ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-296-304

О неполных частных одной цепной дроби¹

А. Н. Кормачева

Кормачева Антонина Николаевна — аспирант кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: juska789@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена вопросам вычисления неполных частных разложения $\frac{a_m}{N_m}$ в цепную дробь, где a_m и N_m параметры параллелепипедальной сетки, которая является приближением квадратичной алгебраической сетки рациональной сеткой.

Результаты данной работы позволяют реализовать быстрые алгоритмы вычисления функции качества этих рациональных приближений.

Ключевые слова: квадратичные поля, приближение алгебраических сеток, функция качества, обобщённая параллелепипедальная сетка.

Библиография: 27 названий.

Для цитирования:

А. Н. Кормачева. О неполных частных одной цепной дроби // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 296–304.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-296-304

About the partial quotients of one of the continued fractions²

A. N. Kormacheva

Kormacheva Antonina Nikolaevna — Postgraduate Student, Department of Algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: juska789@mail.ru

Abstract

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_r_a.

²Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

This paper is devoted to the computation of partial quotients of decomposition of $\frac{a_m}{N_m}$ into a continued fraction, where a_m and N_m are parameters of a parallelepipedal grid, which is an approximation of a quadratic algebraic grid by a rational grid.

The results of this work allow us to implement fast algorithms for calculating the quality function of these rational approximations.

Keywords: quadratic fields, approximation of algebraic grids, quality function, generalized parallelepipedal grid.

Bibliography: 27 titles.

For citation:

A. N. Kormacheva, 2019, "About the partial quotients of one of the continued fractions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 296–304.

1. Введение

В работе [3] рассматривалось квадратичное поле $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, где p — простое число и $p = 2$ или $p \equiv 3 \pmod{4}$. Для него кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_F$ имеет вид: $\mathbb{Z}_F = \{n + k\sqrt{p} | n, k \in \mathbb{Z}\}$.

Через $\Lambda(F)$ обозначается алгебраическая решётка поля F :

$$\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) | \Theta = \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}$$

и $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}$ — целые алгебраически сопряжённые числа.

Таким образом, $\Theta^{(1)} = n + k\sqrt{p}$, $\Theta^{(2)} = n - k\sqrt{p}$ $n, k \in \mathbb{Z}$ и $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}$ — корни уравнения $x^2 - 2nx + n^2 - pk^2 = 0$. Базис решётки $\Lambda(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (\sqrt{p}, -\sqrt{p})$, а детерминант решётки $\det \Lambda(F) = 2\sqrt{p}$. Базис взаимной решётки $\Lambda^*(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda}_1^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\vec{\lambda}_2^* = (\frac{\sqrt{p}}{2p}, -\frac{\sqrt{p}}{2p})$ и детерминант взаимной решётки $\det \Lambda^*(F) = \frac{\sqrt{p}}{2p}$.

Рассмотрим разложение $\sqrt{p}$ в цепную периодическую дробь:

$$\sqrt{p} = q_0 + [(q_1, \dots, q_n, 2q_0)] = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{2q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots}}}}}$$

с периодом $(q_1, \dots, q_n, 2q_0)$. Через $\frac{P_m}{Q_m}$ обозначается m -ая подходящая дробь к $\sqrt{p}$. Таким образом,

$$\sqrt{p} = \frac{P_m}{Q_m} + \frac{(-1)^m \theta_m}{Q_m^2}, \quad 0 < \theta_m < 1 \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (1)$$

Через $\Lambda_m(F)$ обозначается алгебраическая решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(F) = \{(Q_m(n + k\sqrt{p}), Q_m(n - k\sqrt{p})) | n, k \in \mathbb{Z}\},$$

а через $\Lambda_m(p)$ — целочисленная решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(p) = \{(Q_m n + kP_m, Q_m n - kP_m) | n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Базис решётки $\Lambda_m(F)$ имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2} = (Q_m\sqrt{p}, -Q_m\sqrt{p})$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(F) = 2Q_m^2\sqrt{p}$. Базис взаимной решётки $\Lambda_m^*(F)$ имеет вид:

$$\vec{\lambda}_{m,1}^* = \left(\frac{1}{2Q_m}, \frac{1}{2Q_m} \right), \quad \vec{\lambda}_{m,2}^* = \left(\frac{\sqrt{p}}{2pQ_m}, -\frac{\sqrt{p}}{2pQ_m} \right)$$

и детерминант взаимной решётки $\det \Lambda_m^*(F) = \frac{\sqrt{p}}{2pQ_m^2}$.

Для целочисленной решётки $\Lambda_m(p)$ базис имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2,Z} = (P_m, -P_m)$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(p) = 2Q_m P_m$. Базис взаимной решётки $\Lambda_m^*(p)$ имеет вид:

$$\vec{\lambda}_{m,1,Z}^* = \left(\frac{1}{2Q_m}, \frac{1}{2Q_m} \right), \quad \vec{\lambda}_{m,2,Z}^* = \left(\frac{1}{2P_m}, -\frac{1}{2P_m} \right)$$

и детерминант взаимной решётки $\det \Lambda_m^*(p) = \frac{1}{2P_m Q_m}$.

Рассматриваются следующие две сетки:

$$M_1(\Lambda_m(F)) = \Lambda_m^*(F) \cap [-1; 1]^s, \quad M(\Lambda_m(p)) = \Lambda_m^*(p) \cap [0; 1]^s.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} M_1(\Lambda_m(F)) &= \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{\sqrt{p}k}{2pQ_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{\sqrt{p}k}{2pQ_m} \right) \middle| k \in A(n), |n| \leq 2Q_m - 1 \right\}, \\ A(n) &= \left\{ k \middle| \begin{array}{ll} -2P_m < k < 2P_m, & \text{при } n = 0, \\ -2P_m + \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \dots, 2Q_m - 1, \\ -2P_m - \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = -1, \dots, -2Q_m + 1; \end{array} \right\}, \\ M(\Lambda_m(p)) &= \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m} \right) \middle| k \in B(n), 0 \leq n \leq 2Q_m - 1 \right\}, \\ B(n) &= \left\{ k \middle| \begin{array}{ll} k = 0, & \text{при } n = 0, \\ -\frac{P_m n}{Q_m} \leq k \leq \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \dots, Q_m - 1, \\ -2P_m + \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = Q_m, \dots, 2Q_m - 1; \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Хорошо известно, что граничной функцией класса $E_s^2\left(\cdot, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для параллелепипедальных сеток является функция $h(x, y) = 9(1 - 2\{x\})^2(1 - 2\{y\})^2$, поэтому для оценки качества сетки $M(\Lambda_m(p))$ в работе [3] предложено использовать функцию

$$H(M(\Lambda_m(p))) = \frac{9}{2P_m Q_m} \sum_{n=0}^{2Q_m-1} \sum_{k \in B(n)} \left(1 - 2 \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m} \right) \right)^2 \left(1 - 2 \left(\frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m} \right) \right)^2,$$

которая для краткости названа функцией качества. Для вычисления функции качества обобщённой параллелепипедальной сетки $M(\Lambda_m(p))$ требуется $O(N(P_m, Q_m))$ арифметических операций, где $N(P_m, Q_m)$ — количество точек сетки $M(\Lambda_m(p))$. В работе [3] найден алгоритм вычисления функции качества за $O(\sqrt{N(P_m, Q_m)})$ арифметических операций, а в работе [4] построен алгоритм вычисления значений функции качества за $O(\ln N(P_m, Q_m))$ арифметических операций. Центральным моментом в этой работе было доказательство, что обобщённая параллелепипедальная сетка, приближающая алгебраическую квадратичную сетку, является параллелепипедальной сеткой. Оптимальный коэффициент a_m по модулю $N_m = 2P_m Q_m$ в этой работе задавался по формуле

$$a_m = \begin{cases} 2P_m Q_{m-1} - 1, & \text{при } m \text{ — нечётном} \\ 2P_m(Q_m - Q_{m-1}) - 1, & \text{при } m \text{ — четном.} \end{cases}$$

Цель данной работы — найти неполные частные разложения $\frac{a_m}{N_m}$ в цепную дробь:

$$\frac{a_m}{N_m} = \frac{1}{q_{1,m} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{l-1,m} + \frac{1}{q_{l,m}}}}}$$

длины $l = l(m)$.

2. Сведения из теории цепных дробей квадратичных иррациональностей

В этой работе нас будет интересовать только цепная дробь для $\sqrt{p}$. Согласно теории (см. [2], стр. 104, 111, 112) для простых вида $p \equiv 3 \pmod{4}$ цепная дробь для $\sqrt{p}$ имеет вид

$$\sqrt{p} = \overline{q_0, q_1, \dots, q_k, q_{k+1}, q_k, \dots, q_1, 2q_0}$$

и $n = 2k + 1$, где k может быть любым целым числом $k \geq 0$. Отсюда следует, что произвольная подходящая дробь $\frac{P_m}{Q_m}$ к числу $\sqrt{p}$ имеет вид

$$\frac{P_m}{Q_m} = \frac{[q_0, \dots, q_m]_{(m+1)}}{[q_1, \dots, q_m]_{(m)}},$$

где скобки Эйлера $[b_1, \dots, b_n]_{(n)}$, определены рекуррентно

$$[]_{(-1)} = 0, \quad []_{(0)} = 1, \quad [b_1, \dots, b_n]_{(n)} = b_n[b_1, \dots, b_{n-1}]_{(n-1)} + [b_1, \dots, b_{n-2}]_{(n-2)} \quad (n \geq 1)$$

и неполные частные q_ν заданы равенствами

$$q_\nu = \begin{cases} q_0, & \text{при } \nu = 0 \\ q_\nu, & \text{при } 1 \leq \nu \leq 1 + k \\ q_{n+1-\nu}, & \text{при } 2 + k \leq \nu \leq n \\ 2q_0, & \text{при } \nu = n + 1 \\ q_{(n+1)\{\frac{\nu}{n+1}\}}, & \text{при } \left\{\frac{\nu}{n+1}\right\} > 0 \\ 2q_0, & \text{при } \left\{\frac{\nu}{n+1}\right\} = 0. \end{cases}$$

Напомним, что справедливо равенство

$$\frac{Q_{m-1}}{Q_m} = \frac{[q_1, \dots, q_{m-1}]_{(m-1)}}{[q_1, \dots, q_m]_{(m)}} = \frac{1}{q_m + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_1}}}}.$$

3. Случай нечетного номера подходящей дроби

Если m — нечетное, то

$$\frac{a_m}{N_m} = \frac{2P_m Q_{m-1} - 1}{2P_m Q_m} = \frac{Q_{m-1} - \frac{1}{2P_m}}{Q_m}.$$

Положим $R_\nu = Q_{m-\nu} + \frac{(-1)^\nu [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+2-\nu}]_{(\nu-1)}}{2P_m}$, ($0 \leq \nu \leq m+1$). Ясно, что

$$\begin{aligned} R_0 &= Q_m, \quad R_1 = Q_{m-1} - \frac{1}{2P_m}, \quad \frac{a_m}{N_m} = \frac{R_1}{R_0}, \\ R_m &= 1 - \frac{[q_m, q_{m-1}, \dots, q_2]_{(m-1)}}{2P_m}, \quad R_{m+1} = \frac{[q_m, q_{m-1}, \dots, q_1]_{(m)}}{2P_m} = \frac{Q_m}{2P_m}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. *Справедливы равенства $R_\nu = q_{m-\nu}R_{\nu+1} + R_{\nu+2}$, ($0 \leq \nu \leq m-1$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, при $\nu = 0$ имеем:

$$R_0 = Q_m = q_m Q_{m-1} + Q_{m-2} = q_m \left(R_1 - \frac{(-1)^1 []_{(0)}}{2P_m} \right) + R_2 - \frac{(-1)^2 [q_m]_{(1)}}{2P_m} = q_m R_1 + R_2$$

и утверждение верно при $\nu = 0$.

Далее имеем при $\nu > 0$:

$$\begin{aligned} R_\nu &= Q_{m-\nu} + \frac{(-1)^\nu [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+2-\nu}]_{(\nu-1)}}{2P_m} = \\ &= q_{m-\nu} Q_{m-\nu-1} + Q_{m-\nu-2} + \frac{(-1)^\nu [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+2-\nu}]_{(\nu-1)}}{2P_m} = \\ &= q_{m-\nu} \left(R_{\nu+1} - \frac{(-1)^{\nu+1} [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+1-\nu}]_{(\nu)}}{2P_m} \right) + R_{\nu+2} - \frac{(-1)^{\nu+2} [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m-\nu}]_{(\nu+1)}}{2P_m} + \\ &\quad + \frac{(-1)^\nu [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+2-\nu}]_{(\nu-1)}}{2P_m} = q_{m-\nu} R_{\nu+1} + R_{\nu+2}, \end{aligned}$$

так как

$$q_{m-\nu} [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+1-\nu}]_{(\nu)} + [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+2-\nu}]_{(\nu-1)} = [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m-\nu}]_{(\nu+1)}.$$

□

ЛЕММА 2. *Справедливо равенство*

$$\frac{2P_m Q_{m-1} - 1}{2P_m Q_m} = \frac{1}{q_m + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_1 + \frac{R_{m+1}}{R_m}}}}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\frac{2P_m Q_{m-1} - 1}{2P_m Q_m} = \frac{Q_{m-1} - \frac{1}{2P_m}}{Q_m} = \frac{R_1}{R_0},$$

то по лемме 1 последовательно получим:

$$\begin{aligned} \frac{2P_m Q_{m-1} - 1}{2P_m Q_m} &= \frac{1}{q_m + \frac{R_2}{R_1}} = \frac{1}{q_m + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{R_3}{R_2}}} = \dots = \frac{1}{q_m + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_{m-2} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{m-\nu} + \frac{R_{\nu+2}}{R_{\nu+1}}}}}}} = \\ &= \dots = \frac{1}{q_m + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_{m-2} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_1 + \frac{R_{m+1}}{R_m}}}}} \end{aligned}$$

и лемма полностью доказана. $\square$

ЛЕММА 3. *Справедливо равенство*

$$\frac{R_{m+1}}{R_m} = \frac{1}{2q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_m}}}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $Q_m = [q_1, \dots, q_m]_{(m)}$, $P_m = [q_0, \dots, q_m]_{(m+1)}$ и $P_m = q_0 Q_m + [q_2, \dots, q_m]_{(m-1)}$.

Отсюда следует, что

$$\frac{R_{m+1}}{R_m} = \frac{\frac{Q_m}{2P_m}}{1 - \frac{[q_m, q_{m-1}, \dots, q_2]_{(m-1)}}{2P_m}} = \frac{Q_m}{2P_m - [q_m, q_{m-1}, \dots, q_2]_{(m-1)}} = \frac{Q_m}{2q_0 Q_m + [q_m, q_{m-1}, \dots, q_2]_{(m-1)}}.$$

Далее получим:

$$\frac{R_{m+1}}{R_m} = \frac{1}{2q_0 + \frac{[q_m, q_{m-1}, \dots, q_2]_{(m-1)}}{[q_m, q_{m-1}, \dots, q_1]_{(m)}}} = \frac{1}{2q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_m}}}}.$$

и лемма полностью доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 1. *При нечетном m справедливо равенство*

$$\frac{a_m}{N_m} =$$

$$= \frac{1}{q_m + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{2q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_m}}}}}}}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы непосредственно следует из лемм 2 и 3. $\square$

4. Случай четного номера подходящей дроби

Если m — четное, то

$$\frac{a_m}{N_m} = \frac{2P_m Q_m - 2P_m Q_{m-1} - 1}{2P_m Q_m} = \frac{Q_m - Q_{m-1} - \frac{1}{2P_m}}{Q_m} = \frac{1}{1 + \frac{Q_{m-1} + \frac{1}{2P_m}}{Q_m - Q_{m-1} - \frac{1}{2P_m}}}.$$

Здесь возможно два случая: $q_m = 1$ и $q_m > 1$.

Сначала рассмотрим второй случай $q_m > 1$. Тогда

$$\frac{a_m}{N_m} = \frac{1}{1 + \frac{Q_{m-1} + \frac{1}{2P_m}}{Q_m - Q_{m-1} - \frac{1}{2P_m}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{q_m - 1 + \frac{Q_{m-2} - \frac{q_m}{2P_m}}{Q_{m-1} + \frac{1}{2P_m}}}}.$$

Продолжая разложение, получим

$$\begin{aligned} \frac{Q_{m-2} - \frac{q_m}{2P_m}}{Q_{m-1} + \frac{1}{2P_m}} &= \frac{1}{q_{m-1} + \frac{Q_{m-3} + \frac{[q_m, q_{m-1}]_{(2)}}{2P_m}}{Q_{m-2} - \frac{q_m}{2P_m}}}, \\ \frac{a_m}{N_m} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{q_m - 1 + \frac{Q_{m-2} - \frac{q_m}{2P_m}}{Q_{m-1} + \frac{1}{2P_m}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{q_m - 1 + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{Q_{m-3} + \frac{[q_m, q_{m-1}]_{(2)}}{2P_m}}{Q_{m-2} - \frac{q_m}{2P_m}}}}}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $q_m = 1$, тогда

$$\frac{a_m}{N_m} = \frac{1}{1 + \frac{Q_{m-1} + \frac{1}{2P_m}}{Q_{m-2} - \frac{1}{2P_m}}} = \frac{1}{1 + q_{m-1} + \frac{Q_{m-3} + \frac{1+q_{m-1}}{2P_m}}{Q_{m-2} - \frac{1}{2P_m}}} = \frac{1}{1 + q_{m-1} + \frac{Q_{m-3} + \frac{[q_m, q_{m-1}]_{(2)}}{2P_m}}{Q_{m-2} - \frac{q_m}{2P_m}}}.$$

Положим $R_\nu^* = Q_{m-\nu} - \frac{(-1)^\nu [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+2-\nu}]_{(\nu-1)}}{2P_m}$, ($2 \leq \nu \leq m+1$). Ясно, что

$$\begin{aligned} R_2^* &= Q_{m-2} - \frac{q_m}{2P_m}, \quad R_3^* = Q_{m-3} + \frac{[q_m, q_{m-1}]_{(2)}}{2P_m}, \\ R_m^* &= 1 - \frac{[q_m, q_{m-1}, \dots, q_2]_{(m-1)}}{2P_m}, \quad R_{m+1}^* = \frac{[q_m, q_{m-1}, \dots, q_1]_{(m)}}{2P_m} = \frac{Q_m}{2P_m}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4. Справедливы равенства $R_\nu^* = q_{m-\nu} R_{\nu+1}^* + R_{\nu+2}^*$, ($2 \leq \nu \leq m-1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, при $\nu > 1$:

$$\begin{aligned} R_\nu^* &= Q_{m-\nu} - \frac{(-1)^\nu [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+2-\nu}]_{(\nu-1)}}{2P_m} = \\ &= q_{m-\nu} Q_{m-\nu-1} + Q_{m-\nu-2} - \frac{(-1)^\nu [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+2-\nu}]_{(\nu-1)}}{2P_m} = \\ &= q_{m-\nu} \left(R_{\nu+1}^* + \frac{(-1)^{\nu+1} [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+1-\nu}]_{(\nu)}}{2P_m} \right) + R_{\nu+2}^* + \frac{(-1)^{\nu+2} [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m-\nu}]_{(\nu+1)}}{2P_m} - \\ &\quad - \frac{(-1)^\nu [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+2-\nu}]_{(\nu-1)}}{2P_m} = q_{m-\nu} R_{\nu+1}^* + R_{\nu+2}^*, \end{aligned}$$

так как

$$q_{m-\nu} [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+1-\nu}]_{(\nu)} + [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+2-\nu}]_{(\nu-1)} = [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m-\nu}]_{(\nu+1)}.$$

□

Нетрудно видеть, что справедливы равенства

$$\frac{a_m}{N_m} = \begin{cases} \frac{1}{1 + \frac{1}{q_m - 1 + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{R_3^*}{R_2^*}}}}, & \text{при } q_m > 1 \\ \frac{1}{1 + q_{m-1} + \frac{R_3^*}{R_2^*}}, & \text{при } q_m = 1. \end{cases}$$

Ясно, что второе получается из первого при $q_m = 1$. Повторяя дословно рассуждения из предыдущего раздела, получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. При четном m справедливо равенство

$$\frac{a_m}{N_m} = \frac{1}{1 + \frac{1}{q_m - 1 + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{2q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_m}}}}}}}}}}.$$

5. Заключение

Пусть α — произвольная вещественная иррациональность и решётка $\Lambda(\alpha)$ задана равенством

$$\Lambda(\alpha) = \{(n + k\alpha, n - k\alpha) | n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Пусть $\frac{P_m}{Q_m}$ обозначает m -ю подходящая дробь к α . По аналогии с квадратичным случаем можно рассмотреть сетку

$$M(\Lambda_m(\alpha)) = \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m} \right) \middle| k \in B(n), 0 \leq n \leq 2Q_m - 1 \right\},$$

$$B(n) = \left\{ k \middle| \begin{array}{ll} k = 0, & \text{при } n = 0, \\ -\frac{P_m n}{Q_m} \leq k \leq \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \dots, Q_m - 1, \\ -2P_m + \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = Q_m, \dots, 2Q_m - 1; \end{array} \right\}$$

Из результатов А. В. Михляевой [4] следует, что это всегда будет параллелепипедальная сетка. Качество этой сетки можно рассчитать с помощью быстрого алгоритма из работы [1]. Доказанные теоремы 1 и 2 дают всю необходимую информацию для этих алгоритмов.

Выражаю свою благодарность научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток. монография / под редакцией Н. М. Добровольского. Тула, 2012.
2. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. — М.: Наука. 1965 г. — 176 с.
3. Михляева А. В. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.
4. Михляева А. В. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1. С. 305–310.

REFERENCES

1. Vronskaya, G. T., Dobrovol'skii, N. N. 2012, "Deviations of flat grids. monograph", edited by N. M. Dobrovol'skii. Tula.
2. Davenport, H., 1965, "The higher arithmetic", *Moscow, Nauka* — pp. 176.
3. Mikhlyaeva, A. V., 2018, "Approximation of quadratic algebraic lattices and nets by integer lattices and rational nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 241–256.
4. Mikhlyaeva, A. V., 2019, "Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 305–310.