ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 51 (091)

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-389-402

Религиозно-правовой аспект алгебры ал-Хорезми и её статус в иерархии наук ал-Фараби ¹

И. О. Лютер

Лютер Ирина Олеговна — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова Российской академии наук, г. Москва.

e-mail: bastet_13@list.ru

Аннотация

В настоящей работе речь идет о исламской научной дисциплине — науке о расчете долей наследства (‘илм ал-фара’ид) — и приложениях арифметики и алгебры к проблемам распределения наследства по правилам, разрабатываемым в рамках этой дисциплины. Кроме соответствующих глав «Краткой книги об исчислении алгебры и алмукабалы» ал-Хорезми, в которых алгебраические методы применяются для подсчета законных долей наследников, в качестве основных источников рассмотрены трактат о наследственном праве «Сираджийа» ас-Саджаванди, а также сочинение «Перечисление наук» ал-Фараби, в котором дается философское осмысление статуса алгебры и ее предмета.

Ключевые слова: алгебра ал-Хорезми, мусульманское наследственное право, расчет долей наследства, «Сираджийа» ас-Саджаванди, классификация математических наук ал-Фараби.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

И. О. Лютер Религиозно-правовой аспект алгебры ал-Хорезми и её статус в иерархии наук ал-Фараби // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 389–402.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 51 (091)

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-389-402

The religious and legal aspect of al-Khwarizmi's algebra and its status in the hierarchy of sciences of al-Farabi ²

I. O. Lyuter

¹Некоторые результаты работы докладывались на XV международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, секция «История математики»"[1].

²Some results of the work were presented at the XV international conference "Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications, section «History of mathematics»"[1].

Lyuter Irina Olegovna — candidate of physical and mathematical Sciences, senior researcher, Institute of history of natural science and technology S. I. Vavilov Russian Academy of Sciences, Moscow.

e-mail: bastet_13@list.ru

Abstract

The paper deals with a genuine Islamic scientific discipline, the science of the calculation of inheritance shares ('Ilm al-Fara'id), and the applications of arithmetic and algebra to the problems of the distribution of inheritance according to the rules developed in this discipline. The main treatises considered in this regard are the relevant chapters of "The Compendious Book on Calculation by Completion and Balancing" by al-Khwarizmi, in which algebraic methods have been applied to the computation of the legal shares of legacy, the treatise on the law of inheritance "Sirajiyya" of al-Sajawandi, as well as the "Enumeration of Sciences" of al-Farabi, who provides a philosophical understanding of the status and nature of algebra.

Keywords: algebra of al-Khwarizmi, Islamic inheritance law, «Sirajiyah» of al-Sajawandi, classification of mathematical sciences of al-Farabi.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

I. O. Lyuter, 2019, "The religious and legal aspect of al-Khwarizmi's algebra and its status in the hierarchy of sciences of al-Farabi", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 389–402.

1. Введение

Происходящее в VIII в. культурное и институциональное становление исламской империи привело к появлению многих научных дисциплин. Проводились и развивались коранические, лингвистические, юридические, исторические и теологические исследования, непосредственно связанные с новым обществом, его идеологией и организацией. Эти исследования сделали возможным не только создание условий и средств, необходимых для появления и интеграции других наук, в том числе математических и философских, но также обусловили потребность в них и формирование их контекста.

В связи с алгеброй особый интерес представляет одна из этих новых собственно исламских дисциплин – наука о наследственном праве или наука о расчете долей наследства ('илм ал-фара'ид)³. Эта возникшая в рамках мусульманского гражданского права научная дисциплина не только обеспечила алгебру областями применения, тем самым дав ей социальное обоснование, но и участвовала в VIII в. в формировании одного из ее разделов – речь идет о приложениях алгебры к проблемам распределения наследства (подсчету законных долей наследников) по разрабатываемым в рамках наследственного права правилам.

2. Алгебра ал-Хорезми

Впервые как самостоятельная математическая дисциплина об общих методах решения линейных и квадратных уравнений со своей особой лексикой алгебра предстает в «Краткой книге об исчислении алгебры и алмукабалы»⁴ («Ал-китаб ал-мухтасар фи хисаб ал-джабр

³ Термин «ал-фара'ид» – множественное число от арабского слова «ал-фарида», означающего обязательное предписание Аллаха, религиозную обязанность, – в исламской юриспруденции означает «наследственные доли имущества».

⁴ Далее по тексту просто «Алгебра». Напомним, в математическом контексте слова «ал-джабр» и «ал-мукабала» означают названия двух алгебраических операций – соответственно «восполнения» уравнения (перенос вычитаемых членов из одной части равенства в другую) и «противопоставления» (сокращение равных

ва-л-мукабала») одного из крупнейших среднеазиатских ученых (математика, астронома, географа, историка) IX в. Мухаммада ибн Мусы ал-Хорезми (ок. 780–ок. 850) (русский перевод см. [2]).

Книга ал-Хорезми была написана около 820 г. Примерно тогда же он был назначен астрономом и главой библиотеки Дома мудрости (Байт ал-хикма). Эта своего рода научная академия была основана в Багдаде, финансировалась и контролировалась седьмым халифом династии Аббасидов ал-Мамуном (правившим с 813 по 833), известным своим покровительством науке и искусствам. Халиф ал-Мамун лично участвовал в повседневной жизни Дома мудрости, регулярно посещая работающих в нем ученых и интересуясь их деятельностью, участвуя в различных дискуссиях и научных обсуждениях. Об этом свидетельствует и характеристика ал-Мамуна, данная ал-Хорезми во введении к алгебраическому трактату, в которой отмечаются свойственные халифу «любовь к науке и стремление приближать к себе ученых, простирая над ними крыло своего покровительства и помогая им в разъяснении того, что для них неясно, и в облегчении того, что для них затруднительно» [2, с. 21].⁵

В этом же введении ал-Хорезми, говоря о предназначении своего сочинения, отмечает прикладной характер новой дисциплины, области приложения которой охватывают и арифметические и геометрические проблемы: «Я составил краткую книгу об исчислении алгебры и алмукабалы, заключающую в себе простые и сложные вопросы арифметики, ибо это необходимо людям при дележе наследства, составлении завещаний, разделе имущества и судебных делах, в торговле и всевозможных сделках, а также при измерении земель, проведении каналов, геометрии и прочих разновидностях подобных дел» [2, с. 21].

Трактат ал-Хорезми состоит из двух частей – теоретической и практической. В первой из них излагается теория линейных и квадратных уравнений, а также затрагиваются некоторые вопросы геометрии. Во второй части алгебраические методы применяются к решению конкретных бытовых, торговых и юридических проблем.

3. Наследственное право и алгебра ал-Хорезми

«Дележу наследства, составлению завещаний, разделу имущества», отмеченным ал-Хорезми во введении к «Алгебре», посвящена большая часть его трактата, включающая «Книгу

членов в обеих частях равенства), с помощью которых алгебраические уравнения приводились к шести каноническим видам ($bx = c$, $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $ax^2 = bx + c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 + bx = c$, $a > 0, b > 0, c > 0$), решаемым по правилам, определенным априори ал-Хорезми. Впервые используемые вместе в трактате ал-Хорезми эти термины дали математической дисциплине название «исчисление алгебры и алмукабалы», которое впоследствии сократилось до «алгебры». Практикующих же алгебру математиков стали называть «людьми алгебры» (такое выражение встречается уже у Сабита ибн Корры (826–901), позднее у Омара Хайяма (1048–1181)).

⁵Основной целью деятельности Дома мудрости были переводы на арабский язык с греческого, персидского, санскрита (также с арамейского, иврита, латыни) научных и философских сочинений, а также их комментирование. Ко второй половине IX в. Дом мудрости ал-Мамуна стал крупнейшим хранилищем книг в мире (фонды его библиотеки собирались тремя поколениями аббасидских халифов: прадедом, дедом и отцом ал-Мамуна халифом Харуном ар-Рашидом) и одним из самых прославленных центров интеллектуальной деятельности в Средние века, куда приглашались самые лучшие переводчики и ученые из разных стран, прежде всего из тех, что вошли в состав Арабского халифата (Сирии, Египта, Персии, Хорасана, Мавераннахра и др.). Сотрудниками Дома мудрости в разное время были такие выдающиеся математики и астрономы, как ал-Фергани, ал-Джаухари, ал-Кинди, братья Бану Муса, ал-Махани, Сабит ибн Корра, Куста ибн Лука, Абу-л-Вафа ал-Бузджани, ал-Кухи и др. В результате, к середине IX в. уже существовали арабские версии «Начал» Евклида, нескольких работ Архимеда, «Конических сечений» Аполлония, «Альмагеста» Птолемея и др. Ученые, приглашенные в Дом мудрости осуществляли и самостоятельные исследования, получая при этом, подобно ал-Хорезми, оригинальные результаты во многих областях знания. В 1258 г. Дом мудрости был разрушен армией монгольского правителя Хулагу-хана (внука Чингис-хана), захватившей Багдад. Книги из городских библиотек, в том числе библиотеки Дома мудрости, были брошены в реку Тигр в таком количестве, что, как свидетельствуют некоторые источники, вода в реке почернела от чернил из книг.

завещаний» («Китаб ал-васайа») из 8 глав и «Исчисление кругооборотов»⁶ («Хисаб ад-даур») из 4 глав и ставшая впоследствии практическим руководством для исламских правоведов, занимавшихся разделом имущества. Со временем содержание этой части трактата приведет к алгебраической дисциплине под названием «исчисление завещаний» (хисаб ал-васайа) или «исчисление долей наследства» (хисаб ал-фара'ид), которая будет преподаваться как область исследований для алгебраистов и юристов после создания в XI в. школ права, таких как Низамия.⁷

Наследственные правила, согласно которым определяются доли наследников оставленного имущества, закреплены в двух основных источниках исламского богословия и права – Коране и Сунне⁸ – и являются важной частью исламского права (фикх), а также фундаментальной и обязательной частью шариата⁹.

В Коране содержатся более 30 стихов (аятов), относящихся к разделу наследства. В трех основных из них доли наследства описываются обстоятельно:

«Завещает вам Аллах относительно ваших детей: сыну – долю, подобную доле двух дочерей. А если они (дети) – женщины, числом больше двух, то им – две трети того, что он оставил, а если одна, то ей – половина. А родителям его, каждому из двух – одна шестая того, что он оставил, если у него есть ребенок. А если у него нет ребенка и ему наследуют его родители, то матери – одна треть. А если есть у него братья, то матери – одна шестая после завещанного, которое он завещает, или долга. Родители ваши или ваши сыновья – вы не знаете, кто из них ближе к вам по пользе, как установлено Аллахом. Поистине, Аллах – знающ, мудр!» (Коран, сура 4, аят 12 (11)) [3, с. 82];

«Вам – половина того, что оставили ваши супруги, если у них нет ребенка. А если у них есть ребенок, то вам – четверть того, что они оставили после завещанного, которое они завещают, или долга» (там же, аят 13 (12)) [3, с. 82];

«... Аллах дает вам решение о боковой линии. Если человек погибнет и нет у него ребенка, а есть у него сестра, то ей половина того, что он оставил, и он наследует после нее, если у нее нет ребенка. А если их – две, то им обеим две трети того, что он оставил. А если они – братья, мужчины и женщины, то мужскому полу столько же, сколько доля двух женщин» (там же, аят 175 (176)) [3, с. 101].

Неудивительно, что главы трактата ал-Хорезми о завещаниях и разделе имущества, определяемые нормами мусульманского наследственного права, в свою очередь, основанными на важнейших источниках религии ислама, не были включены ни в один из латинских переводов «Алгебры» ал-Хорезми.¹⁰

Как следует из приведенных стихов Корана, чтобы применить данные в них предписания по распределению имущества между различными родственниками, необходимо знание арифметики. Иначе говоря, решение религиозно-правовой проблемы наследования предполагает знание арифметики и элементарной теории чисел.

Когда же какая-то часть наследства при определенных условиях завещается постороннему

⁶ «Кругообороты» (араб. «даур») – не предусмотренные ранее обстоятельства, меняющие местами положение лиц, например, когда наследник становится завещателем.

⁷ Медресе Низамия – школы исламского права, построенные по инициативе знаменитого государственного деятеля, визиря сельджукских султанов Низам ал-Мулка (1018–1092) в XI в. в крупных городах Ирана, Ирака и Сирии. Самая первая и известная – Низамия в Багдаде, в течение нескольких столетий остававшаяся ведущим учебным заведением и образцом для многих правовых школ во всем исламском мире.

⁸ Сунна (араб. «обычай, практика, предание, закон») – мусульманское священное предание, основанное на устно переданной сподвижниками пророка Мухаммада записи его дел и высказываний.

⁹ Шариат (араб. «прямой путь») – комплекс правил поведения члена мусульманской общины, установленных фикхом.

¹⁰ Сохранились три латинских перевода трактата ал-Хорезми: Роберта Честерского (ок. 1145), Герарда Кромонского (ок. 1150) и предположительно Гульельмо де Луниса (ок. 1250), с последнего перевода в 1313 г. был сделан анонимный итальянский перевод.

человеку, задача осложняется и необходимо умение составлять и решать линейные и неопределенные уравнения, то есть необходимо некоторое исчисление, алгебраическое по сути. Поясним это, обратившись к двум проблемам из «Алгебры» ал-Хорезми, точнее из входящей в нее «Книги о завещаниях».

В «Книге о завещаниях» рассматриваются проблемы, в которых часть наследства завещается посторонним. Рассматриваются не простые случаи законных долей, которые могут быть решены с помощью элементарных арифметических операций с дробями, а более сложные случаи наследования, требующие знания алгебраических операций с неизвестными величинами.

Характерно, что в большинстве случаев ал-Хорезми решает наследственные проблемы без обращения к юридической стороне вопроса – правилам наследования, регулирующим величину законных долей и ограниченную величину завещанного наследства.¹¹ С нормами наследственного права были знакомы не только правоведы, но и каждый образованный мусульманин, поскольку они излагались в специальных учебных пособиях, изучавшихся в начальных школах. Зная это, ал-Хорезми, видимо, полагал, что любой, кто изучает его алгебру, уже знаком с правилами наследования и простыми случаями подсчета законных долей. Поэтому-то он и не конкретизировал правовые положения (не указывал законную долю каждого наследника, не объяснял, как должен распределяться остаток средств, какова законная доля каждого наследника в особых случаях, как находить общий знаменатель долей).

Итак, первый пример: «Если он оставил трех сыновей и завещал одну пятую своего имущества без дирхема, причем он оставил десять дирхемов в наличности и отданное в долг, равное доле одного из сыновей, то правило: прими получаемое из долга за вещь и прибавь это к десяти. Будет десять и вещь. Вычти одну пятую этого как завещанное. Это два дирхема и одна пятая вещи. Останется восемь дирхемов и четыре пятых вещи. Затем прибавь дирхем, так как было сказано: без дирхема. Получится девять дирхемов и четыре пятых вещи. Раздели это между сыновьями. У каждого сына будет три дирхема и одна пятая с третьей одной пятой вещи, Это равно вещи. Противопоставь одну пятую с третьей одной пятой вещи одной вещи. Останется: одиннадцать пятнадцатых вещи равны трем дирхемам. Ты нуждаешься в дополнении вещи. Прибавь к ней четыре пятнадцатых вещи и прибавь равное этому к трем дирхемам. Это дирхем с одной одиннадцатой. Поэтому четыре и одна одиннадцатая дирхема равны вещи. Это и есть то, что получается из долга» [2, с.54–55].

Решение этой проблемы сводится, в современной терминологии, к простому линейному уравнению: пусть x – «вещь»¹² – отданное в долг, тогда все имущество – $(x + 10)$, а завещанное без дирхема – $\frac{1}{5}(x + 10) - 1 = \frac{1}{5}x + 1$; в таком случае три сына наследуют $(x + 10) - (\frac{1}{5}x + 1) = \frac{4}{5}x + 9$, а каждый сын – $\frac{4}{15}x + 3$; доля каждого сына, по условию, равна «вещи», таким образом, получаем линейное уравнение $\frac{4}{15}x + 3 = x$, откуда $x = 4\frac{1}{11}$.

Второй пример: «Женщина умерла, оставив двух дочерей, мать и мужа, и завещала одному человеку равное доле матери и другому человеку – одну девятую всего имущества. Правило таково: установи число частей необходимого наследства, это тринадцать частей, для матери

¹¹ Не менее семи стихов Корана (2: 180–182, 2: 240, 4: 33, 5: 106–107) имеют прямое отношение к завещательному распоряжению. Общие правила завещаний небезынтересны во многих отношениях: завещанная доля (васаи) не должна превышать 1/3 всего имущества завещателя; завещанная доля не может быть передана человеку, который уже является наследником; завещанная доля не может быть направлена на деятельность или фонд, не соответствующие нормам шариата. Любому человеку может случиться пожертвовать более трети своего имущества в виде подарка. Но, если такое пожертвование делает смертельно больной человек, то это пожертвование считается наследством и как таковое недействительно на величину, превышающую 1/3 всего имущества, которую необходимо вернуть законным наследникам.

¹² Напомним, что термином «вещь» (араб. «шай») ал-Хорезми называет неизвестную величину. В теоретической же части «Алгебры» в этом же значении он применяет термин «корень» (джизр) и дает следующее определение: «Корень – это всякая вещь, умножаемая на себя, будь то число, равное или большее единицы, или дробь, меньшая ее» [2, с. 21]. Определение становится более понятным, если учесть, что при решении уравнений в те времена искали не только x , но и x^2 , а неизвестную рассматривали как корень из квадрата неизвестной.

из них две части. Теперь ты знаешь, что завещанное есть две части и одна девятая всего имущества. Остается от него, восемь девятых имущества без двух частей для наследников. Восполни твое имущество, считая восемь девятых без двух частей тринадцатую частями, то есть прибавь к этому две части, так что получится: пятнадцать равно восьми девятым имущества. Затем прибавь к этому одну восьмую его, и к пятнадцати – их одну восьмую, то есть одну и семь восьмых части, для того, кому завещана одна девятая, ему одна и семь восьмых доли. Другому, кому завещана доля матери, – две части. Останутся тринадцать частей, они делятся между наследниками по их долям. Это станет целым, если будет сто тридцать пять частей» [2, с. 58].

Согласно Корану, мать должна получить $\frac{1}{6}$ долю имущества, муж – $\frac{1}{4}$, две дочери – $\frac{2}{3}$. В таком случае наследство делилось бы на 12 частей (12 – наименьший общий знаменатель долей) и доли наследников были бы соответственно $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$ и $\frac{8}{12}$. В сумме эти доли дают $\frac{13}{12}$, следовательно, они не могут быть выданы полностью. В подобных случаях, согласно наследственному правилу, если сумма числителей долей больше, чем знаменатель, то он должен быть увеличен так, чтобы быть равным этой сумме. Такое правило-поправка называется «отклонением» (ал-‘аул) от первоначального правила [4, с. 331]. При этом законные доли наследников остаются с неизменными числителями, но с новым знаменателем¹³. Ал-Хорезми без ссылок на это правило увеличивает знаменатель до 13, при этом мать и муж по-прежнему получают 2 и 3 части соответственно, а каждая дочь – по 4 части. Доля, завещанная одному постороннему человеку равна, по условию, доле матери и составляет 2 части; доля, завещанная другому постороннему человеку равна, по условию, $\frac{1}{9}$ всего имущества. Имущество включает 15 частей, 13 из которых наследуют родственники и 2 части, завещаны одному из посторонних наследователей. Поскольку $\frac{1}{9}$ часть имущества завещана второму постороннему человеку, то те 15 частей составляют $\frac{8}{9}$ имущества. Тогда $\frac{1}{9}$ имущества составляет $\frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$ частей, все же имущество содержит $\frac{135}{8}$ частей. Таким образом, решение проблемы сводится к неопределенному уравнению $x = 2y + 3y + 8y + 2y + \frac{1}{9}x$, где x – все имущество, y – величина одной части наследства; следовательно, $\frac{8}{9}x = 15y$ и $x = \frac{135}{8}y$. Ал-Хорезми полагает, что все имущество состоит из 135 частей, в таком случае мать получает 16 частей, муж – 24 части, каждая из дочерей – по 32 части, первая завещанная доля равна 16 частям, а вторая – 15.

Историк средневековой арабской и еврейской математики и астрономии С. Гандз (1883–1954) назвал «Книгу о завещаниях» из «Алгебры» ал-Хорезми, включающую две рассмотренные нами проблемы, «алгеброй наследования» [4, с. 328].

4. Трактат о наследственном праве ас-Саджаванди

В тех редких случаях, когда ал-Хорезми все-таки ссылается на конкретные юридические принципы, они оказываются положениями, принадлежащими выдающемуся исламскому богослову и правоведу Абу Ханифе (699–767), что непосредственно свидетельствует об основном знании ал-Хорезми юридической стороны проблем.

Абу Ханифа был основателем школы ханафитов – одной из трех канонических суннитских религиозно-правовых школ (мазхабов), основанных в VIII в. Две другие – это школа маликитов, основатель Малик ибн Анас (711–795), и школа шафиитов, основатель Мухаммад ибн Идрис аш-Шафии (767–820). Этим знаменитым правоведам и их ученикам принадлежат и сочинения по мусульманскому наследственному праву.¹⁴ Так, Р. Рашед отмечает трактат

¹³В комментариях к этой проблеме Б. А. Розенфельд (также автор русского перевода алгебраического трактата ал-Хорезми) не совсем верно объясняет выбор знаменателя 13, исходя из доли каждой из дочерей в случае знаменателя 12, равной $3\frac{1}{2}$ части: «чтобы избежать дробей, ал-Хорезми делит необходимое имущество на 13 частей, причем мать и муж по-прежнему получают 2 и 3 части, а каждая дочь – по 4 части» [2, с. 134].

¹⁴Принципы вынесения правовых решений этих школ расходились и в отношении некоторых аспектов мусульманского наследственного права, отчасти из-за различий в толковании Корана и Сунны.

«Исчисление завещаний» («Хисаб ал-васайя») известного исламского правоведа Мухаммада ибн Хасана аш-Шайбани (749–805), ученика Абу Ханифы и Малика ибн Анаса [5, с. 107]. В подобных трактатах, составленных не только до написания «Алгебры» ал-Хорезми, но и позднее, рассматривалось, как правило, общее наследственное право и проблемы, ограничивающиеся вычислением наследственных долей с помощью элементарных арифметических операций с дробями, без применения алгебраических уравнений с неизвестными величинами.¹⁵ Одной из важнейших работ в этой области был трактат математика, астролога, географа, представителя ханафитского мазхаба, знатока наследственного права Сирадж ад-Дина ас-Саджаванди (ум. ок. 1203) «Книга наследственного права Сирадж ад-Дина» («Китаб ал-фара'ид ас-сираджиййа») или просто «Сираджиййа».¹⁶ Ему принадлежат также математические «Уподобление об арифметике» и «Трактат об алгебре и алмукабале», составленные в традициях арифметического¹⁷ и алгебраического трактатов ал-Хорезми. Все три сочинения ас-Саджаванди включались во многие сборники по разделу наследства вплоть до XIX в. А сам трактат «Сираджиййа» неоднократно комментировался, в том числе и самим автором.

Во введении ас-Саджаванди указывает важность науки о наследственном праве («илм ал-фара'ид»): «Изучайте правила наследования и обучайте [этим правилам] людей, ибо они [правила] – одна половина полезного знания» [7, с. 11].

В книге рассматриваются многие юридические положения науки о наследственном праве, включая препятствия к получению наследства (в частности, иное вероисповедание), учение о долях и лицах, имеющих на них право, о разделе имущества среди наследников и среди кредиторов, о случаях возврата, о классах наследников и о дальних родственниках.

Чтобы иметь представление о математической составляющей сочинений о наследственном праве, подобных «Сираджиййи», рассмотрим более детально некоторые элементы этого сочинения, относящиеся к арифметике дробей, характеризующейся в данном случае специфической лексикой и отличной от математической логикой рассуждений и умозаключений.

Указывая, что, согласно Корану, наследственных долей шесть (половина, четверть, восьмая, шестая, две третьих и одна третья), ас-Саджаванди подразделяет их на два вида: три, в нашей терминологии, со знаменателем, представляющим собой степени 2, и три – одна треть и две доли, получающиеся из нее удвоением и раздвоением.

Далее ас-Саджаванди приводит для этого набора долей правило (1), согласно которому, имущество делится на число частей, равное, в современной терминологии, наименьшему общему знаменателю любого набора наследственных долей, случившихся вместе: «когда половина, которая есть доля первого вида, смешивается со всеми долями второго вида или некоторыми из них, то деление имущества должно быть на шесть; когда четвертая доля смешивается со всеми долями второго вида или несколькими из них, то деление должно быть на 12; и когда восьмая доля смешивается со всеми долями второго вида или некоторыми из них, то это должно быть на 4 и 20 частей» [7, с. 29]. Как уже отмечалось, это правило молчаливо применяется в решениях многих наследственных задач из «Алгебры» ал-Хорезми.

¹⁵Из-за сложности расчетов и относительно большого количества стихов Корана, связанных с разделом наследства, «илм ал-фара'ид (наука о наследственном праве) рассматривалась исламскими правоведами как особенно доходная область права, что обуславливало написание соответствующих работ.

¹⁶В 1792 г. в Калькутте индийской ветвью издательской компании «Thacker & Company» (Лондон) – «Thacker, Spink & Company» – был опубликован первый английский перевод «Сираджиййи», выполненный английским филологом и юристом У. Джонсом (1746–1794). В 1869 и 1890 гг. там же последовали два переиздания этого перевода с введением и примечаниями А. Рамси (1825–1899), адвоката и профессора индийской юриспруденции в Королевском колледже Лондонского университета. Эти переиздания использовались в судах Британской Индии. Заметим, что часть тиража издания 1831 г. первого английского перевода «Алгебры» ал-Хорезми, осуществленного немецким ориенталистом Ф. Розеном, была распространена в Калькутте также компанией «Thacker & Company» [6].

¹⁷Напомним, что ал-Хорезми принадлежит арифметический трактат под названием «Книга об индийском счете», в которой впервые систематически излагается индийская позиционная система записи чисел, используется ноль для обозначения пустого разряда, а также рассматриваются различные арифметические методы.

Следующее правило (2) относится к случаю, когда сумма всех долей есть некоторая неправильная дробь. В используемом нами английском переводе «Сираджийи» это правило названо «увеличением» («increase»). Это – то же самое правило, что и правило, называющиеся «отклонением» («deviation», араб. «ал-‘аул») в статье С. Гандза [4, с. 331] (см. наш комментарий ко второму примеру из «Алгебры» ал-Хорезми). Напомним само правило: если сумма числителей долей больше, чем знаменатель, последний увеличивается так, чтобы быть равным этой сумме.

Затем приводится список специальных терминов для обозначения отношений между числами:

- 1) для равенства двух чисел – «тамасул» (араб. «идентичность, сходство»);
- 2) тадахул (араб. «взаимопроникновение») – для случая, «когда меньшее из двух чисел точно измеряет большее, или исчерпывает его; ... когда большее из двух чисел точно делится меньшим; или мы можем определить это так, когда большее превышает меньшее на одно число, равное ему [меньшему], или более... или когда меньшее есть аликвотная часть большего, как 3 для 9» [7, с. 31];
- 3) «тавафук» (араб. «соответствие, согласие») – согласие двух чисел, когда «меньшее точно не измеряет большее, но третье число измеряет их оба, как 8 и 20, каждое из которых измеряется 4; они согласуются в четвертой, поскольку число, измеряющее их, есть знаменатель дроби общей для них» [7, с. 31], то есть речь идет о соизмеримости двух чисел;
- 4) «табайун» (араб. «различие, противоречие, несоразмерность») – «когда нет третьего числа как-либо измеряющего два несогласующихся числа, [таких] как 9 и 10» [7, с. 31], здесь под «несогласием» двух чисел, очевидно, подразумевается их несоизмеримость.

Обратим внимание, что данная терминология отличается от терминологии, принятой в теоретической арифметике того времени (по «форме» и смыслу совпадает лишь термин «табайун», означающий в математике «несоизмеримость»). Приведенные термины можно рассматривать как своеобразные юридическо-арифметические эквиваленты соответствующих математических терминов.

Еще одно правило (3) описывает «способ познания согласия и несогласия между двумя количествами» и равносильно методу нахождения наибольшего общего делителя двух чисел с помощью последовательного вычитания¹⁸: «большее уменьшается меньшим количеством с двух сторон одинажды или больше[е число раз], пока они не согласуются в одном пункте; и если они согласуются только в единице, между ними нет числового согласия; но если они согласуются в каком-либо числе, то они согласуются в дроби, у которой это число знаменатель» [7, с. 32].

Отметим также правило (4) «установки»¹⁹ наименьшего общего знаменателя долей наследников для случаев, когда имеется несколько претендентов на определенную долю, например, несколько жен, которым полагается $1/8$ наследства, или несколько сестер, претендующих на $2/3$ наследства. Это правило состоит из 7 положений.

Рассмотрим второе положение (4.2) правила «установки»: «если доли одного класса [наследников] дробные, при этом есть согласие между их частями и их лицами, то мера числа лиц, доли которых дробные, должна быть умножена на корень (то есть знаменатель. – И.Л.) случая и его увеличение (ал-‘аул), если это случай увеличения» [7, с. 33].

Применим это положение к конкретной проблеме: мужчина оставляет наследство роди-

¹⁸Заметим, что Евклид, изложивший метод нахождения наибольшего общего делителя двух чисел a и b , известный как алгоритм Евклида, в книге VII (предложения 1, 2) «Начал», также не делит a на b , а вычитает b последовательно несколько раз из a , пока не получит остаток $c_1 < b$, таким же образом вычитает из b несколько раз c_1 , пока не получит $c_2 < c_1$ и т.д. Применение вычитания Евклидом объясняется тем, что любые операции над числами он мыслил геометрически, представляя числа в виде отрезков.

¹⁹Переводчик «Сираджийи» У.Джонс перевел арабское слово для названия этого правила как «arrangement», не найдя соответствующего арифметического термина.

телям и 10 дочерям. В этом случае отец должен получить законную $1/6$ долю наследуемого имущества, мать – также $1/6$, 10 дочерей – $2/3$ или $4/6$ (по правилу 1).

Следуем положению 4.2:

- 1) по правилу 3, 10 (число дочерей) согласуется с 4 (число наследуемых ими частей) в 2 (другими словами, наибольший общий делитель 10 и 4 есть 2);
- 2) тогда мера числа лиц²⁰ будет $10 : 2 = 5$;
- 3) и наконец, 5 (мера числа лиц) умножается на корень (знаменатель) 6 и получается 30;
- 4) в таком случае 30 – наименьший общий знаменатель наследуемых долей $1/6$, $1/6$ и $1/15$, следовательно, наследство надо разделить на 30 частей, при этом мать и отец получают по 5 частей, 10 дочерей – по 2 части.

Заметим, что в пунктах 1)–3) фактически находится доля одной дочери:

$$\frac{4}{10 \cdot 6} = \frac{2}{5 \cdot 6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}.$$

Арифметические методы «Сираджийи» излагаются в контексте правовых положений, которые регулируют распределение наследства при наличии тех или иных ситуаций (при наличии долга, излишка наследуемого имущества, в случае возврата наследства) и с учетом различных жизненных обстоятельств (количества наследников, степени родства, гендерной принадлежности (особый случай – случай гермафродита), беременности (поскольку пол ребенка еще не известен) и др.). В результате такого «сосуществования» арифметических и юридических правил, характерных для подобных «Сираджийи» трактатов, создавались новые методы представления, расчета и решения проблем наследования, создавалась «арифметика наследования».

5. Алгебра в классификации наук ал-Фараби

Продолженные и расширенные в IX в. исследования, указанные во введении, привели к двум фундаментальным эпистемологическим результатам: новой классификации наук и новой концепции энциклопедии знаний. Ведущую роль в этой новой классификации среди математических наук играла алгебра. Этот факт нашел отражение в трактате «Перечисление наук» («Ихса' ал-'улум») выдающегося ученого-энциклопедиста (математика, астронома, теоретика музыки, одного из крупнейших представителей восточного перипатетизма с элементами неоплатонизма) Абу Насра Мухаммада ибн Мухаммада ал-Фараби (872–950). Известный в средневековой арабской философской традиции как «Второй учитель» после Аристотеля, ал-Фараби органично объединил в своей классификации греческие науки и исламские дисциплины.

К математическим наукам кроме традиционного квадривиума – арифметики, геометрии, астрономии и музыки – он относит также оптику, науку о весах и так называемую науку об искусных приемах ('илм ал-хийал)²¹.

В отличие от Аристотеля, ал-Фараби подразделяет арифметику, геометрию и музыку на практическую и теоретическую. Так, теоретическая арифметика²² (по сути, теория чисел)

²⁰ Термин «мера числа» не определяется ас-Саджаванди, тем не менее, как следует из текста трактата, это – частное от деления одного из двух чисел (в данном случае числа сестер) обладающих наибольшим общим делителем (находящихся в согласии) на этот делитель.

²¹ «Наука об искусных приемах» ал-Фараби – это «учение о том, каким образом надо поступать, чтобы привести в соответствие и воплотить в естественных телах все то, чье существование доказано в математических науках путем рассуждений и доказательств», учение, дающее «разные способы и приемы для нахождения искусственным путем применения математики на практике в естественных и ощущаемых телах» [8, с. 31–33]. Эта совокупность дисциплин, которые в большинстве своем будут известны впоследствии как науки «смешанные» (мумтазадж, термин встречается у Ибн Сины) или «промежуточные» (mediae у Фомы Аквинского), включает искусство руководства строительством, «искусные приемы» измерения различных видов тел, изготовления различных инструментов и приборов для различных ремесел, в том числе зеркал и весов, то есть то, что мы бы назвали инженерными и прикладными науками.

²² Примечательна философская интерпретация ал-Фараби причин возникновения арифметики, представлен-

изучает «числа в абсолютном смысле, отвлеченные разумом от тел и всего, что поддается в них счету... числа здесь выступают как общие как для воспринимаемых, так и для не воспринимаемых чувствами предметов; эта наука проникает во все науки» [8, с. 17–18]. Теоретическая арифметика изучает «все то, что присуще их [чисел] индивидуальным сущностям, без соотнесения одних к другим» (то есть свойства чисел), изучает то, «что свойственно им при соотнесении одних к другим» (то есть различные отношения между числами), изучает операции над числами и «все то, что вытекает из этого при соотнесении одних к другим, и объясняет, каким образом числа находятся по каким-то неизвестным числам» [8, с. 18–19]. Практическая арифметика (‘илм ал-‘адад ал-‘амали), по ал-Фараби, изучает число конкретных пересчитываемых предметов и применяется в торговых и гражданских делах. К гражданским делам (му‘амалат мадания), относятся и проблемы раздела наследства. Таким образом, расчет долей наследства с помощью арифметики ал-Фараби рассматривается как раздел математики.

В «Книге букв» ал-Фараби утверждает: «Вещью можно назвать любую вещь, которая обладает чтойностью (лат. “quidditas”. – И.Л.), независимо от того будет ли она внешней по отношению к душе или просто мыслимой каким-либо образом... сущее же всегда сказывается о любой вещи, обладающей чтойностью, внешней к душе, и не может сказываться о чтойности, только умозрительной. На этом основании вещь – более общее понятие, чем сущее» [10, с. 21].

Интересны комментарии Х. Тахири к этим рассуждениям ал-Фараби, собственно и обратившего наше внимание на них: «... ал-Фараби нападает на старую метафизику [Аристотеля], утверждая поразительное, что вещь – более общая, чем сущее. Это как если бы то, что можно назвать наукой о вещи, было бы более универсальным, чем наука о бытии [метафизика]. Есть ли наука, чьим объектом является вещь? Традиционный философ, знания которого ограничены греческим научным и философским результатом, был бы озадачен, услышав, что есть что-то, подобное науке о вещи. Он потерпел бы поражение, если бы попытался найти подобную в классификации наук ал-Фараби, поскольку не мог знать, что автор “Перечисления наук” поместил ее в новую категорию под названием “наука о искусных приемах”» [10, с. 21].

Итак, если, как утверждает ал-Фараби, вещь – более универсальное понятие, чем сущее, то если бы была «наука о вещи», она была бы более универсальной, чем наука о сущем, то есть метафизика.

Однако ал-Фараби не только не отрицает универсальность метафизики, но, следуя Аристотелю, утверждает это в своем трактате «Цель “Метафизики”»: эта наука «рассматривает то, что присуще всему сущему» и ее первый предмет – «абсолютное бытие, подобное всеобщности, а именно, единое» [11, с. 335–337]. Более того, ал-Фараби утверждает единственность универсальной науки, поскольку «если бы их было две, то каждая из них должна была бы иметь отдельный предмет исследования и не охватывать предмет какой-либо другой науки, то есть являться частной. В этом случае обе эти науки были бы частными, а это вызвало бы противоречие» [11, с. 335–337].

Несмотря на это, «наукой о вещи», образно говоря, оказывается алгебра – относительно новая во времена ал-Фараби математическая дисциплина, в рамках которой формируется новая математическая объединяющая концепция – «алгебраическое неизвестное», для обозначения которого ал-Хорезми и применил арабский термин «шай», то есть «вещь». Ал-Фараби относит алгебру к числовым приемам, входящим в его «науку об искусных приемах», и характеризует

ная в его трактате «О происхождении наук»: «... число, которое представляет собой множество, составленное из единиц, возникло благодаря тому, что субстанция может быть разделена многими способами, и содержит различные части. Так как субстанция по своей природе может быть потенциально разделена до бесконечности, то и число потенциально бесконечно. Наука о числе – это наука об умножении одних частей субстанций на другие, о делении одних на другие, о прибавлении одних к другим, об отнятии одних от других, о нахождении корня всех тех частей, которые имеют корни, о нахождении их пропорций и т. д. Отсюда ясно, каким образом было получено число, откуда оно возникло и стало умножаться, какова была причина, благодаря которой оно получило бытие, перешло от возможности к действительности и от небытия к бытию. Эту науку греческие мудрецы называют арифметикой» [9, с. 92–93].

эту дисциплину как «общую и для чисел, и для геометрии» [8, с. 33].

Особенности предмета алгебры ал-Фараби описывает следующим образом: «Она [алгебра] содержит искусные приемы нахождения и применения чисел, основы которых для рациональных и иррациональных величин даны в десятой книге “Начал” и в том, что не упомянуто Евклидом. Поскольку рациональные и иррациональные величины относятся одни к другим, как числа к числам, то каждое число будет соответствовать рациональной или иррациональной величине. Если находятся числа, которые соответствуют некоторым величинам, находящимся в пропорции, то каким-то способом найдутся и эти величины. Поэтому мы постулируем, что определенные рациональные числа соответствуют рациональным величинам, а определенные иррациональные числа соответствуют иррациональным величинам»²³ [8, с. 33–34].

Из этого фрагмента следует, что коэффициентами алгебраических уравнений могут быть не только натуральные числа, но и непрерывные геометрические величины. Более того, появление у ал-Фараби терминов «рациональные числа» и «иррациональные числа», а также его утверждение, что отношения несоизмеримых величин соответствуют отношениям натуральных чисел, свидетельствуют о том, что под числами он понимает не только натуральные числа.

Тот факт, что алгебра применяется в равной мере в двух науках – арифметике и геометрии, алгебраическая «вещь» – современное алгебраическое неизвестное – может быть и числом и геометрической величиной, противоречит, однако, тезису Аристотеля о несоизмеримости видов, лежащему в основе его классификации наук, другими словами, тезису о недопустимости перехода от одной науки к другой в процессе доказательства: «Нельзя доказать посредством одной науки положения другой, за исключением тех случаев, когда науки так относятся друг к другу, что одна подчинена другой, каково отношение, например, оптики к геометрии и гармонии – к арифметике» (Аристотель, «Вторая аналитика», 75a14–16). Аристотель отрицает возможность взаимодействия не только различных наук, но также и наук в рамках одной научной дисциплины (об этом более подробно см. [14; 15]).

Ал-Фараби осознавал далеко идущие философские последствия переосмысления математики. Появление новых математических дисциплин, таких как практическая арифметика, алгебра, «наука об искусных приемах» определило необходимость новой классификации наук и неаристотелевской онтологии, позволяющей познавать объект без возможности точного представления о нем.

6. Заключение

Изложенные факты свидетельствуют о появлении и существовании особой научной традиции, характерной исключительно для средневековой арабо-мусульманской науки и заключающейся во взаимодействии арифметики и алгебры с наукой о наследственном праве или наукой о расчете долей наследства (‘илм ал-фара’ид). Оформившаяся в VIII в. в рамках мусульманского гражданского права эта дисциплина, правила которой определяются предписаниями Корана и Сунны, участвовала в формировании одного из разделов алгебры – «алгебры наследования». И «арифметика наследования» и «алгебра наследования» основываются на разрабатываемых в наследственном праве правилах, регулирующих размер законных долей и ограниченный объем завещанного наследства с учетом различных жизненных обстоятельств. «Алгебра наследования», в отличие от «арифметики наследования», имеет дело не с простыми случаями распределения законных долей, которые могут быть решены с помощью элементарных арифметических операций с дробями, но с более сложными случаями деления

²³Представленный перевод этого фрагмента основан на русском переводе А. Кубесова и И. О. Мохаммеда арабского текста этого фрагмента [8, с. 33–34] и русском переводе Г. П. Матвиевской средневековой латинской версии [12, с. 246]. Несколько отличный английский перевод дан в [13, с. 168].

наследства, решение которых производится с помощью алгебраических методов, сводящихся к линейным и неопределенным уравнениям, при этом юридические стороны решаемых проблем не затрагиваются. Такая «алгебра наследования» составляет большую часть написанной в первой четверти IX в. «Краткой книги об исчислении алгебры и алмукабалы» выдающегося среднеазиатского математика ал-Хорезми. Наследственное право разрабатывалось в процессе формирования различных религиозно-правовых школ и становления норм исламского права. Учеными-правоведами, представителями этих школ, составлялись трактаты по наследственному праву с VIII в. В таких сочинениях, подобно наиболее значимой из них «Сираджийи» ас-Саджаванди (XII в.), арифметические правила расчета долей наследников рассматривались в контексте общего наследственного права и принятых в нем положений. В итоге, средневековые исламские юристы-математики и математики получали новые методы представления, расчета и решения наследственных проблем, сочетающие элементы таких неродственных дисциплин, как юриспруденция и математика, создавая научную традицию, основанную на сосуществовании математической и юридической дисциплин.²⁴

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лютер И. О. Алгебра в классификации наук ал-Фараби // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XV международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова (28–31 мая 2018). Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2018. С. 358–360.
2. Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми. Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы / Пер. Б. А. Розенфельда // Математические трактаты. Ташкент: Фан, 1983. С. 20–81. 306с.
3. Коран / Перевод с араб. акад. И. Ю. Крачковского; предисл. к изд. 1986 г. П. Грязневича; предисл. к изд. 1963 г. В. Беляева. М.: АНС-Принт, 1990. 512 с.
4. Gandz S. The Algebra of Inheritance: A Rehabilitation of Al-Khuwarizmi // Osiris. 1938. Vol. 5. P. 319–391.
5. Rashed R. Classical Mathematics from Al-Khwarizmi to Descartes / Transl. by M. H. Shank // Culture and Civilization in the Middle East Series: vol.44. London and New York: Routledge, 2015. 749 p.
6. The Algebra of Mohammed ben Musa. Edited and translated by Frederic Rosen. London: J.L. Cox, 1831.
7. Al-Sirajiyah or the Mahommedan law of inheritance / Repr. from the transl. of Sir W. Jones, published in Calcutta, in 1792; with notes and appendix of A. Rumsey. Calcutta–Bombay: Thacker, Spink, and Co., 1890.
8. Аль-Фараби. Перечисление наук (математика) // Математические трактаты. Алма-Ата: Наука, 1972. С. 17–51.
9. Аль-Фараби. О происхождении наук // Естественные-научные трактаты. Алма-Ата: Наука, 1987. С. 89–104.
10. Tahiri H. Mathematics and the Mind. An Introduction into Ibn Sina's Theory of Knowledge. Heidelberg–New York–Dordrecht–London: Springer, 2016. 75 p.

²⁴ Дальнейшее развитие этой традиции в работах йеменского ученого Абу Якуба Юсуфа ас-Сардафи (ум. 1105) и тунисского ученого Абу ал-Хасана ибн 'Али ал-Каласади (ум. 1486) проанализировано в [16].

11. Аль-Фараби. О целях Аристотеля в «Метафизике» // Историко-философские трактаты. – Алма-Ата: Наука, 1985. С. 331–341.
12. Матвиевская Г. П. Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке. Ташкент: Фан, 1967. 344 с.
13. Rashed R. Philosophy of mathematics // The unity of science in the Arabic tradition: science: logic, epistemology and their interactions / Ed by S. Rahman, T. Street, H. Tahiri. Vol. 11. Berlin: Springer, 2008. P. 153–182.
14. Лютер И. О. Классификация наук ал-Фараби и комментариев ал-Хайсама к теории отношений Евклида // Математика, физика, информатика и их приложения в науке и образовании: сборник докладов Международной школы-конференции молодых ученых (Москва, 12–15 декабря 2016 г.). Москва: МИРЭА, 2016 г. С. 186–187.
15. Лютер И. О. Вводные комментарии Ибн ал-Хайсама к пятой книге «Начал» Евклида // Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып. 16(51). Москва: Янус-К, 2018. С. 240–265.
16. Rebstock U. Arithmetik (Hisab) und Erbteilungslehre ('Ilm al-fara'id). Symbiose einer islamischen Wissenschaftsdisziplin // Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften. Bd. 18. Frankfurt am Main: Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften an der Johann Wolfgang Goethe-Universität, 2008/2009. S. 269–295.

REFERENCES

1. Lyuter, I.O. 2018, “Algebra in the classification of sciences of al-Farabi”, *Materialy XV mezhdunarodnoi konferenzii “Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennyye problemy i prilozheniya”* [Proceedings of the XV International Conference «Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications»], Tula, pp. 358–360.
2. Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi. 1983, “Kratkaja kniga ob ischislenii algebrы i almukabaly” [“The brief book on calculation of algebra and almuqabala”], Russian transl. by B.A. Rosenfeld, *Matematicheskie traktaty* [Mathematical treatises], Fan, Tashkent, pp. 20–81.
3. *Quran*, 1990, Trans. by I.Yu. Krachkovskii, ANS-Print, Moscow, 512 p.
4. Gandz, S. 1938, “The Algebra of Inheritance: A Rehabilitation of Al-Khuwarizmi”, *Osiris*, vol. 5, pp. 319–391.
5. Rashed, R. 2015, *Classical Mathematics from Al-Khwarizmi to Descartes*, Transl. by M. H. Shank, Culture and Civilization in the Middle East Series, vol. 44, Routledge, London and New York, 749 p.
6. *The Algebra of Mohammed ben Musa. Edited and translated by Frederic Rosen*. 1831, Printed for the Oriental Translation Fund, J.L. Cox, London.
7. *Al-Sirajiyah or the Mahomedan Law of Inheritance*. 1890, Repr. from the Transl. of Sir W. Jones, published at Calcutta, in 1792, with Notes and Appendix of A. Rumsey, Thacker, Spink, and Co., Calcutta.
8. Al-Farabi. 1972, “Enumeration of sciences (mathematics)”, *Matematicheskie traktaty* [Mathematical treatises], Nauka, Alma-Ata, pp. 17–51.

9. Al-Farabi. 1987, “O proiskhozhdenii nauk” [“On the origin of sciences”], *Estestvenno-nauchnye traktaty* [Natural science treatises], Nauka, Alma-Ata, pp. 89–104.
10. Tahiri, H. 2016, *Mathematics and the Mind. An Introduction into Ibn Sina’s Theory of Knowledge*, Springer, Heidelberg–New York–Dordrecht–London, 75 p.
11. Al-Farabi. 1985, “O tseljakh Aristotelja v «Metafizike»” [“On Aristotle’s aims in ‘Metaphysics’”] // *Istoriko-filosofskie traktaty* [Historical and philosophical treatises], Nauka, Alma-Ata, pp. 331–341.
12. Rashed, R. 2008, “Philosophy of mathematics”, *The unity of science in the Arabic tradition: science: logic, epistemology and their interactions*, vol. 11. Springer, Berlin, pp. 153–182.
13. Matvijejskaja, G.P. 1967, *Uchenie o chisle na srednevekovom Blizhnem i Srednem Vostoke* [The teaching on number in the medieval Middle and Near East], Fan, Tashkent, 344 p.
14. Lyuter, I. O. 2016, “Classification of sciences of al-Farabi and al-Haytham’s commentary on Euclid’s ratio theory”, *Matematika, fizika, informatika i ikh prilozheniya v nauke i obrazovanii: Sbornik dokladov mezhdunarodnoy shkoly-konferentsii molodykh uchenykh* [Mathematics, physics, computer science and their applications in science and education: Proceedings of the International School Conference of Young Scientists], Moscow, pp. 186–187.
15. Lyuter, I. O. 2018, “Ibn al-Haytham’s introductory commentaries on the fifth book of Euclid’s «Elements»”, *Istoriko-matematicheskiye issledovaniya* [Historical and mathematical investigations], Second Series, Iss. 16(51), Yanus-K, Moscow, pp. 240–265.
16. Rebstock, U. 2008/2009, “Arithmetik (Hisab) und Erbteilungslehre (‘Ilm al-fara’id). Symbiose einer islamischen Wissenschaftsdisziplin”, *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften*, Bd. 18, Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften an der Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main, S. 269–295.