ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-292-295

Об одном применении интеграла Дирихле

А. Гияси

Гияси Азар — кандидат физико-математических наук, кафедра математики, Факультет математики и компьютерных наук, Университет имени Алламе Табатабаи, г. Тегеран (Иран).
e-mail: azarghyasi@yahoo.com

Аннотация

Найдено преобразование Фурье одного разрывного множителя с остатком и для последнего получена оценка его преобразования Фурье.

Ключевые слова: интеграл Дирихле, разрывный множитель.

Библиография: 1 название.

Для цитирования:
А. Гияси. Об одном применении интеграла Дирихле // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 292–295.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-292-295

An one application of Dirichlet integral

A. Ghyasi

Ghyasi Azar — candidate of physical and mathematical sciences, Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer Sciences, Allameh Tabataba'i University, Tehran (Iran).
e-mail: azarghyasi@yahoo.com

Abstract

The Fourier transformation of a discontinuous factor with the remainder is found and for the last one the estimation of its Fourier transformation is obtained.

Keywords: Dirichlet integral, the breaking multiplier.

Bibliography: 1 title.

For citation:
A. Ghyasi, 2019, "An one application of Dirichlet integral" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 292–295.

Рассмотрим интеграл Дирихле вида

$$D(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin(2\pi xy)}{y}\,dy = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x > 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ -1, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

В настоящей работе будет дано еще одно применение этого интеграла $D(x)$ (см., например, [1]). Найденные ниже теоремы 1 и 2 являются полезным инструментом в диофантовом анализе.

Пусть $\Delta > 0$ — вещественное число, и пусть $h_\Delta(x)$ — индикаторная функция промежутка $[-\Delta, \Delta]$, т.е.

$$h_\Delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |x| < \Delta, \\ 1/2, & \text{если} \quad |x| = \Delta, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > \Delta. \end{cases}$$

Тогда находим

$$h_\Delta(x) = \frac{1}{2}\left(D(x+\Delta) - D(x-\Delta)\right).$$

Воспользовавшись формулой для интеграла Дирихле $D(x)$, получим

$$h_\Delta(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin(2\pi\Delta y)}{y}\cos(2\pi xy)\,dy.$$

Теорема 1. *Пусть $T\Delta \geq 1$. Тогда имеем*

$$h_\Delta(x) = A(x,T) + R(x,T),$$

где

$$A(x,T) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^T \frac{\sin(2\pi\Delta y)}{y}\cos(2\pi ixy)\,dy = \frac{1}{2}\left(D_T(x+\Delta) - D_T(x-\Delta)\right),$$

$$D_T(u) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^T \frac{\sin(2\pi uy)}{y}\,dy, \quad |R(x,T)| \leq \sigma(x,T) = \frac{8}{\sqrt{1+T^2(\Delta-|x|)^2}}.$$

Доказательство. Преобразуем интеграл $R(x,T)$. Получим

$$R(x,T) = \frac{1}{\pi}\int\limits_T^\infty \left(\sin(2\pi(x+\Delta)y) - \sin(2\pi(x-\Delta)y)\right)\frac{dy}{y} = R_1 - R_2.$$

Отсюда, используя вторую теорему о среднем, имеем

$$|R_1| = \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{2\pi T|x+\Delta|}^\infty \sin u\frac{du}{u}\right| \leq \frac{1}{\pi^2 T|x+\Delta|}, \quad |R_2| \leq \frac{1}{\pi^2 T|x-\Delta|}.$$

Таким образом, для любых вещественных x и положительных Δ, T с условием $|x| \neq \Delta$, находим

$$|R(x,T)| \leq |R_1| + |R_2| \leq \frac{2}{\pi^2 T|\Delta - |x||}.$$

Следовательно, при $|x-\Delta| \geq 1/T$ или $|x+\Delta| \geq 1/T$, получим $|R(x,T)| \leq \frac{2}{\pi^2}$.

Пусть, теперь, либо $|x-\Delta| \le 1/T$, либо $|x+\Delta| \le 1/T$. Тогда имеем

$$R(x,T) = h_\Delta(x) - A(x,T) = h_\Delta(x) - A_0 - \frac{1}{2}\left(A_1(x+\Delta) - A_1(x-\Delta)\right),$$

где

$$A_0 = A(x,\Delta^{-1}), A_1(u) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\Delta^{-1}}^{\infty} \frac{\sin(2\pi uy)}{y}\,dy$$

Стало быть, справедливо неравенство

$$|R(x,T)| \le h_\Delta(x) + |A_0| + \frac{1}{2}\left(|A_1(x+\Delta)| + |A_1(x-\Delta)|\right).$$

Далее, имеем

$$|A_0| = \left|\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\Delta^{-1}} \frac{\sin(2\pi\Delta y)}{y}\cos(2\pi xy)\,dy\right| \le \frac{2}{\pi},$$

$$|A_1(u)| = \left|\frac{2}{\pi}\int\limits_{\Delta^{-1}}^{T} \frac{\sin(2\pi uy)}{y}\,dy\right| \le \frac{2}{\pi^2|u|}.$$

В случае $|u| \le 1/T$ получим

$$|A_1(u)| \le \frac{2}{\pi}|u|T \le \frac{2}{\pi}.$$

Наконец, собирая вместе полученные неравенства и используя условие, что либо

$$x \in [-\Delta - 1/T, -\Delta + 1/T], \quad \text{либо} \quad x \in [\Delta - 1/T, \Delta + 1/T],$$

находим

$$|R(x,T)| \le 1 + \frac{4}{\pi}.$$

Таким образом, для любых x и любых положительных T, Δ, справедливо неравенство

$$|R(x,T)| \le 4\min\left(1, \frac{1}{T|\Delta - |x||}\right) \le \frac{8}{\sqrt{1 + T^2(\Delta - |x|)^2}}.$$

Теорема 1 доказана. □

Теорема 2. *При $T\Delta \ge 1$ имеет место формула*

$$\sigma(x,T) = \frac{8}{\sqrt{1 + T^2(\Delta - |x|)^2}} = \int\limits_0^{\infty} f(y)\cos(2\pi xy)\,dy,$$

причем для $y \ge 0$ справедливо неравенство

$$|f(y)| \le \frac{1 + \ln T}{T} e^{-y/T}.$$

Доказательство. Из интегральной формулы Фурье для функции $\sigma(x,T)$ находим формулу для функции $f(y)$. Имеем

$$f(y) = 2\int\limits_0^{\infty} \sigma(x,T)\cos 2\pi xy\,dx = 16\varepsilon\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos(2\pi xy)}{\sqrt{\varepsilon^2 + (\Delta - x)^2}}\,dx = 16\varepsilon g(y),$$

где $\varepsilon = 1/T$.

Для оценки функции $g(y)$ нам необходимо рассмотреть функцию комплексного переменного

$$h(z) = \frac{\cos(2\pi zy)}{\sqrt{\varepsilon^2 + (\Delta - z)^2}}$$

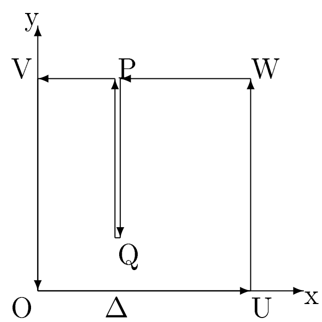
в области $\mathrm{Re}z \geq 0, \mathrm{Im}z \geq 0$.

Заметим, что функция $h(z)$ будет однозначной аналитической функцией в этом первом квадранте с разрезом по лучу $(\Delta + i/T, \Delta + i\infty)$.

Построим замкнутый контур L, который обходится в положительном направлении, и состоит из семи отрезков

$$L_1 = [O, U],\ L_2 = [U, W],\ L_3 = [W, P],\ L_4 = [P, Q],\ L_5 = [Q, P],\ L_6 = [P, V],\ L_7 = [V, O]$$

(см. рис. ниже). Точка O — начало координат, точке U отвечает комплексное число u, точке V — число iv, точке W — число $u + iv$, точке P — число $\Delta + iv$, и, наконец, точке Q — число $\Delta + i/T$.



Стандартное применение теоремы Коши к функции $h(z)$ и рассматриваемому контуру L приводит к доказательству теоремы 2. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов, Г. И., Садовничий, В. А., Чубариков, В. Н. Лекции по математическому анализу, 6-е изд. — М.: Дрофа, 2008, 640 с.

Получено 05.12.2018 г.
Принято в печать 10.04.2019 г.