ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-305-310

Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток[1]

А. В. Михляева

Михляева Анна Владимировна — аспирант кафедры алгебры и дискретной математики, Оренбургский государственный университет, г. Оренбург.
e-mail: white.background.invisible@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена вопросам построения быстрых алгоритмов вычисления функции качества рациональных сеток, приближающих квадратичные алгебраические сетки.

Показано, что обобщённая параллелепипедальная сетка, приближающая квадратичную алгебраическую сетку, является параллелепипедальной. Как следствие построен алгоритм вычисления функции качества за $O(\ln N)$ арифметических операций.

Ключевые слова: квадратичные поля, приближение алгебраических сеток, функция качества, обобщённая параллелепипедальная сетка.

Библиография: 27 названий.

Для цитирования:
А. В. Михляева. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 305–310.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-305-310

Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets[2]

A. V. Mikhlyaeva

Mikhlyaeva Anna Vladimirovna — Postgraduate Student, Department of Algebra and discrete mathematics, Orenburg state University, Orenburg.
e-mail: white.background.invisible@mail.ru

Abstract

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.

[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

This work is devoted to the construction of fast algorithms for calculating the quality function of rational grids approximating quadratic algebraic nets.

It is shown that the generalized parallelepipedal net approximating the quadratic algebraic net is parallelepiped.As a consequence, an algorithm for calculating the quality function for $O(\ln N)$ arithmetic operations is constructed.

Keywords: quadratic fields, approximation of algebraic grids, quality function, generalized parallelepipedal grid.

Bibliography: 27 titles.

For citation:
A. V. Mikhlyaeva, 2019, "Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 305–310.

1. Введение

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор

$$\{\vec{x}\}=(\{x_1\},\ldots,\{x_s\}).$$

В работе [2] рассматривалось квадратичное поле $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, где p — простое число и $p = 2$ или $p \equiv 3 \pmod 4$. Для него кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_F$ имеет вид: $\mathbb{Z}_F = \{n + k\sqrt{p} | n, k \in \mathbb{Z}\}$.

Через $\Lambda(F)$ обозначается алгебраическая решётка поля F:

$$\Lambda(F)=\{(\Theta^{(1)},\Theta^{(2)})|\Theta=\Theta^{(1)}\in\mathbb{Z}_F\}$$

и $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(2)}$ — целые алгебраически сопряжённые числа.

Таким образом, $\Theta^{(1)} = n+k\sqrt{p},\quad \Theta^{(2)} = n-k\sqrt{p}\quad n,k \in \mathbb{Z}$ и $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(2)}$ — корни уравнения $x^2 - 2nx + n^2 - pk^2 = 0$. Базис решётки $\Lambda(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (\sqrt{p}, -\sqrt{p})$, а детерминант решётки $\det\Lambda(F) = 2\sqrt{p}$. Базис взаимной решётки $\Lambda^*(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda}_1^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\vec{\lambda}_2^* = \left(\frac{\sqrt{p}}{2p}, -\frac{\sqrt{p}}{2p}\right)$ и детерминант взаимной решётки $\det\Lambda^*(F) = \frac{\sqrt{p}}{2p}$.

Рассмотрим разложение $\sqrt{p}$ в цепную периодическую дробь:

$$\sqrt{p} = q_0 + [(q_1,\ldots,q_n,2q_0)] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

с периодом $(q_1,\ldots,q_n,2q_0)$. Через $\frac{P_m}{Q_m}$ обозначается m-ая подходящая дробь к $\sqrt{p}$. Таким образом,

$$\sqrt{p} = \frac{P_m}{Q_m} + \frac{(-1)^m\theta_m}{Q_m^2},\quad 0<\theta_m<1\quad (m=0,1,\ldots). \tag{1}$$

Через $\Lambda_m(F)$ обозначается алгебраическая решётка, заданная равенствами:

$$\Lambda_m(F) = \{(Q_m(n+k\sqrt{p}), Q_m(n-k\sqrt{p}))|n,k\in\mathbb{Z}\},$$

а через $\Lambda_m(p)$ — целочисленная решётка, заданная равенствами:

$$\Lambda_m(p) = \{(Q_m n + kP_m, Q_m n - kP_m)|n,k\in\mathbb{Z}\}.$$

Базис решётки $\Lambda_m(F)$ имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1} = (Q_m, Q_m)$, $\quad \vec{\lambda}_{m,2} = (Q_m\sqrt{p}, -Q_m\sqrt{p})$, а детерминант решётки $\det\Lambda_m(F) = 2Q_m^2\sqrt{p}$. Базис взаимной решётки $\Lambda_m^*(F)$ имеет вид:

$$\vec{\lambda}^*_{m,1} = \left(\frac{1}{2Q_m}, \frac{1}{2Q_m}\right), \quad \vec{\lambda}^*_{m,2} = \left(\frac{\sqrt{p}}{2pQ_m}, -\frac{\sqrt{p}}{2pQ_m}\right)$$

и детерминант взаимной решётки $\det\Lambda_m^*(F) = \frac{\sqrt{p}}{2pQ_m^2}$.

Для целочисленной решётки $\Lambda_m(p)$ базис имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2,Z} = (P_m, -P_m)$, а детерминант решётки $\det\Lambda_m(p) = 2Q_mP_m$. Базис взаимной решётки $\Lambda_m^*(p)$ имеет вид:

$$\vec{\lambda}^*_{m,1,Z} = \left(\frac{1}{2Q_m}, \frac{1}{2Q_m}\right), \quad \vec{\lambda}^*_{m,2,Z} = \left(\frac{1}{2P_m}, -\frac{1}{2P_m}\right)$$

и детерминант взаимной решётки $\det\Lambda_m^*(p) = \frac{1}{2P_mQ_m}$.

Рассмотриваются следующие две сетки:

$$M_1(\Lambda_m(F)) = \Lambda_m^*(F) \cap [-1;1)^s, \quad M(\Lambda_m(p)) = \Lambda_m^*(p) \cap [0;1)^s.$$

Нетрудно видеть, что

$$M_1(\Lambda_m(F)) = \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{\sqrt{p}k}{2pQ_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{\sqrt{p}k}{2pQ_m}\right) \middle| k \in A(n), |n| \leqslant 2Q_m - 1 \right\},$$

$$A(n) = \left\{ k \,\middle|\, \begin{array}{ll} -2P_m < k < 2P_m, & \text{при } n = 0, \\ -2P_m + \frac{P_mn}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_mn}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \dots 2Q_m - 1, \\ -2P_m - \frac{P_mn}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_mn}{Q_m}, & \text{при } n = -1, \dots - 2Q_m + 1; \end{array} \right\},$$

$$M(\Lambda_m(p)) = \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m}\right) \middle| k \in B(n), 0 \leqslant n \leqslant 2Q_m - 1 \right\},$$

$$B(n) = \left\{ k \,\middle|\, \begin{array}{ll} k = 0, & \text{при } n = 0, \\ -\frac{P_mn}{Q_m} \leqslant k \leqslant \frac{P_mn}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \dots Q_m - 1, \\ -2P_m + \frac{P_mn}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_mn}{Q_m}, & \text{при } n = Q_m, \dots 2Q_m - 1; \end{array} \right\}.$$

Хорошо известно, что граничной функцией класса $E_s^2\left(\cdot, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для параллелепипедальных сеток является функция $h(x,y) = 9(1-2\{x\})^2(1-2\{y\})^2$, поэтому для оценки качества сетки $M(\Lambda_m(p))$ в работе [2] предложено использовать функцию

$$H(M(\Lambda_m(p))) = \frac{9}{2P_mQ_m} \sum_{n=0}^{2Q_m-1} \sum_{k\in B(n)} \left(1 - 2\left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m}\right)\right)^2 \left(1 - 2\left(\frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m}\right)\right)^2,$$

которая для краткости названа функцией качества. Для вычисления функции качества обобщённой параллелепипедальной сетки $M(\Lambda_m(p))$ требуется $O(N(P_m, Q_m))$ арифметических операций, где $N(P_m, Q_m)$ — количество точек сетки $M(\Lambda_m(p))$. В работе [2] найден алгоритм вычисления функции качества за $O(\sqrt{N(P_m, Q_m)})$ арифметических операций и сформулирована гипотеза, что можно построить алгоритм вычисления значений функции качества за $O(\ln N(P_m, Q_m))$ арифметических операций.

Цель данной работы — построить такой алгоритм.

2. Преобразование функции качества

Для количества слагаемых в выражении для функции качества, которое обозначим через $N = N(P,Q)$, где $P = P_m$, $Q = Q_m$, справедливо равенство $N = N(P,Q) = 2PQ$.

Наряду с обозначением $H(M(\Lambda_m(p)))$ будем использовать $H(P,Q)$:

$$H(P,Q) = \frac{9}{N}\sum_{n=0}^{2Q-1}\sum_{k\in B(n)}\left(1-2\left(\frac{n}{2Q}+\frac{k}{2P}\right)\right)^2\left(1-2\left(\frac{n}{2Q}-\frac{k}{2P}\right)\right)^2.$$

Нетрудно видеть, что

$$H(P,Q) = \frac{9}{N}\sum_{n=0}^{2Q-1}\sum_{k\in B(n)}\left(\left(1-\frac{n}{Q}\right)^2-\left(\frac{k}{P}\right)^2\right)^2.$$

Обозначим через $T(n)$ величину $T(n) = \left[\frac{P\cdot n}{Q}\right]$. Ясно, что $T(n+Q) = P + T(n)$. В работе [2] доказана теорема.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned}H(P,Q) = \frac{9}{N}\Bigg(\frac{2}{5}P+\frac{2}{3P}-\frac{1}{15P^3}+2\sum_{n=1}^{Q-1}\Bigg(1+2T(n)-2\frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)}{3P^2}+\\ +\frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)(3T^2(n)+3T(n)-1)}{15P^4}-\\ -4\frac{n}{Q}\left(1+2T(n)-\frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)}{3P^2}\right)+\\ +\left(\frac{n}{Q}\right)^2\left(6(1+2T(n))-2\frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)}{3P^2}\right)-\\ -\left(\frac{n}{Q}\right)^3 4(1+2T(n))+\left(\frac{n}{Q}\right)^4(1+2T(n))\Bigg)\Bigg).\end{aligned}$$

Это выражение и даёт алгоритм вычисления функции качества за $O(\sqrt{N(P_m,Q_m)})$ арифметических операций.

3. Новое выражение для функции качества

В данном разделе покажем, что обобщённая параллелепипедальная сетка $M(\Lambda_m(p)$ является параллелепипедальной сеткой.

Положим $N_m = 2P_mQ_m$ и целое a_m зададим равенством

$$a_m = \begin{cases} 2P_mQ_{m-1}-1, & \text{при } m\text{— нечётном}\\ 2P_m(Q_m-Q_{m-1})-1, & \text{при } m\text{— чётном.}\end{cases}$$

Теорема 2. *Справедливо равенство $M(\Lambda_m(p)) = M(a_m,N_m)$, где параллелепипедальная сетка $M(a_m,N_m)$ задаётся равенством*

$$M(a_m,N_m) = \left\{\left(\frac{n}{N_m},\left\{\frac{a_mn}{N_m}\right\}\right)\middle|\, n = 0,\dots,N_m-1\right\}.$$

Доказательство. Рассмотрим отдельно случай чётного m и нечётного.

Пусть m — нечётное число, тогда $P_m Q_{m-1} - P_{m-1} Q_m = 1$. Положим $n = tP_m + kQ_m$, где $0 \leqslant t \leqslant 2Q_m - 1$ и $k \in B(n)$. Тогда

$$\frac{n}{N_m} = \frac{t}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m}, \quad \left\{\frac{a_m n}{N_m}\right\} = \left\{\frac{(2P_m Q_{m-1} - 1)(tP_m + kQ_m)}{N_m}\right\}.$$

Преобразуем выражение под знаком дробной доли, получим:

$$\left\{\frac{(2P_m Q_{m-1} - 1)(tP_m + kQ_m)}{N_m}\right\} = \left\{\frac{(1 + 2P_{m-1}Q_m)tP_m - kQ_m}{N_m}\right\} = \frac{t}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m},$$

что доказывает утверждение теоремы для случая нечётного m.

Перейдем к случаю чётного m, тогда $P_m Q_{m-1} - P_{m-1} Q_m = -1$. Далее имеем:

$$\left\{\frac{a_m n}{N_m}\right\} = \left\{\frac{(2P_m(Q_m - Q_{m-1}) - 1)(tP_m + kQ_m)}{N_m}\right\} = \left\{\frac{(-2P_m Q_{m-1} - 1)tP_m}{N_m} - \frac{k}{2P_m}\right\} =$$
$$= \left\{\frac{(-2(P_{m-1}Q_m - 1) - 1)tP_m}{N_m} - \frac{k}{2P_m}\right\} = \frac{t}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m},$$

что доказывает утверждение теоремы для случая чётного m.

Теорема полностью доказана. □

Рассмотрим разложение $\frac{a_m}{N_m}$ в цепную периодическую дробь:

$$\frac{a_m}{N_m} = \cfrac{1}{q_{1,m} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{l-1,m} + \cfrac{1}{q_{l,m}}}}}$$

длины $l = l(m)$.

Для дальнейшего нам потребуются скобки Эйлера $[b_1, \ldots, b_n]_{(n)}$, которые определяются рекуррентно

$$[]_{(-1)} = 0, \quad []_{(0)} = 1, \quad [b_1, \ldots, b_n]_{(n)} = b_n[b_1, \ldots, b_{n-1}]_{(n-1)} + [b_1, \ldots, b_{n-2}]_{(n-2)} \quad (n \geqslant 1).$$

В работе [1] для величин H_k, заданных равенствами

$$H_k = \frac{9}{Q_k} \sum_{n=0}^{Q_k - 1} \left(1 - 2\frac{n}{Q_k}\right)^2 \left(1 - 2\left\{\frac{P_k n}{Q_k}\right\}\right)^2,$$

доказана теорема

Теорема 3. *Справедливо равенство*

$$H_k = 1 + \frac{4}{5Q_k^2}\left(10 + 5k + \sum_{\lambda=1}^{k} q_\lambda^2 - \frac{3(P_k^2 + Q_{k-1}^2)}{Q_k^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{Q_k}\left(2\sum_{\lambda=1}^{k} q_\lambda (Q_\lambda T_{k,\lambda+1} + Q_{\lambda-2} T_{k,\lambda+1} + Q_{\lambda-2} T_{k,\lambda-1}) - 10 \sum_{\lambda=1}^{k-1} Q_{\lambda-1} T_{k,\lambda+1}\right)\right).$$

Здесь через $T_{k,\nu}$ обозначены величины $T_{k,\nu} = [q_{\nu+1}, \ldots, q_k]_{(k-\nu)}$.

Теорема 4. *Для функции качества $H(M(\Lambda_m(p)))$ справедливо равенство*

$$H(M(\Lambda_m(p))) = 1 + \frac{4}{5N_m^2}\left(10 + 5l + \sum_{\lambda=1}^{l} q_{\lambda,m}^2 - \frac{3(P_{l,m}^2 + Q_{l-1,m}^2)}{Q_{l,m}^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{Q_{l,m}}\left(2\sum_{\lambda=1}^{l} q_{\lambda,m}(Q_{\lambda,m}T^*_{l,\lambda+1} + Q_{\lambda-2,m}T^*_{l,\lambda+1} + Q_{\lambda-2,m}T^*_{l,\lambda-1}) - 10\sum_{\lambda=1}^{l-1} Q_{\lambda-1,l}T^*_{l,\lambda+1}\right)\right),$$

где $\frac{P_{\lambda,m}}{Q_{\lambda,m}}$ *— λ-ая подходящая дробь к числу* $\frac{a_m}{N_m}$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, l)$, $T^*_{l,\nu} = [q_{\nu+1,m}, \ldots, q_{l,m}]_{(l-\nu)}$.

Доказательство. В силу теоремы 2 утверждение теоремы следует из теоремы 3 заменой k на l, $\frac{a}{N}$ на $\frac{a_m}{N_m}$, подходящих дробей и неполных частных к $\frac{a}{N}$ на соответствующие подходящие дроби и неполные частные к $\frac{a_m}{N_m}$. $\square$

4. Заключение

Теорема 1 из работы [2] позволяет вычислять значение функции качества за

$$O\left(\sqrt{N(P_m, Q_m)}\right)$$

арифметических операций. Доказанная теорема 4 позволяет это сделать за

$$O(\ln N(P_m, Q_m))$$

арифметических операций.

Основным моментом в нашей работе было доказательство, что обобщённая параллелепипедальная сетка, приближающая алгебраическую квадратичную сетку, является параллелепипедальной сеткой.

На тот факт, что сетка $M(\Lambda_m(p)$ является параллелепипедальной, обратил внимание А. В. Родионов, за что выражаю ему свою благодарность.

Также выражаю свою благодарность научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток. монография / под редакцией Н. М. Добровольского. Тула, 2012.

2. А. В. Михляева. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.

REFERENCES

1. Vronskaya, G. T., Dobrovol'skii, N. N. 2012, "Deviations of flat grids. monograph edited by N. M. Dobrovol'skii. Tula.

2. A. V. Mikhlyaeva, 2018, "Approximation of quadratic algebraic lattices and nets by integer lattices and rational nets" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 241–256.