# ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 519.8, 519.2, 330.4

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-370-388

# Некоторые задачи оптимизации управления социо-эколого-экономическими системами

Р. А. Жуков

**Жуков Роман Александрович** — доцент кафедры "Математики и информатики", Тульский филиал Финансового университета при Правительстве Р $\Phi$ , г. Тула. e-mail: cpluszh@mail.ru

#### Аннотация

Предложен подход к формированию и решению класса задач многокритериальной оптимизации, расширяющий метододологию анализа среды функционирования сложных систем, рассматриваемых как социо-эколого-экономические системы (СЭЭС). Подход включает в себя формирование частных и интегральных показателей результативности, отличием которого является вычисление собственного норматива для каждого из рассматриваемых объектов исследования. Алгоритм конструирования индикаторов на основании статистической обработки данных и эконометрического моделирования обеспечивает учет взаимосвязи как частных показателей оценки, так и конкретных существенных условий функционирования СЭЭС (факторов состояния и воздействия). Представлена методика формирования коэффициента гармоничности, характеризующего сбалансированность уровня развития СЭЭС, которая является одним из критериев устойчивости сложных систем. Осуществлена постановка задачи оптимизации критерия результативности функционирования СЭЭС за счет поиска факторов состояния и воздействия, при которых норматив может быть достигнут. В общем случае такая задача сводится к нелинейной задаче многокритериальной оптимизации с ограничениями. Критерий оптимальности выбирается в зависимости от целей субъектов управления СЭЭС. Рассмотрен частный случай решения задачи оптимизации для регионов Центрального федерального округа с использованием данных Росстата за 2007-2015 годы.

*Ключевые слова:* эконометрическое моделирование, интегральный показатель, социоэколого-экономические системы (СЭЭС), многокритериальная оптимизация.

Библиография: 25 названий.

#### Для цитирования:

Р. А. Жуков. Некоторые задачи оптимизации управления социо-эколого-экономическими системами // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 370–388.

# CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 519.8, 519.2, 330.4

 $DOI \ 10.22405/2226-8383-2019-20-1-370-388$ 

Some optimization problems of the management of socio-ecological-economic systems

R. A. Zhukov

Zhukov Roman Aleksandrovich — associate Professor of "Mathematics and Informatics Tula branch of the Financial University under the Government of the Russian Federation, Tula. e-mail: cpluszh@mail.ru

#### Abstract

An approach to the formation and solution of a class of multicriteria optimization problems is proposed, extending the methodology of analysis of the environment of functioning of complex systems considered as socio-ecological and economic systems (sees). The approach includes the formation of individual and integral performance indicators, the difference of which is the calculation of its own standard for each of the objects of study. The algorithm for constructing indicators on the basis of statistical data processing and econometric modeling provides for taking into account the relationship between the particular indicators of evaluation and the specific essential conditions of the sees functioning (state and impact factors). The technique of formation of the coefficient of harmony, which characterizes the balance of the level of development of sees, which is one of the criteria for the stability of complex systems. The statement of the problem of optimization of the sees performance criterion is carried out due to the search for the state and impact factors in which the standard can be achieved. In the General case, this problem reduces to a nonlinear multi-objective optimization problem with constraints. The optimality criterion is selected depending on the objectives of the sees management entities. A special case of the solution of porblem for regions of the Central Federal district with the use of Rosstat data for 2007-2015 is considered.

Keywords: econometric modeling, integral index, socio-ecologo-economic system (SEES), multicriteria optimization.

Bibliography: 25 titles.

#### For citation:

R. A. Zhukov, 2019, "Some optimization problems of the management of socio-ecological-economic systems", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 370–388.

#### 1. Введение

Проблеме оценки состояния и функционирования сложных систем, рассматриваемых как социо-эколого-экономические системы (СЭЭС), посвящены многие работы российских и зарубежных авторов, касающиеся как методов формирования частных и интегральных индикаторов, так и поиска оптимальных решений, при которых сложная система переходит на оптимальный и устойчивый режим. Идентификация СЭЭС, их анализ и оценка зависят от точек зрения, используемых подходов и методов обработки и представления данных, что демонстрируется наличием их большого разнообразия. Выбор показателей оценки состояния регионов современными учеными экономистами, социологами и географами определяется прикладными задачами и сформулированными целями исследования, а также общностью изучаемой категории и экспертными заключениями [1]. Это и определяет наличие разнообразных подходов, методик, моделей, а также используемых частных и интегральных индикаторов. Традиционным подходом формирования интегральных индикаторов для анализа социоэколого-экономических систем является процедура усреднения частных показателей, например, вычисление средних характеристик [2], метод (Data Envelopment Analysis) DEA [3, 4] и его российский аналог АСФ, предложенный В.Е. Кривоножко и А.В. Лычевым [5], а также его модификация в части формирования эталонных границ эффективности, разработанная Е.П. Моргуновым [6]. Для оценки качества жизни населения А.С. Айвазяном был использован метод главных компонент с целью формирования интегрального индикатора оценки, относящегося к синтетической латентной категории [7]. Применяются методы многомерного статистического анализа и имитационного моделирования [8].

Для оценки устойчивости СЭЭС и принятия решений используются подходы, основанные на идеях П. Дойла, М. Портера, А.А. Томпсона, Р.А. Фатхутдинова и ряда других авторов [9]. При этом решаются классические задачи оптимизации, в большинстве своем сводящиеся к задачам линейного или нелинейного программирования [10], в том числе с использованием методов тропической оптимизации [11]. Для принятия решений в сфере управления СЭЭС более применимы методы многокритериальной оптимизации, когда экспертное оценивание альтернатив может быть формализовано или заменено строгой математической постановкой или поиском Парето-оптимального множества [12]. При этом возникает вопрос оценки важности критериев, выбора их весовых коэффциентов и методов решения [13, 14, 15], что на сегодняшний день является открытой проблемой.

## 2. Конструирование критериев оценки

Пусть имеются подмножества  $X_j$  факторов состояния  $x_j(t) \in X_j = X_1 \bigcup X_2 \bigcup X_3$  множества  $X \supseteq X_j$  причем  $X = X_1 \bigcup X_2 \bigcup X_3 \subseteq \text{Re}$ , где  $X_i$  в общем случае пересекающиеся подмножества, имеющие социальный, экономический и экологический смысл (j=1..n - количество факторов состояния), а также подмножества  $Z_s$  факторов воздействия  $z_s(t) \in Z_s \subseteq Z \subseteq \text{Re}$  ( $s=1..u,\ u$  - количество факторов воздействия), t - параметр времени (t=1..T). Введем множества  $Y_i$  и  $\hat{Y}_i$  результатов  $y_i(t) \in Y_i = Y_1 \bigcup Y_2 \bigcup Y_3 \subseteq \text{Re}$  и  $\hat{y}_i(t) \in \hat{Y}_i = \hat{Y}_1 \bigcup \hat{Y}_2 \bigcup \hat{Y}_3 \subseteq \text{Re}$  ( $i=1..m,\ m$  - число результативных признаков) соответственно, где последнее определяется некоторой функцией  $f_i(X,Z)$  такой, что  $f:X \bigcup Z \to \hat{Y}_i$ . Каждое из подмножеств  $x_j(t),\ z_s(t),\ y_i(t)$  и  $\hat{y}_i(t)$  представляют собой набор показателей переменных, полученных в момент времени t с характеристиками: математические ожидания  $M(x_j(t)),\ M(z_s(t)),\ M(y_i(t)),\ M(\hat{y}_i(t))$  и среднеквадратические отклонения  $\sigma(x_j(t)),\ \sigma(z_s(t)),\ \sigma(y_i(t)),\ \sigma(y_i(t))$ . Тогда элементами подмножеств с индексом (\*)  $(X_i^*,\ Z_s^*,\ Y_i^*,\ \hat{Y}_i^*)$  будут:

$$x_{k,j}^{*}(t) = \frac{x_{k,j} - M(x_j(t))}{\sigma(x_j(t))},$$
(1)

$$z_{k,s}^*(t) = \frac{z_{k,s} - M(z_s(t))}{\sigma(z_s(t))},$$
(2)

$$y_{k,i}^{*}(t) = \frac{y_{k,i} - M(y_i(t))}{\sigma(y_i(t))},$$
(3)

$$\hat{y}_{k,i}^{*}(t) = \frac{\hat{y}_{k,i} - M(\hat{y}_{i}(t))}{\sigma(\hat{y}_{i}(t))},\tag{4}$$

где k-тый элемент множества K (объекта исследования (СЭЭС)) содержит в себе элементы подмножеств  $y_{k,i}(t) \in Y_k$ ,  $\hat{y}_{k,i}(t) \in \hat{Y}_k$ ,  $x_{k,j}(t) \in X_{k,j}$ ,  $z_{k,s}(t) \in Z_{k,s}$  (k = 1..N, N - число рассматриваемых объектов). При этом выполняются условия:

$$Y_i = \sum_{k=1}^m Y_{k,i}, \hat{Y}_i = \sum_{k=1}^m \hat{Y}_{k,i}, X_j = \sum_{k=1}^m X_{k,j}, Z_s = \sum_{k=1}^m Z_{k,s}.$$
 (5)

В качестве объекта может выступать хозяйствующий субъект, муниципальное образование, регион и т.п. Определим элементы подмножеств с индексом (0)  $(Y_i^0, \hat{Y}_i^0)$  как:

$$y_{k,i}^{0} = \frac{y_{k,i}^{*} - \min\{y_{k,i}^{*}, \hat{y}_{k,i}^{*}\}}{\max\{y_{k,i}^{*}, \hat{y}_{k,i}^{*}\} - \min\{y_{k,i}^{*}, \hat{y}_{k,i}^{*}\}},\tag{6}$$

$$\hat{y}_{k,i}^{0} = \frac{\hat{y}_{k,i}^{*} - \min\{y_{k,i}^{*}, \hat{y}_{k,i}^{*}\}}{\max\{y_{k,i}^{*}, \hat{y}_{k,i}^{*}\} - \min\{y_{k,i}^{*}, \hat{y}_{k,i}^{*}\}}.$$
(7)

Тогда частными индикаторами результативности k -того элемента множества K можно считать отношение:

$$\xi_{k,i}(t) = \frac{y_{k,i}^0(t)}{\hat{y}_{k,i}^0(t)},\tag{8}$$

образующими множество  $\Xi^{(0)}$ . Определим числа, которые характеризуют связь между p-тыми  $Y_p^0$ ,  $\hat{Y}_p^0$  и q-тыми  $Y_q^0$ ,  $\hat{Y}_q^0$  подмножествами  $r_{pq}$ ,  $\hat{r}_{pq}$  в виде:

$$r_{pq} = \frac{\sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} \sum_{k=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} y_{k,p}^{*}(t) \cdot y_{k,q}^{*}(t)}{\sqrt{\sum_{p=1}^{m} \sum_{k=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \left(y_{k,p}^{*}(t)\right)^{2}} \cdot \sqrt{\sum_{q=1}^{m} \sum_{k=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \left(y_{k,q}^{*}(t)\right)^{2}}},$$
(9)

$$\hat{r}_{pq} = \frac{\sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} \sum_{k=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \hat{y}_{k,p}^{*}(t) \cdot \hat{y}_{k,q}^{*}(t)}{\sqrt{\sum_{p=1}^{m} \sum_{k=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \left(\hat{y}_{k,p}^{*}(t)\right)^{2}} \cdot \sqrt{\sum_{q=1}^{m} \sum_{k=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \left(\hat{y}_{k,q}^{*}(t)\right)^{2}}}.$$
(10)

Очевидно, что эти значения будут одинаковыми для подмножеств  $Y_p^*, \hat{Y}_p^*$  и  $Y_q^*, \hat{Y}_q^*,$  а также  $Y_p, \hat{Y}_p$ .

Определим множество  $\Xi^{(1)}$ , элементами которого являются обобщенные индикаторы результативности  $\xi_k(t)$ , полученные из соотношения:

$$\xi_k(t) = \frac{\sqrt{\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m r_{pq} \cdot y_{k,p}^0(t) \cdot y_{k,q}^0(t)}}{\sqrt{\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \hat{r}_{pq} \cdot \hat{y}_{k,p}^0(t) \cdot \hat{y}_{k,q}^0(t)}}.$$
(11)

В общем случае совсем не обязательно определять множество  $\Xi^{(1)}$ , в состав которого входят все m результативных признаков, а составлять подмножества  $\Xi^{(p)}$  из набора  $m_i \leq m$  элементов в случае, если возникает необходимость оценивать результаты функционирования системы по ее структурным или функциональным элементам (например, отрасль, сектор экономики, сфера деятельности и т.п), а затем уже проводить обобщение (11) по уже сформированным на предыдущем шаге индикаторам, формируя, тем самым, многоуровневую схему оценки.

Вид и состав функций  $f_i: X \bigcup Z \to \hat{Y}_i$ , являющихся представлениями многофакторных регрессионных моделей, определяются решением проблемы их спецификации, на основе F-статистики и t-оценки параметров.

Выражение (11), являющееся, по сути, процедурой свертки данных, можно описать и в терминах векторного анализа. Каждое значение  $y_{k,p}^0(t)$  можно считать компонентой вектора  $\overrightarrow{y}_k^0$  в m-мерном пространстве с косоугольным базисом, образованным единичными ортами  $\overrightarrow{y}_p^0$ , причем угол между соответствующими осями можно представить в виде:

$$\cos \varphi_{pq} = \frac{\overrightarrow{y}_p^0 \cdot \overrightarrow{y}_q^0}{|\overrightarrow{y}_p^0| \cdot |\overrightarrow{y}_q^0|}.$$
 (12)

Тогда длину вектора  $\overrightarrow{y}_k^0$ , которая в принципе не зависит от выбора базиса, можно определить как:

$$|\overrightarrow{y}_{k}^{0}| = \sqrt{\overrightarrow{y}_{k}^{0} \cdot R \cdot \overrightarrow{y}_{k}^{0}} = \sqrt{\sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} r_{pq} \cdot y_{k,p}^{0} \cdot y_{k,q}^{0}},$$
(13)

что совпадает с числителем в (11). Таким же образом интерпретируется и знаменатель в (11). Их отношение и определяет количественную оценку результатов функционирования k-того

элемента множества K. Если  $\xi_k(t) \geq 1$ , то можно считать, что они являются удовлетворительными, в противном случае необходимо принять меры, направленные на достижение норматива, который рассчитан для каждого k-того объекта.

Возможность использования предложенного подхода позволяет удовлетворить всем требованиям, предъявляемым к интегральным индикаторам оценки. Многоуровневая схема обосновывает его универсальность, выражения (1)–(4) определяет безразмерность, а (6)–(7) – нормализацию. Соотношения (8)–(11) обеспечивают условие нормализации, причем последнее осуществляет учет взаимосвязи частных показателей (индикаторов) результативности. Входящие в состав нормативные значения показателей результативности из множеств  $\hat{Y}_i^*$  позволяют учесть конкретные факторы состояния и воздействия для объектов из множества K.

## 3. Модели формирования нормативов

Для формирования нормативов можно использовать модели произвольного вида. Наиболее распространенными являются модели линейного типа:

$$\hat{y}_i^* = \sum_{j=1}^n C_{i,j} \cdot x_j^* + \sum_{s=1}^s D_{i,s} \cdot z_s^*, \tag{14}$$

для обобщенного норматива:

$$\hat{y}_{i}^{*} = \left[ \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} \hat{r}_{pq} \cdot \left( \sum_{i=1}^{n} C_{p,i} \cdot x_{k,i}^{*} + \sum_{i=1}^{s} D_{p,i} \cdot z_{k,i}^{*} \right)^{0} \cdot \left( \sum_{j=1}^{n} C_{p,j} \cdot x_{k,j}^{*} + \sum_{j=1}^{s} D_{p,j} \cdot z_{k,j}^{*} \right)^{0} \right]^{1/2}.$$
(15)

где m — число результативных признаков; n — число факторов состояния, s — число факторов воздействия; p, q — индексы p-того и q-того результативного признаков; i, j — индексы i-того и j-того факторных признаков; k — индекс рассматриваемой единицы совокупности;  $\hat{r}_{pq}$  — парный коэффициент корреляции между p-тым и q-тым результативным признаками;  $C_{p,i}$ ,  $C_{q,j}$ ,  $D_{p,i}$ ,  $D_{q,j}$  — соответствующие весовые коэффициентами между p-тым, q-тым результативным и i-тым и j-тым факторами состояния и воздействия соответственно;  $x_{k,i}^*$ ,  $x_{k,j}^*$ ,  $z_{k,i}^*$ ,  $z_{k,j}^*$  — соответствующие им фактические стандартизованные значения; индекс (0) показывает, что проведена процедура нормализации для в соответствии с (6)–(7).

Также распространено использование нелинейных моделей мультипликативного типа или их логарифмических аналогов:

$$\ln \hat{y}_i^* = \sum_{j=1}^n C_{i,j} \cdot \ln x_j^* + \sum_{s=1}^s D_{i,s} \cdot \ln z_s^*, \tag{16}$$

что является равносильным представлению нелинейных моделей, а в случае использования труда и капитала в качестве объясняющих переменных, – в форме Кобба-Дугласа [16]:

$$\hat{y_i^*} = \prod_{i=1}^n x_j^{*C_{i,j}} \cdot \prod_{s=1}^s z_s^{*D_{i,s}}$$
(17)

Весовые коэффициенты  $C_{p,i}$ ,  $C_{q,j}$ ,  $D_{p,i}$ ,  $D_{q,j}$  находятся с помощью метода наименьших квадратов (МНК) или пошагового МНК [17].

Факторы воздействия включают в себя как факторы естественного, так и антропогенного характера, последние из которых могут быть управляемыми и неуправляемыми. Управляемые факторы позволяют перевести систему в желаемое состояние и заданное ее функционирование.

## 4. Критерий гармоничности

Гармоничное состояние, функционирование и развитие социо-эколого-экономической системы являются одними из свойств ее устойчивости. Это понятие связано со сбалансированным ростом, то есть равномерным положительным изменением ключевых показателей, характеризующих СЭЭС. Показатель должен удовлетворять условиям безразмерности и нормализации. При этом требование равномерного роста предопределяет необходимость равенства значений обобщенных показателей (формулы (2), (11)) по каждому из направлений (отсутствие асинхронности). Понятно, что такая ситуация возможна только в идеальном случае, и практически не реализуема, однако можно определить меру, которая позволяет оценить степень равномерности (гармоничности) состояния, функционирования и развития СЭЭС. Такой подход применим и к оценке отдельных составляющих (социальная, экологическая или экономическая), что определяет его универсальность. Коэффициент гармоничности можно представить как [18]:

$$K_k(t) = 1 - \frac{\sigma(\xi_{k,i}(t))}{M(\xi_{k,i}(t))},$$
(18)

 $M(\xi_{k,i}(t))$  – математическое ожидание,  $\sigma(\xi_{k,i}(t))$  – среднеквадратическое отклонение, определяемые по формулам:

$$M(\xi_{k,i}(t)) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \xi_{k,i}(t), \tag{19}$$

$$\sigma(\xi_{k,i}(t)) = \sqrt{\frac{1}{m} \left( \sum_{i=1}^{m} \xi_{k,i}(t) - M(\xi_{k,i}(t)) \right)^{2}}.$$
 (20)

Чем ближе к единице  $K_k$ , тем гармоничнее функционирует объект исследования. Данный индикатор не характеризует его специализацию, а указывает степень соответствия рассматриваемых индикаторов нормативам, с учетом конкретных условий. В (18) вычитаемое есть ни что иное как первый коэффициент вариации, характеризующий величину разброса значений показателей относительно среднего значения. Известно, что коэффициент вариации оценивает степень однородности совокупности, в данном случае показателей результативности СЭЭС. Если коэффициент вариации не превышает 10%, то считают, что степень рассеяния незначительна. При превышении 33% можно говорить о неоднородной совокупности. Аналогичную градацию можно сделать для коэффициента гармоничности: 1 – идеальный (гармоничный); 0,9...1 – высокий; 0,8...0,9 – средний; 0,66...0,8 – низкий; <0,66 – несбалансированный (негармоничный).

В случае равенства всех составляющих  $\xi_{k,i}(t)$ ,  $\sigma(\xi_{k,i}(t))$  будет равно 0, а, следовательно, коэффициент гармоничности примет значение 1, что будет соответствовать идеальному состоянию (функционированию) СЭЭС. В данном случае, коэффициент гармоничности представлен в статическом варианте, то есть его значение характеризует не сбалансированный рост, а сбалансированность сложной системы в заданный период времени по выбранным показателям оценки.

# 5. Постановка задач оптимизации

В случае несоответствия показателей функционирования сложной системы нормативам, когда значения  $\xi_{k,i}(t)$ ,  $\xi_k(t)$ , рассчитанные соответственно по (8) и (11), меньше единицы, необходимо изменить факторы состояния и управляемые факторы воздействия с целью достижения требуемых значений индикаторов результативности. Это возможно осуществить за

счет проведения процедуры оптимизации целевой функции по соответствующим управляющим компонентам модели.

В зависимости от целей управляющих воздействий можно сформулировать несколько типов задач.

Задача 1. Оптимизация частных показателей результативности.

Пусть і-тый норматив (частный показатель результативности) для к-того элемента совокупности  $\hat{y}_{k,i}^{0}(t)$  может быть представлен в общем виде как:

$$\hat{y}_{k,i}^{0}(t) = f\left(x_{k,i,j}^{*}(t) + \Delta x_{k,i,j}^{*}(t), z_{k,i,s}^{*}(t) + \Delta z_{k,i,s}^{*}(t)\right)^{0}, \tag{21}$$

где  $j,\,s$  — индексы факторов состояния  $x_{k,i,j}^*(t)$  и воздействия  $z_{k,i,s}^*(t);\,\Delta x_{k,i,j}^*(t)$  и  $\Delta z_{k,i,s}^*(t)$ - их соответствующие возможные приращения (стандартизованные); t — время (период); процедура нормализации обозначена верхним индексом (0). Вид функции f — может быть произвольным (линейным (14), (16) или нелинейным, например (17)).

Ставится задача: при каких возможных значениях  $x_{k,i,j}^*(t) + \Delta x_{k,i,j}^*(t), z_{k,i,s}^*(t) + \Delta z_{k,i,s}^*(t)$ выражение (8) стремилось бы к единице. То есть:

$$\frac{y_{k,i}^0}{\hat{y}_{k,i}^0} \to 1,\tag{22}$$

где i — индекс частного показателя результативности;  $y_{k,i}^0, \hat{y}_{k,i}^0$  — соответственно нормативные и фактические значения индикатора.

На основании этого требования можно представить целевую функцию в виде разности фактического и расчетного значений частного показателя результативности, полученной из coothomething (22):

$$F(t) = \hat{y}_{k,i}^0 - y_{k,i}^0 \to min. \tag{23}$$

Пусть имеются ограничения в общем случае нелинейного вида:

$$g_l\left(x_{k,i,j}^*(t) + \Delta x_{k,i,j}^*(t), z_{k,i,p}^*(t) + \Delta z_{k,i,p}^*(t), z_{k,i,q}^*(t) + \Delta z_{k,i,q}^*(t)\right) = 0, \tag{24}$$

причем l - число ограничений, j — индекс факторов состояния, p, q — индексы неуправляемых

и управляемых факторов воздействия s соответственно, а  $z_{k,i,s}^* = z_{k,i,p}^* \bigcup z_{k,i,q}^*$ . Требуется найти такое решение  $\Delta x_{k,i}^*(t), \Delta z_{k,i}^*(t) = \{\Delta x_{k,i,j}^*(t), \Delta z_{k,i,q}^*(t)\}$ , при котором функция (23) при наличии ограничений (24) принимала бы минимальное значение.

То есть процедура оптимизации в данном случае сводится к задаче нелинейного программирования, которая может быть решена методом Лагранжа [19].

Решение такой задачи можно качественно интерпретировать следующим образом.

Интерпретация 1: насколько наблюдается  $\Delta x_{k,i,j}^*(t), \Delta z_{k,i,q}^*(t)$  перерасход (недоиспользование) факторов состояния и воздействия в k-той СЭЭС.

Интерпретация 2: насколько  $\Delta x_{k,i,j}^*(t), \Delta z_{k,i,q}^*(t)$  необходимо интенсифицировать использование  $x_{k,i,j}^*(t)$  и рационализировать  $z_{k,i,q}^*(t)$ , чтобы норматив в k-той СЭЭС был достигнут.

Данная постановка применима в случае, если для органов управления приоритетом является улучшение одной из характеристик функционирования социо-эколого-экономической системы при максимально допустимых расходах на реализацию мероприятий, направленных на изменения факторов состояния и воздействия.

В линейном случае решение задачи оптимизации сводится к общей задаче линейного программирования:

$$\left[\sum_{j=1}^{n} C_{i,j} \cdot (x_{k,i,j}^{*}(t) + \Delta x_{k,i,j}^{*}(t)) + \sum_{s=1}^{s} D_{i,s} \cdot (z_{k,i,s}^{*}(t) + \Delta z_{k,i,s}^{*}(t))\right]^{0} - y_{k,i}^{0} \to min, \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{k,i,j} \cdot (x_{k,i,j}^{*}(t) + \Delta x_{k,i,j}^{*}(t)) + \sum_{s=1}^{s} d_{k,i,s} \cdot (z_{k,i,s}^{*}(t) + \Delta z_{k,i,s}^{*}(t)) \ge (\le, =)b_{i}.$$
 (26)

Здесь  $a_{k,i,j}, d_{k,i,s}, b_i$  - соответствующие коэффициенты системы ограничений.

**Задача 2.** Оптимизация факторов состояния и воздействия для частного показателя результативности.

Данная задача аналогична предыдущей, однако вид целевой функции определяется суммой приращения факторов состояния и воздействия. Такая постановка может применима в случае, если приоритетом органов управления является минимизация затрат на реализацию мероприятий, направленных на сокращение разницы между фактическим и нормативным значениями частного показателя результативности.

В этом случае целевая функция может быть представлена как:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_{k,i,j}^{*}(t)| + \sum_{s=1}^{s} |\Delta z_{k,i,q}^{*}(t)| \to \min.$$
 (27)

Тогда выражение (23) должно быть включено в систему ограничений:

$$\hat{y}_{k,i}^0 - y_{k,i}^0 \ge 0, (28)$$

$$g_l\left(x_{k,i,j}^*(t) + \Delta x_{k,i,j}^*(t), z_{k,i,p}^*(t) + \Delta z_{k,i,p}^*(t), z_{k,i,q}^*(t) + \Delta z_{k,i,q}^*(t)\right) = 0.$$
(29)

Решение такой задачи может быть осуществлено методами, описанными в задаче 1.

Задача 3. Многокритериальная оптимизация для частных показателей результативности. Потребуем, чтобы одновременно выполнялись условия (23) и (27), что подразумевает обеспечение требуемого норматива и минимизации затрат со стороны органов управления. В этом случае задача сводится к многопараметрической оптимизации двух целевых функций при наличии системы ограничений (29).

$$F(t) = \hat{y}_{k,i}^0 - y_{k,i}^0 \to min. \tag{30}$$

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_{k,i,j}^{*}(t)| + \sum_{s=1}^{s} |\Delta z_{k,i,q}^{*}(t)| \to min.$$
 (31)

$$g_l\left(x_{k,i,j}^*(t) + \Delta x_{k,i,j}^*(t), z_{k,i,p}^*(t) + \Delta z_{k,i,p}^*(t), z_{k,i,q}^*(t) + \Delta z_{k,i,q}^*(t)\right) = 0.$$
(32)

Для решения такой задачи можно воспользоваться широко известными методами, например: метод взвешенных сумм с точечным оцениванием весов, метод свертывания частных критериев в суперкритерий (коэффициенты находятся экспертно либо с помощью метода Лагранжа), метод Парето.

Задача 4. Оптимизация обобщенного показателя результативности.

Как и в предыдущих задачах, целевую функцию можно представить в виде разности фактического и расчетного значений обобщенного (частного) показателя результативности, полученную из соотношения (8) или (11) для выбранного k-того элемента совокупности. Тогда для обобщенного вида можно записать:

$$F(t) = Y_{k,norm} - Y_{k,fact} \tag{33}$$

или:

$$F(t) = \sqrt{\sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} \hat{r}_{pq} \cdot \hat{y}_{k,p}^{0}(t) \cdot \hat{y}_{k,q}^{0}(t)} - \sqrt{\sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} r_{pq} \cdot y_{k,p}^{0}(t) \cdot y_{k,q}^{0}(t)} \rightarrow min,$$
(34)

где  $\hat{y}_{k,p}^0(t)$  может определяться соотношениями (17) и процедурой нормализации (7). Ограничения имеют вид (24).

Такая задача может быть поставлена в случае, если органам управления необходимо улучшить комплексную составляющую функционирования СЭЭС, например, отрасль либо обобщенные характеристики экономики экологии или социального развития. Для линейного вида нормативов и системы ограничений можно воспользоваться алгоритмом, предложенным в [20]. В данном контексте факторные признаки не разделяются на факторы состояния и воздействия и обозначены одинаково  $(x_j)$ .

Потребуем, чтобы выполнялось условие:

$$\frac{\xi_{k,fact}}{\xi_{k,norm}} = 1. \tag{35}$$

Рассматривая ресурсный потенциал как совокупность факторных признаков  $x_j$ , можно предположить, что при неэффективном управлении один или несколько факторных признаков используются нерационально. Следовательно, существуют потери при использовании j-того фактора, которые можно учесть посредством введения соответствующих коэффициентов  $K_j$ , имеющих смысл мультипликаторов (акселераторов). При достижении "нормативного" значения результативного признака,  $K_j$  должны принять значение, равное единице. Если коэффициенты в (15)  $C_{j,j} < 0$ , то  $K_j > 1$  и, если  $C_{j,j} > 0$ , то  $K_j < 1$ .

В первом случае очевидно, что чем выше значение  $K_j$ , тем менее рационально используется j-тый фактор, во втором случае: чем меньше значение  $K_j$ , тем хуже используется j-тый фактор. В этом смысле представим фактическое значение  $\xi_{k,fact}$ , используя форму (15) и включив в нее мультипликаторы (акселераторы):

$$\xi_{k,fact} = \left[ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} r_{i,j} \cdot C_{i,p} \cdot C_{j,q} \cdot \frac{x_{k,p}}{K_{k,p}} \cdot \frac{x_{k,q}}{K_{k,q}} \right]^{1/2}, \tag{36}$$

где m — число результативных признаков, n — число факторных признаков, i — индекс i-того результативного признака, p, q — индекс p-того (q-того) факторного признака, k — индекс рассматриваемой единицы совокупности,  $r_{i,j}$  — парный коэффициент корреляции между i-тым и j-тым результативным признаком, вычисленный по (9),  $C_{i,p}$ ,  $C_{j,q}$  — "весовой" коэффициент между i-тым (j-тым) результативным и p-тым (q-тым) факторным признаками,  $x_{k,p}$  ( $x_{k,q}$ ) — фактическое значение стандартизованного p-того (q-того) факторного признака для k-той единицы совокупности,  $K_{k,p}$  ( $K_{k,q}$ ) — акселератор p-того (q-того) факторного признака для x-той единицы совокупности. Очевидно, что выражение (x0) является положительно определенным.

Отсюда сформулируем основную задачу органов власти в части государственного управления и контроля: выявление наиболее низких значений (или высоких значений в случае отрицательности коэффициента в (36)) акселераторов, а также причины, которые повлияли на их формирование. Причины могут быть определены посредством анализа методом экспертных оценок, в результате чего оказывается возможным разработать рекомендации для хозяйствующих субъектов с целью повышения эффективности использования ресурсного потенциала. Уравнение (36) имеет множество решений. Следовательно, наиболее целесообразным представляется выявить тот фактор, у которого акселератор минимален (в случае  $C_{i,p}(C_{j,q}) > 0$ ) либо максимален (в случае  $C_{i,p}(C_{j,q}) < 0$ ).

С этой целью определим направление, в котором правая часть уравнения (56) увеличивается наискорейшим образом. Для этого вычислим частные производные по параметрам - акселераторам - и выделим из них максимальное значение. После некоторых преобразований

получим:

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial K_s} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^n r_{i,j} \left[ C_{i,p} \cdot C_{j,s} + C_{j,p} \cdot C_{i,s} \right] \cdot \frac{x_{k,p}}{K_{k,p}} \cdot \frac{x_{k,s}}{K_{k,s}^2}}{\left[ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n r_{i,j} \cdot C_{i,p} \cdot C_{j,q} \cdot \frac{x_{k,p}}{K_{k,p}} \cdot \frac{x_{k,q}}{K_{k,q}} \right]^{1/2}}.$$
(37)

Здесь i,j,p – индексы суммирования, s – индекс s-того акселератора, k – индекс рассматриваемой единицы совокупности, по которому берется частная производная. Определим s-тый индекс из условия:

$$s = \max_{s} \left[ \frac{\partial \xi_k}{\partial K_{k,s}} \right] = \min_{s} \sum_{i=1}^{m} \sum_{p=1}^{m} r_{i,j} \left[ C_{i,p} \cdot C_{j,s} + C_{j,p} \cdot C_{i,s} \right] \cdot \frac{x_{k,p}}{K_{k,p}} \cdot x_{k,s}.$$
(38)

Определив s-тый индекс, можно переходить к определению s-того акселератора, приняв, что на первом шаге все остальные значения акселераторов равны единице. Решение сводится к определению корней квадратного уравнения из (36), где неизвестным параметром будет  $K_{k,s}$ , т. е.:

$$a_k \cdot K_{k,s}^2 + b_k \cdot K_{k,s} + c_k = 0, (39)$$

где

$$a_k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m r_{i,j} \left[ \sum_{p=1}^n \left[ \sum_{q=1}^n C_{i,p} \cdot C_{j,q} \cdot \frac{x_{k,p}}{K_{k,p}} \cdot \frac{x_{k,q}}{K_{k,q}} - \left( C_{i,p} \cdot C_{j,s} + C_{i,s} \cdot C_{j,p} \right) \cdot \frac{x_{k,p}}{K_{k,p}} \cdot x_{k,s} \right] -$$

$$-C_{i,s} \cdot C_{j,s} \cdot x_{k,s}^2], \tag{40}$$

$$b_k = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} r_{i,j} \sum_{p=1}^{n} \left[ C_{i,p} \cdot C_{j,s} + C_{j,p} \cdot C_{i,s} \right] \cdot \frac{x_{k,p}}{K_{k,p}} \cdot x_{k,s}, \tag{41}$$

$$c_k = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} r_{i,j} \cdot C_{i,s} \cdot C_{j,s} \cdot x_{k,s}^2 - \xi_{k,norm}^2$$
(42)

Корень уравнения выбираем из условия неотрицательности акселератора.

Таким образом, можно оценить наибольшие потери при использовании *s*-того фактора и принять меры по их устранению, то есть обеспечить выполнение равенства:

$$\xi_{k,fact} = \xi_{k,norm}. \tag{43}$$

Полученное количественное выражение для  $K_{k,s}$  определяет максимально возможные потери производителя при использовании s-того фактора при условии, что все остальные факторные признаки используются рационально.

Возможен случай, когда уравнение (39) не имеет решения. В этом случае можно потребовать, чтобы:

$$a_k \cdot K_{k,s}^2 + b_k \cdot K_{k,s} + c_k \to min. \tag{44}$$

Из (39) очевидно, что  $a_k > 0$ , следовательно, левая часть – суть парабола, ветви которой направлены вверх, а (44) имеет единственный минимум на всей области определения  $K_{k,s}$ . Из условия минимума найдем, что

$$K_{k,s} = -\frac{b_k}{2 \cdot a_k} \tag{45}$$

Далее, подставив данное выражение в (36), найдем  $\xi_{k,fact}$ . Проранжировав ряд частных производных по условию (38), найдем следующий индекс s. И так, используя описанную методику, найдем последующие значения с учетом найденного на предыдущем шаге значения

акселератора. Процесс продолжаем до тех пор, пока не будет выполнено равенство (43), после чего процедура поиска завершается.

Поиск есть не что иное, как выявление причин, вызвавших "недотягивание" результатов деятельности производителей сельскохозяйственной продукции до "нормативных" параметров. Производится оценка степени потерь при использовании s-того фактора. Также очевидно, что потери - это излишние затраты на единицу используемого факторного признака. Следовательно, акселератор  $K_{k,s}$  показывает, как необходимо сократить (увеличить при  $K_{k,s} > 1$ ) расходы на s-тый факторный признак для достижения "нормативных" показателей. Это и определяет сущность практических рекомендаций для k-той единицы совокупности.

**Задача 5.** Оптимизация факторов состояния и воздействия для обобщенного показателя результативности.

В отличие от задачи 2, в систему ограничений будет включено выражение (34). В этом случае постановка задачи будет выглядеть следующим образом:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_{k,i,j}^{*}(t)| + \sum_{s=1}^{s} |\Delta z_{k,i,q}^{*}(t)| \to min.$$
 (46)

Тогда выражение (34) должно быть включено в систему ограничений:

$$\sqrt{\sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} \hat{r}_{pq} \cdot \hat{y}_{k,p}^{0}(t) \cdot \hat{y}_{k,q}^{0}(t)} - \sqrt{\sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} r_{pq} \cdot y_{k,p}^{0}(t) \cdot y_{k,q}^{0}(t)} \ge 0, \tag{47}$$

$$g_l\left(x_{k,i,j}^*(t) + \Delta x_{k,i,j}^*(t), z_{k,i,p}^*(t) + \Delta z_{k,i,p}^*(t), z_{k,i,q}^*(t) + \Delta z_{k,i,q}^*(t)\right) = 0.$$

$$(48)$$

Решение такой задачи может быть осуществлено методами, описанными в задачах 1, 4.

Задача 6. Многокритериальная оптимизация для частных показателей результативности. В такой постановке уже необходимо оптимизировать факторы состояния и воздействия, а также обобщенный и частные показатели результативности:

$$\sqrt{\sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} \hat{r}_{pq} \cdot \hat{y}_{k,p}^{0}(t) \cdot \hat{y}_{k,q}^{0}(t)} - \sqrt{\sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} r_{pq} \cdot y_{k,p}^{0}(t) \cdot y_{k,q}^{0}(t)} \to min, \tag{49}$$

$$\hat{y}_{k,i}^0 - y_{k,i}^0 \to min,$$
 (50)

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \Delta x_{k,i,j}^{*}(t) \right| + \sum_{s=1}^{s} \left| \Delta z_{k,i,q}^{*}(t) \right| \to min, \tag{51}$$

$$g_l\left(x_{k,i,j}^*(t) + \Delta x_{k,i,j}^*(t), z_{k,i,p}^*(t) + \Delta z_{k,i,p}^*(t), z_{k,i,q}^*(t) + \Delta z_{k,i,q}^*(t)\right) = 0.$$
 (52)

Решение задачи может быть осуществлено методами, предложенными в задаче 3. Однако оно будет связано с вводом дополнительных допущений относительно значимости каждого из критериев (49)–(52).

В данном случае можно предложить расширить метод, основанный на методологии АСФ (анализ среды функционирования), предложенный В. Е. Кривоножко и А. В. Лычевым [5] и методе Лагранжа.

Составим целевую функцию в виде:

$$F(t) = \frac{\mu \cdot (y_k^0(t) - \hat{y}_k^0(t)) + \sum_{i=1}^m \mu_i \cdot (y_{k,i}^0(t) - \hat{y}_{k,i}^0(t))}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{i,j} \cdot \left| \Delta x_{k,i,j}^0(t) \right| + \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^s \eta_{i,s} \cdot \left| \Delta z_{k,i,s}^0(t) \right|} \to max,$$
 (53)

где  $\mu$ ,  $\mu_i$ ,  $\omega_{i,j}$ ,  $\eta_{i,s}$  - соответствующие весовые коэффициенты обобщенного и частных показателей результативности, а также факторов состояния и воздействия. В данном соотношении приращения факторных признаков будем считать нормализованными, то есть приведенными к интервалу от 0 до 1 в соответствии с аналогичными соотношениями (6), (7), что в предыдущих задачах не является обязательным. Числитель представляет собой сумму разностей фактического и нормативного значений для обобщенного и частных показателей результативности, которые должны стремиться к максимуму. Знаменатель по сути есть требование минимизации затрат на реализацию мероприятий, направленных на достижение нормативных значений функционирования рассматриваемой сложной системы.

Дополним систему ограничений (52) условиями:

$$\mu + \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1,\tag{54}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \omega_{i,j} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{s} \eta_{i,s} = 1.$$
 (55)

Составим функционал в виде суммы соотношения (53) и ограничений (52), (54) и (55):

$$L(t) = F(t) + \lambda_{\mu} \cdot (\mu + \sum_{i=1}^{m} \mu_{i} - 1) + \lambda_{\omega\eta} \cdot (\sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \omega_{i,j} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{s} \eta_{i,s} - 1) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_{l} \cdot g_{l},$$
 (56)

где  $g_l$  определяется соотношением (52), а  $\lambda_{\mu}$ ,  $\lambda_{\omega\eta}$ ,  $\lambda_l$  - параметры (множители) Лагранжа. Для упрощения выражения для весовых коэффициентов и множителей индекс k и период t опущен. Взяв частные производные по каждому из весовых коэффициентов, множителям Лагранжа, а также по факторам состояния и воздействия и приравняв их к 0, получим систему уравнений, разрешимую относительно неизвестных, включенных в (56):

$$\begin{cases}
\frac{\partial L(t)}{\partial \mu_{i}} &= 0 \\
\frac{\partial L(t)}{\partial \omega_{i,j}} &= 0 \\
\frac{\partial L(t)}{\partial \eta_{i,s}} &= 0 \\
\frac{\partial L(t)}{\partial \lambda_{l}} &= 0 \\
\frac{\partial L(t)}{\partial \Delta x_{k,i,j}^{0}} &= 0 \\
\frac{\partial L(t)}{\partial \Delta z_{k,i,s}^{0}} &= 0
\end{cases}$$
(57)

В соотношении (53) можно исключить знаменатель и привести его к линейному виду посредством преобразования Чарнеса и Купера для задач дробно-линейного программирования [4].

Если ввести некоторый параметр  $\tau$ , такой что знаменатель выражения (53) станет равным единице:

$$\tau \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \omega_{i,j} \cdot \left| \Delta x_{k,i,j}^{0}(t) \right| + \tau \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{s} \eta_{i,s} \cdot \left| \Delta z_{k,i,s}^{0}(t) \right| = 1, \tag{58}$$

то, умножив числитель и знаменатель на au, можно сделать следующую замену переменных:

$$v_{i,j} = \tau \cdot \omega_{i,j} \cdot \left| \Delta x_{k,i,j}^0(t) \right|, \tag{59}$$

$$v_{i,s} = \tau \cdot \eta_{i,s} \cdot \left| \Delta z_{k,i,s}^0(t) \right|, \tag{60}$$

$$\vartheta_{\mu} = \tau \cdot \mu \cdot \left( y_k^0(t) - \hat{y}_k^0(t) \right), \tag{61}$$

$$\vartheta_i = \tau \cdot \mu_i \cdot \left( y_{k,i}^0(t) - \hat{y}_{k,i}^0(t) \right). \tag{62}$$

Тогда выражение (53) можно представить в виде:

$$F(t) = \vartheta_{\mu} + \sum_{i=1}^{m} \vartheta_{i} \to max \tag{63}$$

Понятно, что  $\vartheta_{\mu}$  нелинейно зависит от  $v_{i,j}$  и  $v_{i,s}$ . Тогда система ограничений будет следующей:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_{i,j} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{s} v_{i,s} = 1,$$
(64)

$$g_l(v_{i,j}, v_{i,s}) = 0.$$
 (65)

В случае линейного вида (65) процедура поиска решения упрощается.

Задача 7. Оптимизация коэффициента гармоничности.

Решение данной задачи направлено на обеспечение сбалансированного (гармоничного) функционирования СЭЭС. Задача также может быть сформулирована в трех вариантах: максимизация коэффициента гармоничности, минимизации затрат на выравнивание асимметрии и многокритериальная оптимизация, которая может быть сведена к формированию единой целевой функции, в общем случае нелинейной, и решена с помощью описанного выше алгоритма.

В общем виде соотношения имеют вид:

$$F(t) = \frac{\mu_k \cdot K_k + \mu \cdot (y_k^0(t) - \hat{y}_k^0(t)) + \sum_{i=1}^m \mu_i \cdot (y_{k,i}^0(t) - \hat{y}_{k,i}^0(t))}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{i,j} \cdot \left| \Delta x_{k,i,j}^0(t) \right| + \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^s \eta_{i,s} \cdot \left| \Delta z_{k,i,s}^0(t) \right|} \to max,$$
(66)

где  $K_k$  определяется соотношением (18).

Последняя постановка применима в случае, если приоритетом органов управления является обеспечение сбалансированного функционирования СЭЭС, максимизации обобщенного и частного показателей результативности при минимизации затрат на реализацию соответствующих мероприятий.

Преимущество подхода, представленного выражениями (53) и (66) заключается в том, что весовые коэффициенты критериев определяются не экспертно, а на основании решения математической задачи оптимизации (в настоящее время, с использованием численных методов).

# 6. Практическая реализация некоторых задач оптимизации

В рамках исследования была решена 1 задача оптимизации (оптимизация частных показателей результативности) для экономической составляющей функционирования СЭЭС в
линейном случае (формулы (25), (26)). Построение индикаторов оценки и их оптимизация
представлены в [21, 22] (экологическая составляющая), [23] (социальная составляющая) и [10]
(составляющие экономики). В качестве информационной базы были использованы данные
Росстата за 2007-2015 годы для регионов Центрального федерального округа [24]. Расчет проводился с помощью авторской экспертной системы [25]. Была проведена оптимизация частных
показателей результативности валового регионального продукта по отдельным видам экономической деятельности. Некоторые результаты расчета представлены в таблице 2.

Данные таблицы показывают: на сколько в среднем наблюдается перерасход ("-") или излишек ("+") факторного признака, в связи с чем норматив не достигается. Знак ("-") означает, что оптимизация не требуется, (">100") – оптимизация по данному фактору не

Субъект/Показатель	$\Delta \xi_2(\Delta z_{2,1}^0)$	$\Delta \xi_{4.2} (\Delta z_{4.2,1}^0)$	$\Delta \xi_{4.5} (\Delta z_{4.5,1}^0)$
Белгородская область	-	-	-
Брянская область	-	-	-0,730
Владимирская область	>100	-86,672	>100
Воронежская область	-	-	-
Ивановская область	>100	-	-
Калужская область	>100	-36,387	-
Костромская область	-	-	-
Курская область	-	-	-
Липецкая область	-	-48,930	-
Московская область	>100	>100	-
Орловская область	-	-	>100
Рязанская область	-	-	-
Тамбовская область	-	-10,277	-
Тверская область	-	-	-
Тульская область	-	-3,243	-
Ярославская область	>100	-11,715	-

Таблица 2: Требуемые изменения факторных признаков для достижения норматива (фрагмент), %

реализуема. Здесь  $\xi_2$ ,  $\xi_{4.2}$ ,  $\xi_{4.5}$  — частные показатели результативности ВРП по видам деятельности "Раздел D. Обрабатывающие производства"; "Раздел H. Гостинцы и рестораны"; "Раздел K. Операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг" соответственно;  $z_{2,1}^0$ ,  $z_{4,2,1}^0$ ,  $z_{4,5,1}^0$  — факторы воздействия (инвестиции в основной капитал по видам экономической деятельности) для выбранных разделов. Нормативные значения соответствующих показателей результативности были вычислены на основании построенных линейных моделей с использованием пошагового метода наименьших квадратов:

$$\hat{y}_2 = 0,396 \cdot x_{2,1}^* + 0,395 \cdot x_{2,2}^* + 0,226 \cdot z_{2,1}^* (R^2 = 0,964), \tag{67}$$

$$\hat{y}_{4.2} = 0,758 \cdot x_{4.2,2}^* + 0,229 \cdot z_{4.2,1}^* (R^2 = 0,942), \tag{68}$$

$$\hat{y}_{4.5} = 0,576 \cdot x_{4.5,2}^* + 0,408 \cdot z_{4.5,1}^* (R^2 = 0,908), \tag{69}$$

где  $x_{2,1}^*$  – стоимость основных фондов по полной учетной стоимости на конец года по виду экономической деятельности (Раздел D);  $x_{2,2}^*$ ,  $x_{4.2,2}^*$ ,  $x_{4.5,2}^*$  – среднегодовая численность занятых по видам экономической деятельности (разделы D, H и K соответственно).

Наиболее оптимальное решение предполагает изменение факторов на 10–15%.

По результатам, представленным в таблице 2, можно судить о необходимости решения задачи оптимизации по нескольким параметрам для регионов со значением >100.

#### 7. Заключение

В результате проведенного исследования представлена методика конструирования частных и интегральных показателей результативности функционирования сложных систем. Индикаторы обладают свойствами универсальности (процедура стандартизации позволяет сравнивать признаки, имеющие разный характер и относящихся к разным процессам (например, экологический, экономический и социальный)); нормализации (приведение показателей к шкале

от 0 до 1 обеспечивает их одинаковый масштаб и наглядность представления данных); нормируемости (реализует возможность сравнения фактических данных с нормативом, который рассчитывается для конкретной СЭЭС, функционирующей в характерной для нее условиях); учета взаимосвязи частных показателей результативности, необходимость которого обосновывается рассмотрением объекта исследования как сложной системы, а также учета конкретных условий функционирования (предполагает учет факторов состояния СЭЭС при количественной оценке частных и интегральных показателей).

Представлена методика формирования коэффициента гармоничности, характеризующего сбалансированность функционирования сложной системы.

Также рассмотрены 7 вариантов математической постановки задачи оптимизации в зависимости от целей субъектов управления СЭЭС. Наиболее общая задача многокритериальной оптимизации является расширением методологии АСФ и позволяет исключить экспертный подбор весовых коэффициентов в целевой функции.

Представлено решение задачи оптимизации частных показателей результативности для регионов Ц $\Phi$ О.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Айвазян С. А. Анализ качества и образа жизни населения. М.: Наука, 2012. 432 с.
- 2. Mishra S., Nathan H. S. K. Measuring Human Development Index: The old, the new and the elegant // Indira Gandhi Institute of Development Research, Mumbai. October, 2013 [Electronic source]. URL: http://www.igidr.ac.in/pdf/publication/WP-2013-020.pdf.
- 3. Charnes A., Cooper W. W., Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units // European Journal of Operational Research. 1978. 2 (6). P. 429-444.
- 4. Charnes A., Cooper W. W., Huang Z. M., Sun D. B. Polyhedral Cone-Ratio DEA Models with an Illustrative Application to Large Commercial Banks // Journal of Econometrics. 1990. Vol. 46, no. 1–2. Pp. 73–91.
- 5. Кривоножко В. Е., Лычев А. В. Анализ деятельности сложных социально-экономических систем. М: Макс Пресс, 2010. 208 с.
- Моргунов Е.П. Многомерная классификация на основе аналитического метода оценки эффективности сложных систем: дисс. на соискание ученой степени канд. техн. наук. Красноярск, 2003. 160 с.
- 7. Айвазян С. А. Эмпирический анализ синтетических категорий качества жизни населения // Экономика и математические методы. 2003. Т. 39. № 3. С. 19–53.
- 8. Шабашев В. А., Шорохов С. И., Верхозина М. Ф. Структурное моделирование связей экономических, социальных и демографических факторов // Региональная экономика: теория и практика. 2016. № 10(433). С. 169–179.
- 9. Магретта, Д. Ключевые идеи. Майкл Портер. М.: Манн, Иванов и Фербер, 2013. 272 с.
- 10. Жуков Р. А. Оценка объема платных услуг населению как составляющей экономики регионов на основе экономико-математического моделирования // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 3: Экономика. Экология. 2017. Т. 19. № 2. С. 58–68.
- 11. Кривулин Н. К., Романовский И. В. Решение задач математического программирования с использованием методов тропической оптимизации // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4. № 3. С. 448–458.

- 12. Томашевский И. Л. Многокритериальная оптимизация с логическим взаимодействием критериев и альтернатив // Экономика и математические методы. 2017. Т. 53. № 4. С. 105–113.
- 13. Анохин А. М., Глотов В. А., Павельев В. В., Черкашин А. М. Методы определения коэффициентов важности критериев // Автоматика и телемеханика. 1997. № 8. С. 3–35.
- 14. Подиновский В. В., Потапов В. А. Метод взвешенной суммы критериев в анализе многокритериальных решений: pro et contra // Бизнес-информатика. 2013. №3. С. 41–48.
- 15. Соболь И. М., Статников Р. Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Дрофа, 2006. 175 с.
- Cobb C. W., Douglas P. H. A Theory of Production // American Economic Review. 1928.
   No. 18. Pp. 139–165.
- 17. Кремер Н. Ф., Путко Б. А. Эконометрика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. 311 с.
- 18. Жуков Р. А., Кузнецов Г. В., Манохин Е. В. К вопросу о формировании критерия оценки гармоничного развития территорий // Современная математика и концепции инновационного математического образования. 2016. Т. 3. № 1. С. 151–155.
- 19. Кремер Н. Ф., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н. Исследование операций в экономике. М: ЮНИТИ, 2003. 407 с.
- 20. Журавлев С. Д., Жуков Р. А., Киселев В. Д. Теоретические и методологические основы повышения эффективности функционирования систем государственного управления использованием земель сельскохозяйственного назначения в России: монография / С. Д. Журавлев, Р. А. Жуков, В. Д. Киселев. Тула: Федеральное гос. бюджетное образовательное учреждение высш. проф. образования Российская акад. нар. хоз-ва и гос. службы при Президенте Российской Федерации, Тульский фил., 2011. Сер. Вып. 1 Актуальные вопросы государственного и муниципального управления. 212 с.
- 21. Жуков Р. А. Оценка состояния атмосферного воздуха в регионах ЦФО в рамках фундаментального подхода к оценке эффективности деятельности субъектов управления социоэколого-экономическими системами // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 3: Экономика. Экология. 2016. № 3(36). С. 177–184.
- 22. Жуков Р. А. Оценка состояния сложных систем на примере регионов Центрального федерального округа: эколого-экономический аспект // Региональные исследования. 2016. № 4(54). С. 81–89.
- 23. Жуков Р. А. Некоторые аспекты оценки качества жизни и управления в социо-экологоэкономических системах: регионы Центрального федерального округа // Региональная экономика: теория и практика. 2017. Т. 15. № 7(442). С. 1261–1275.
- 24. Федеральная служба государственной статистики [Электронный ресурс]. URL: http://www.gks.ru/
- 25. Жуков Р. А. Внедрение программных экономико-математических комплексов в практику деятельности органов государственного управления // Фундаментальные исследования. 2015. №9–3. С. 555–559.

#### REFERENCES

- 1. Aivazian, S. A., 2012, "Analiz kachestva i obraza zhizni naseleniya" [Analysis of the quality and lifestyle of the population], Moscow, Nauka, 432 p.
- 2. Mishra, S., Nathan, H.S.K., 2012 "Measuring Human Development Index: The old, the new and the elegant", *Indira Gandhi Institute of Development Research*, Mumbai, [online], URL: http://www.igidr.ac.in/pdf/publication/WP-2013-020.pdf.
- 3. Charnes A., Cooper W. W., Rhodes E., 1978, "Measuring the efficiency of decision making units", European Journal of Operational Research, 2(6), pp. 429-444.
- 4. Charnes A., Cooper W. W., Huang Z. M., Sun D. B., 1990, "Polyhedral Cone-Ratio DEA Models with an Illustrative Application to Large Commercial Banks", *Journal of Econometrics*, vol. 46, no. 1-2, pp. 73-91.
- 5. Krivonozhko, V.E., Lychev, A.V., 2010, "Analiz deyatelnosti slozhnyh socialno-ekonomicheskih sistem" [Analysis of activity of complex socio-economic systems], Moscow, Maks Press, 208 p.
- 6. Morgunov, E.P., 2003, "Mnogomernaya klassifikatsiya na osnove analiticheskogo metoda otsenki effektivnosti sistem" [Multivariate classification based on the analytical method of assessing the effectiveness of systems], the dissertation on competition of a scientific degree of Candidate of technical sciences, Krasnoyarsk, 160 p.
- 7. Aivazyan, S. A., 2003, "Empiricheskiy analiz sinteticheskikh kategoriy kachestva zhizni naseleniya" [Empirical analysis of synthetic categories of the quality of life of the population], Economics and mathematical methods, vol. 39, no. 3, pp. 19-53.
- 8. Shabashev, V. A., Shorohov, S. I., Verhozina, M. F., 2016, "Strukturnoe modelirovanie svyazey ekonomicheskih, socialnyh i demograficheskih faktorov" [Structural modeling of the relations of economic, social and demographic factors], Regionalnaya ehkonomika: teoriya i praktika [Regional economy: theory and practice], no. 10(433), pp. 169-179.
- 9. Magretta, D., 2013, "Klyuchevyye idei. Maykl Porter" [Key Ideas. Michael Porter], Moscow: Mann, Ivanov and Ferber, 272 p.
- 10. Zhukov, R. A., 2017, "Otsenka ob" yema platnykh uslug naseleniyu kak sostavlyayushchey ekonomiki regionov na osnove ekonomiko-matematicheskogo modelirovaniya" [Estimation of the volume of paid services to the population as a component of the economy of regions on the basis of economic and mathematical modeling], Science Journal of VolSU. Global Economic System, vol. 19, no. 2, pp. 58-68.
- 11. Krivulin, N. K., Romanovsky, I. V., 2017, "Resheniye zadach matematicheskogo programmirovaniya s ispol'zovaniyem metodov tropicheskoy optimizatsii" [Solving the problems of mathematical programming using the methods of tropical optimization], Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics, vol. 4, no. 3, pp. 448-458.
- 12. Tomashevsky, I. L., 2017, "Mnogokriterial'naya optimizatsiya s logicheskim vzaimodeystviyem kriteriyev i al'ternativ" [Multicriteria optimization with logical interaction of criteria and alternatives], Ekonomika i matematicheskiye metody [Economics and mathematical methods], vol. 53, no. 4, pp. 105-113.
- 13. Anokhin A. M., Glotov V. A., Pavelev V. V., Cherkashin A. M., 1997, "Metody opredeleniya koeffitsiyentov vazhnosti kriteriyev" [Methods for determining the coefficients of importance of criteria], Avtomatika i telemekhanika, no. 8, pp. 3-35.

- 14. Podinovsky V. V., Potapov V. A., 2013, "Metod vzveshennoy summy kriteriyev v analize mnogokriterial'nykh resheniy: pro et contra" [Weighted sum of criteria in the analysis of multicriteria solutions: pro et contra], Biznes-informatika, no. 3, pp. 41-48.
- 15. Sobol I. M., Statnikov R. B., 2006, "Vybor optimal'nykh parametrov v zadachakh so mnogimi kriteriyami" [Choice of optimal parameters in problems with many criteria], Moscow, Drofa, 175 p.
- 16. Cobb C. W., Douglas P. H., 1928, "A Theory of Production", *American Economic Review*, no. 18, pp. 139-165.
- 17. Kremer N. F, Putko B. A., 2005, "Ekonometrika" [Econometrics], Moscow, YUNITI-DANA, 311 p.
- 18. Zhukov R. A., Kuznetsov G. V., Manokhin E. V., 2016, "K voprosu o formirovanii kriteriya otsenki garmonichnogo razvitiya territoriy" [To the question of the formation of the criterion for assessing the harmonious development of territories], Sovremennaya matematika i kontseptsii innovatsionnogo matematicheskogo obrazovaniya, vol. 3, no. 1, pp. 151-155.
- 19. Kremer N. F., Putko B. A., Trishin I. M., Fridman M. N., 2003, "Issledovaniye operatsiy v ekonomike" [Research of operations in the economy], Moscow, YUNITI, 407 p.
- 20. Zhuravlev S. D., Zhukov R. A., Kiselev V. D., 2011, "Teoreticheskiye i metodologicheskiye osnovy povysheniya effektivnosti funktsionirovaniya sistem gosudarstvennogo upravleniya ispol'zovaniyem zemel' sel'skokhozyaystvennogo naznacheniya v Rossii: monografiya" [Theoretical and methodological foundations of increasing the effectiveness of the functioning of public administration systems for the use of agricultural land in Russia: monograph], Tula, Federal'noye gos. byudzhetnoye obrazovatel'noye uchrezhdeniye vyssh. prof. obrazovaniya "Rossiyskaya akad. nar. khoz-va i gos. sluzhby pri Prezidente Rossiyskoy Federatsii Tul'skiy fil., Ser. Vyp. 1, Aktual'nyye voprosy gosudarstvennogo i munitsipal'nogo upravleniya, 212 p.
- 21. Zhukov, R. A., 2016, "Otsenka sostoyaniya atmosfernogo vozdukha v regionakh TSFO v ramkakh fundamental'nogo podkhoda k otsenke effektivnosti deyatel'nosti sub"yektov upravleniya sotsio-ekologo-ekonomicheskimi sistemami" [Assessment of the state of atmospheric air in the regions of the Central Federal District within the framework of a fundamental approach to assessing the effectiveness of the subjects of management of socio-ecological and economic systems], Science Journal of VolSU. Global Economic System, no. 3(36), pp. 177-184.
- 22. Zhukov R. A., 2016, "Otsenka sostoyaniya slozhnykh sistem na primere regionov Tsentral'nogo federal'nogo okruga: ekologo-ekonomicheskiy aspekt" [An estimation of a condition of difficult systems on an example of regions of the Central federal district: an ekologo-economic aspect], Regional'nyye issledovaniya, no. 4(54), pp. 81-89.
- 23. Zhukov R. A., 2017, "Nekotoryye aspekty otsenki kachestva zhizni i upravleniya v sotsio-ekologo-ekonomicheskikh sistemakh: regiony Tsentral'nogo federal'nogo okruga" [Some aspects of assessing the quality of life and management in socio-ecological and economic systems: the regions of the Central Federal District], Regional'naya ekonomika: teoriya i praktika [Regional economy: theory and practice], vol. 15, no. 7 (442), pp. 1261-1275.
- 24. Federal State Statistics Service of the Russian Federation (ROSSTAT) [online]. URL: http://www.gks.ru.

25. Zhukov R. A., 2015, "Vnedreniye programmnykh ekonomiko-matematicheskikh kompleksov v praktiku deyatel'nosti organov gosudarstvennogo upravleniya" [Introduction of programmed economic and mathematical complexes into the practice of government bodies], Fundamental'nyye issledovaniya [Fundamental research], no. 9-3, pp. 555-559.