмотрим произвольную двумерную решётку Λ с базисом $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{11}, \lambda_{21})$, $\vec{\lambda}_2 = (\lambda_{12}, \lambda_{22})$, которая задается невырожденной базисной матрицей A :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = A\mathbb{Z}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1\lambda_{11} + m_2\lambda_{12} \\ m_1\lambda_{21} + m_2\lambda_{22} \end{pmatrix} \middle| m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ясно, что решётка Λ задается бесконечным множеством базисов, для которых соответствующая базисная матрица A' имеет вид $A' = AB$, где B — произвольная унимодулярная матрица из $\mathbb{U}_2$.

Если через $\text{Aut}(\Lambda)$ обозначить группу автоморфизмов решётки Λ , то нетрудно видеть, что $\text{Aut}(\Lambda) = A\mathbb{U}_2A^{-1}$, где A — произвольная базисная матрица решётки Λ .

Любые две двумерные решётки Λ и Γ изоморфны как абелевы группы. Обозначим множество изоморфизмов решётки Λ в Γ через $\text{Iso}(\Lambda, \Gamma)$. Если A — произвольная базисная матрица решётки Λ и B — решётки Γ , то $\text{Iso}(\Lambda, \Gamma) = B\mathbb{U}_2A^{-1}$, а $\text{Iso}(\Gamma, \Lambda) = A\mathbb{U}_2B^{-1}$.

Отсюда следует, что расстояние между двумя решётками можно записать следующим образом:

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1 + \mu), \ln(1 + \nu)), \quad \mu = \inf_{A \in \text{Iso}(\Gamma, \Lambda)} \|A - E_2\|, \quad \nu = \inf_{B \in \text{Iso}(\Lambda, \Gamma)} \|B - E_2\|.$$

3. Вычисление расстояния

Обозначим через A_m базисную матрицу решётки $\Lambda_m(F)$:

$$A_m = \begin{pmatrix} Q_m & Q_m\sqrt{p} \\ Q_m & -Q_m\sqrt{p} \end{pmatrix}, \quad A_m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2Q_m} & \frac{1}{2Q_m} \\ \frac{1}{2Q_m\sqrt{p}} & -\frac{1}{2Q_m\sqrt{p}} \end{pmatrix},$$

а через B_m — базисную матрицу решётки $\Lambda_m(p)$:

$$B_m = \begin{pmatrix} Q_m & P_m \\ Q_m & -P_m \end{pmatrix}, \quad B_m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2Q_m} & \frac{1}{2Q_m} \\ \frac{1}{2P_m} & -\frac{1}{2P_m} \end{pmatrix}.$$

Пусть $C_m = B_mA_m^{-1}$, $D_m = C_m^{-1} = A_mB_m^{-1}$, $I_m = \text{Iso}(\Lambda_m(F), \Lambda_m(p))$ и $J_m = \text{Iso}(\Lambda_m(p), \Lambda_m(F))$. Тогда $C_m \in I_m$, $D_m \in J_m$. Положим $\nu_m = \|C_m - E_2\|$, $\mu_m = \|D_m - E_2\|$.

ЛЕММА 1. *Справедливы равенства*

$$\nu_m = \frac{\theta_m}{(-1)^m\theta_m + P_mQ_m}, \quad \mu_m = \frac{\theta_m}{P_mQ_m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$C_m - E_2 = \begin{pmatrix} \frac{P_m}{2Q_m\sqrt{p}} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{P_m}{2Q_m\sqrt{p}} \\ \frac{1}{2} - \frac{P_m}{2Q_m\sqrt{p}} & \frac{P_m}{2Q_m\sqrt{p}} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \frac{P_m}{2Q_m\sqrt{p}} - \frac{1}{2} = \frac{P_m - Q_m\sqrt{p}}{2Q_m\sqrt{p}} = \frac{-\frac{(-1)^m\theta_m}{Q_m}}{2\left(P_m + \frac{(-1)^m\theta_m}{Q_m}\right)}.$$

Отсюда следует, что

$$\nu_m = \frac{\theta_m}{(-1)^m\theta_m + P_mQ_m},$$

так как $0 < \theta_m < 1$.

Аналогично получаем:

$$D_m - E_2 = \begin{pmatrix} \frac{Q_m\sqrt{p}}{2P_m} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{Q_m\sqrt{p}}{2P_m} \\ \frac{1}{2} - \frac{Q_m\sqrt{p}}{2P_m} & \frac{Q_m\sqrt{p}}{2P_m} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \frac{Q_m\sqrt{p}}{2P_m} - \frac{1}{2} = \frac{Q_m\sqrt{p} - P_m}{2P_m} = \frac{\frac{(-1)^m\theta_m}{Q_m}}{2P_m}.$$

Отсюда следует, что

$$\mu_m = \frac{\theta_m}{P_mQ_m}.$$

□

ЛЕММА 2. Если решётки $\Lambda = A\mathbb{Z}^2$ и $\Gamma = B\mathbb{Z}^2$ с базисными матрицами A и B , соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} Q & P + \frac{\theta}{Q} \\ Q & -P - \frac{\theta}{Q} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2Q} & \frac{1}{2Q} \\ \frac{1}{2(P+\frac{\theta}{Q})} & -\frac{1}{2(P+\frac{\theta}{Q})} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} Q & P \\ Q & -P \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2Q} & \frac{1}{2Q} \\ \frac{1}{2P} & -\frac{1}{2P} \end{pmatrix}, \quad 0 < |\theta| < 1, \quad P, Q \in \mathbb{N}, \quad P, Q \geq 2$$

связаны соотношениями

$$\Lambda = B^*\Gamma, \quad B^* = AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\theta}{2PQ} & -\frac{\theta}{2PQ} \\ -\frac{\theta}{2PQ} & 1 + \frac{\theta}{2PQ} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = A^*\Lambda, \quad A^* = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\theta}{2(\theta+PQ)} & \frac{\theta}{2(\theta+PQ)} \\ \frac{\theta}{2(\theta+PQ)} & 1 - \frac{\theta}{2(\theta+PQ)} \end{pmatrix},$$

$$\nu_0 = \|A^* - E_2\| = \frac{|\theta|}{\theta + PQ}, \quad \mu_0 = \|B^* - E_2\| = \frac{|\theta|}{PQ}, \quad \varepsilon_0 = \max(\nu_0, \mu_0) < 1,$$

то для расстояния между этими решётками справедливо равенство

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \ln(1 + \varepsilon_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$B^* = E_2 + M, \quad M = \begin{pmatrix} \frac{\theta}{2PQ} & -\frac{\theta}{2PQ} \\ -\frac{\theta}{2PQ} & \frac{\theta}{2PQ} \end{pmatrix}, \quad \|M\| = \mu_0 < \frac{1}{4},$$

$$A^* = E_2 + N, \quad N = \begin{pmatrix} -\frac{\theta}{2(\theta+PQ)} & \frac{\theta}{2(\theta+PQ)} \\ \frac{\theta}{2(\theta+PQ)} & -\frac{\theta}{2(\theta+PQ)} \end{pmatrix}, \quad \|N\| = \nu_0 < \frac{1}{3}.$$

Из условия следует, что $\text{Iso}(\Lambda, \Gamma) = B\mathbb{U}_2A^{-1}$ и $\text{Iso}(\Gamma, \Lambda) = A\mathbb{U}_2B^{-1}$. Пусть C — произвольная унимодулярная матрица из $\mathbb{U}_2$:

$$C = \begin{pmatrix} 1+a & b \\ c & 1+d \end{pmatrix}, \quad C = E_2 + C_1, \quad C_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z},$$

тогда $\det C = 1 + a + d + ad - bc = \pm 1$, и, значит,

$$a + d + ad - bc = \begin{cases} 0, & \text{если } \det C = 1, \\ -2, & \text{если } \det C = -1. \end{cases}$$

Рассмотрим матрицы $D = BCA^{-1} = E_2 + M + BC_1A^{-1}$ и $F = ACB^{-1} = E_2 + N + AC_1B^{-1}$. Нас интересует вопрос: при каких матрицах $C \in \mathbb{U}_2$ будет $\max(\|D - E_2\|, \|F - E_2\|) < \varepsilon_0$? Имеем:

$$D_1 = BC_1A^{-1} = aB_{11} + bB_{12} + cB_{21} + dB_{22}, \quad F_1 = AC_1B^{-1} = aA_{11} + bA_{12} + cA_{21} + dA_{22},$$

$$B_{ij} = B \begin{pmatrix} \delta_{1i}\delta_{1j} & \delta_{1i}\delta_{2j} \\ \delta_{2i}\delta_{1j} & \delta_{2i}\delta_{2j} \end{pmatrix} A^{-1}, \quad A_{ij} = A \begin{pmatrix} \delta_{1i}\delta_{1j} & \delta_{1i}\delta_{2j} \\ \delta_{2i}\delta_{1j} & \delta_{2i}\delta_{2j} \end{pmatrix} B^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$B_{11} + B_{22} = A^* = E_2 + N, \quad A_{11} + A_{22} = B^* = E_2 + M.$$

Матрицы A_{ij} , B_{ij} легко вычисляются:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & A_{12} &= \begin{pmatrix} \frac{Q}{2P} & -\frac{Q}{2P} \\ \frac{Q}{2P} & -\frac{Q}{2P} \end{pmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} \frac{\theta+PQ}{2Q^2} & \frac{\theta+PQ}{2Q^2} \\ -\frac{\theta+PQ}{2Q^2} & -\frac{\theta+PQ}{2Q^2} \end{pmatrix}, & A_{22} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\theta}{2PQ} & -\frac{1}{2} - \frac{\theta}{2PQ} \\ -\frac{1}{2} - \frac{\theta}{2PQ} & \frac{1}{2} + \frac{\theta}{2PQ} \end{pmatrix}, \\ B_{11} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & B_{12} &= \begin{pmatrix} \frac{Q^2}{2(\theta+PQ)} & -\frac{Q^2}{2(\theta+PQ)} \\ \frac{Q^2}{2(\theta+PQ)} & -\frac{Q^2}{2(\theta+PQ)} \end{pmatrix}, \\ B_{21} &= \begin{pmatrix} \frac{P}{2Q} & \frac{P}{2Q} \\ -\frac{P}{2Q} & -\frac{P}{2Q} \end{pmatrix}, & B_{22} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2(\theta+PQ)} & -\frac{1}{2} + \frac{\theta}{2(\theta+PQ)} \\ -\frac{1}{2} + \frac{\theta}{2(\theta+PQ)} & \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2(\theta+PQ)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Будем рассматривать квадратные матрицы второго порядка как вектора в четырёхмерном векторном вещественном пространстве E^4 , тогда матрицы A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} образуют ортогональный базис в евклидовом пространстве E^4 . И матрицы B_{11} , B_{12} , B_{21} , B_{22} образуют ортогональный базис в евклидовом пространстве E^4 .

Рассмотрим скалярные квадраты матриц D_1 и F_1 . Из разложения по ортогональным базисам следует, что:

$$\begin{aligned} (D_1, D_1) &= a^2 + b^2 \left(\frac{Q^2}{\theta + PQ} \right)^2 + c^2 \left(\frac{P}{Q} \right)^2 + d^2 \left(1 - \frac{\theta}{\theta + PQ} \right)^2, \\ (F_1, F_1) &= a^2 + b^2 \left(\frac{Q}{P} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\theta + PQ}{Q^2} \right)^2 + d^2 \left(1 + \frac{\theta}{PQ} \right)^2. \end{aligned}$$

Если

$$D_1 = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix},$$

то

$$(D_1, D_1) = d_{11}^2 + d_{12}^2 + d_{21}^2 + d_{22}^2, \quad (F_1, F_1) = f_{11}^2 + f_{12}^2 + f_{21}^2 + f_{22}^2.$$

Для дальнейшего нам потребуются неравенства $\|D_1\| \geq \sqrt{(D_1, D_1)}$, $\|F_1\| \geq \sqrt{(F_1, F_1)}$, которые следуют из определения матричной нормы и скалярного квадрата. Действительно, если рассмотрим произвольную квадратную матрицу A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то $(A, A) = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 \leq 4(\max(|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{21}|, |a_{22}|))^2 = \|A\|^2$, то есть $\|A\| \geq \sqrt{(A, A)}$.

Отсюда следует, что

$$\|D_1\| \geq \rho_1 = \min \left(1, \frac{Q^2}{\theta + PQ}, \frac{P}{Q}, 1 - \frac{\theta}{\theta + PQ} \right), \quad \|F_1\| \geq \rho_2 = \min \left(1, \frac{Q}{P}, \frac{\theta + PQ}{Q^2}, 1 + \frac{\theta}{PQ} \right).$$

Проверим, что $\rho_1 \geq 2\mu_0$, $\rho_2 \geq 2\nu_0$.

Действительно, $1 \geq 2\mu_0 = \frac{2|\theta|}{PQ}$, $\frac{Q^2}{\theta + PQ} \geq \frac{2|\theta|}{PQ}$ так как $Q^2 \geq 4 \geq \frac{2(PQ+1)}{PQ}$, $\frac{P}{Q} \geq \frac{2|\theta|}{PQ}$ так как $P^2 \geq 2$, $1 - \frac{\theta}{\theta + PQ} \geq \frac{2|\theta|}{PQ}$ так как $(PQ)^2 \geq 2(PQ + 1)$. Тем самым первое неравенство доказано.

Аналогично, $1 \geq 2\nu_0 = \frac{2|\theta|}{\theta + PQ}$, $\frac{Q}{P} \geq \frac{2|\theta|}{\theta + PQ}$ так как $Q(PQ - 1) \geq 2P$, $\frac{\theta + PQ}{Q^2} \geq \frac{2|\theta|}{\theta + PQ}$ так как $(PQ - 1)^2 \geq 2Q^2$, $1 + \frac{\theta}{PQ} \geq \frac{2|\theta|}{\theta + PQ}$ так как $(PQ - 1)^2 \geq 2PQ$. Тем самым и второе неравенство доказано.

Далее имеем:

$$\|D - E_2\| = \|M + D_1\| \geq \|D_1\| - \|M\| \geq \|M\|, \quad \|F - E_2\| = \|N + F_1\| \geq \|F_1\| - \|N\| \geq \|N\|,$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

ТЕОРЕМА 1. При $P_m \geq 2$, $Q_m \geq 2$ справедливо равенство

$$\rho(\Lambda_m(F), \Lambda_m(p)) = \ln \left(1 + \max \left(\frac{\theta_m}{(-1)^m \theta_m + P_m Q_m}, \frac{\theta_m}{P_m Q_m} \right) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в лемме 2 $\Lambda = \Lambda_m(F)$, $\Gamma = \Lambda_m(p)$, $A = A_m$, $B = B_m$, тогда получим утверждение теоремы. $\square$

4. Заключение

Для решения вопроса о наилучших приближениях квадратичной алгебраической решётки целочисленной решёткой необходимо вычислить расстояние от произвольной решётки $Q\Lambda(F)$ до целочисленной решётки $\Lambda(P, Q)$, заданной базисом $\vec{\lambda}_1 = (Q, Q)$, $\vec{\lambda}_2 = (P, -P)$, где $\left| \frac{P}{Q} - \sqrt{p} \right| < \frac{1}{2}$. По аналогии с наилучшими приближениями второго рода, можно высказать гипотезу, что наилучшие приближения даются решётками из доказанной теоремы.

Выражаю свою благодарность научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток. монография / под редакцией Н. М. Добровольского. Тула, 2012.
2. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. — М.: Наука. 1965 г. — 176 с.
3. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.
4. Кормачева А. Н. О неполных частных одной цепной дроби // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 293–301.
5. Михляева А. В. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.
6. Михляева А. В. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1. С. 302–307.

REFERENCES

1. Vronskaya, G. T., Dobrovol'skii, N. N. 2012, "Deviations of flat grids. monograph", edited by N. M. Dobrovol'skii. Tula.
2. Davenport, H., 1965, "The higher arithmetic", Moscow, Nauka — pp. 176.
3. Kassels, D. 1965, Vvedenie v geometriyu chisel, [Introduction to the geometry of numbers], Mir, Moscow, Russia.

4. Kormacheva, A. N., 2019, "About the partial quotients of one of the continued fractions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 293–301.
5. Mikhlyaeva, A. V., 2018, "Approximation of quadratic algebraic lattices and nets by integer lattices and rational nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 241–256.
6. Mikhlyaeva, A. V., 2019, "Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 302–307.

Получено 18.05.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.