ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 1.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-282-291

# Обобщённые суммы Гаусса и многочлены Бернулли

В. Н. Чубариков

**Чубариков Владимир Николаевич** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, декан Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, г. Москва.
*e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su chubarik2009@live.ru*

**Аннотация**

Для периодической арифметической функции с периодом, равным простому числу $q$, при целых $m, n$ вводится понятие обобщённой суммы Гаусса $G_f(m)$ с символом Лежандра $\left(\frac{n}{q}\right)$:

$$G_f(m) = \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q}\right) f\left(\frac{mn}{q}\right).$$

Рассмотрены частные случаи $f(x) = B_\nu(\{x\}), \nu \geq 1$, где $B_\nu(x)$ — многочлены Бернулли.

В работе используется техника конечных рядов Фурье. Если функция $f\left(\frac{k}{q}\right)$ определена в точках $k = 0, 1, \ldots, q-1$, то её можно разложить в конечный ряд Фурье

$$f\left(\frac{k}{q}\right) = \sum_{m=0}^{q-1} c_m e^{2\pi i \frac{mk}{q}}, \quad c_m = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} f\left(\frac{k}{q}\right) e^{-2\pi i \frac{mk}{q}}.$$

С помощью разложения в конечный ряд Фурье обобщённой суммы Гаусса

$$G_\nu(m) = G_\nu(m; B_\nu) = \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q}\right) B_\nu\left(\left\{x + \frac{mn}{q}\right\}\right)$$

при $\nu = 1$ и $\nu = 2$ найдены новые формулы, выражающие значение символа Лежандра через полные суммы от периодических функций. Это обстоятельство позволяет получить новые аналитические свойства соответствующих рядов Дирихле и арифметических функций, что будет темой следующих работ.

В работе обнаружено важное свойство сумм $G_1$ и $G_2$, а именно:
$G_1 \neq 0$, если $q \equiv 3 \pmod 4$ и $G_1 = 0$, если $q \equiv 1 \pmod 4$;
$G_2 = 0$, если $q \equiv 3 \pmod 4$ и $G_2 = \frac{1}{q^2}\sum\limits_{n=1}^{q-1} n^2 \left(\frac{n}{q}\right)$, если $q \equiv 1 \pmod 4$.

*Ключевые слова:* Суммы Гаусса, многочлены Бернулли, символ Лежандра

*Библиография:* 17 названий.

**Для цитирования:**
В. Н. Чубариков. Обобщённые суммы Гаусса и многочлены Бернулли // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 282–291.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-282-291

# Generalized Gaussian sums and Bernoulli polynomials

V. N. Chubarikov

**Chubarikov Vladimir Nikolaevich** — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematical and Computer Methods of Analysis, Dean of the Mechanics and Mathematics Faculty of Moscow State University named after M. V. Lomonosov, Moscow
*e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su chubarik2009@live.ru*

**Abstract**

The conception of Generalized Gaussian Sum $G_f(m)$ for a periodic arithmetical functon with a period, is equal prime number $q$, for integers $m, n$ is introduce:

$$G_f(m) = \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q}\right) f\left(\frac{mn}{q}\right).$$

Here are considered the particular cases $f(x) = B_\nu(\{x\}), \nu \geq 1$, where $B_\nu(x)$ — Bernoulli polynomials.

The paper uses the technique of finite Fourier series. If the function $f\left(\frac{k}{q}\right)$ is defined at $k = 0, 1, \ldots, q-1$, it can be decomposed into a finite Fourier series

$$f\left(\frac{k}{q}\right) = \sum_{m=0}^{q-1} c_m e^{2\pi i \frac{mk}{q}}, \quad c_m = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} f\left(\frac{k}{q}\right) e^{-2\pi i \frac{mk}{q}}.$$

By decomposition into a finite Fourier series of a generalized Gauss sum

$$G_\nu(m) = G_\nu(m; B_\nu) = \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q}\right) B_\nu\left(\left\{x + \frac{mn}{q}\right\}\right)$$

for $\nu = 1$ and $\nu = 2$ , new formulas are found that Express the value of the Legendre symbol through the full sums of periodic functions. This circumstance makes it possible to obtain new analytical properties of the corresponding Dirichlet series and arithmetic functions, which will be the topic of the following works.

An important property of the sums $G_1$ and $G_2$, namely:
$G_1 \neq 0$, if $q \equiv 3 \pmod 4$ and $G_1 = 0$, if $q \equiv 1 \pmod 4$;
$G_2 = 0$, if $q \equiv 3 \pmod 4$ and $G_2 = \frac{1}{q^2}\sum\limits_{n=1}^{q-1} n^2 \left(\frac{n}{q}\right)$, if $q \equiv 1 \pmod 4$.

*Keywords:* Gaussian sums, Bernoulli polynomials, the Legandre symbol

*Bibliography:* 17 titles.

**For citation:**
V. N. Chubarikov, 2019, "Generalized Gaussian sums and Bernoulli polynomials", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 282–291.

## Введение

Пусть $q$ — простое число, $n$ — натуральное число, $\left(\frac{n}{q}\right)$ — символ Лежандра, $e_q(n) = e^{2\pi i \frac{n}{q}}$. Тогда сумма Гаусса имеет вид (см. [10]–[15])

$$G(m) = \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q}\right) e_q(mn) = \varepsilon\sqrt{q},$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{если } q \equiv 1 \pmod 4, \\ i, & \text{если } q \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Далее определим многочлены Бернулли $B_\nu(x)$ с помощью производящей функции (см. [16]–[17])

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu(x)t^\nu}{\nu!}.$$

В частности, при $x = 0$ и при $|t| < 2\pi$ находим производящую функцию для чисел Бернулли $B_\nu$:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu t^\nu}{\nu!},$$

где

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_{2\nu} = \frac{(-1)^{\nu-1}(2\nu)!\zeta(2\nu)}{2^{2\nu-1}\pi^{2\nu}}, \quad B_{2\nu+1} = 0, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

$$B_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} B_k x^{\nu-k}, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Определим теперь обобщённую сумму Гаусса

$$G_\nu(m) = G_\nu(m; B_\nu) = \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q}\right) B_\nu\left(\left\{x + \frac{mn}{q}\right\}\right).$$

Предположим, что $G_\nu(1) = G_\nu \neq 0$. Тогда

$$\left(\frac{m}{q}\right) = \frac{1}{G_\nu} \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q}\right) B_\nu\left(\left\{x + \frac{mn}{q}\right\}\right)$$

и при $\mathrm{Re}\, s > 0$ получим

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{q}\right) n^{-s} = \frac{1}{G_\nu} \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} B_\nu\left(\left\{x + \frac{mn}{q}\right\}\right).$$

Положим $x = 0$. Для функции $B_\nu\left(\frac{n}{q}\right)$ имеем разложение в конечный ряд Фурье (см. [15])

$$B_\nu\left(\frac{n}{q}\right) = \sum_{k=0}^{q-1} c_k e^{2\pi i \frac{kn}{q}},$$

где

$$c_k = c_k(\nu) = \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} B_\nu\left(\frac{r}{q}\right) e^{-2\pi i \frac{kr}{q}}.$$

Действительно,

$$\sum_{k=0}^{q-1} c_k e^{2\pi i \frac{kn}{q}} = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{r=0}^{q-1} B_\nu\left(\frac{r}{q}\right) e^{2\pi i \frac{k(n-r)}{q}} =$$

$$= \frac{1}{q}\sum_{r=0}^{q-1} B_\nu\left(\frac{r}{q}\right)\sum_{k=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{k(n-r)}{q}} = B_\nu\left(\frac{n}{q}\right).$$

Используя это разложение, найдём

$$G_\nu = \sum_{n=1}^{q-1}\left(\frac{n}{q}\right) B_\nu\left(\frac{n}{q}\right) = \sum_{n=1}^{q-1}\left(\frac{n}{q}\right)\sum_{k=0}^{q-1} c_k e^{2\pi i \frac{kn}{q}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{q-1}\sum_{n=1}^{q-1}\left(\frac{n}{q}\right) e^{2\pi i \frac{kn}{q}} = \varepsilon\sqrt{q}\sum_{k=0}^{q-1}\left(\frac{k}{q}\right) c_k(\nu).$$

Целью данной работы является доказательство следующих двух теорем.

Теорема 1. *Пусть $q$ — простое число, $\left(\frac{k}{q}\right)$ — символ Лежандра, $c_k$ — коэффициенты Фурье функции $G_1(x)$ при $x = 1$. Тогда*

$$G_1 = \varepsilon\sqrt{q}\sum_{k=0}^{q-1}\left(\frac{k}{q}\right) c_k = \frac{\varepsilon}{\sqrt{q}}\sum_{k=1}^{q-1}\left(\frac{k}{q}\right)\frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi i k}{q}}},$$

*причём $G_1 \neq 0$, если $q \equiv 3 \pmod 4$ и $G_1 = 0$, если $q \equiv 1 \pmod 4$.*

Теорема 2. *Пусть $q$ — простое число, $\left(\frac{k}{q}\right)$ — символ Лежандра, $c_k = c_k(2)$ — коэффициенты конечного ряда Фурье функции $G_2 = G_2(1)$. Тогда*

$$G_2 = \varepsilon\sqrt{q}\sum_{k=1}^{q-1}\left(\frac{k}{q}\right) c_k(2) = -2\varepsilon q^{-3/2}\sum_{k=1}^{q-1}\left(\frac{k}{q}\right)\frac{e^{-2\pi i \frac{kr}{q}}}{\left(1-e^{-2\pi i \frac{kr}{q}}\right)^2}.$$

*причём $G_2 = 0$, если $q \equiv 3 \pmod 4$ и $G_2 = \frac{1}{q^2}\sum\limits_{n=1}^{q-1} n^2\left(\frac{n}{q}\right)$, если $q \equiv 1 \pmod 4$.*

## 1. Леммы

Нам необходимы следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Для любого целого $q \geq 2$ имеем*

$$a) f_0 = \sum_{r=1}^{q-1} z^r = \frac{z-z^q}{1-z},$$

$$b) f_1 = \sum_{r=1}^{q-1} r z^r = z f_0' = \frac{z-z^{q+1}}{(1-z)^2} - \frac{q z^q}{1-z},$$

$$c) f_2 = \sum_{r=1}^{q-1} r^2 z^r = z f_1' = 2\frac{z^2-z^{q+2}}{(1-z)^3} + \frac{z-(2q+1)z^{q+1}}{(1-z)^2} - \frac{q z^q}{1-z}.$$

Доказательство. Утверждение a) общеизвестно, b) следует из цепочки равенств

$$f_1 = zf_0' = z\frac{(1-qz^{q-1})(1-z)+(z-z^q)}{(1-z)^2} = \frac{z-qz^q+(q-1)z^{q+1}}{(1-z)^2} =$$

$$= \frac{z-z^{q+1}}{(1-z)^2} - \frac{qz^q}{1-z}.$$

Утверждение c) находим из соотношений

$$f_2 = zf_1' = z\frac{(1-(q+1)z^q)(1-z)+2(z-z^{q+1})}{(1-z)^3} - z\frac{q^2z^{q-1}(1-z)+qz^q}{(1-z)^2} =$$

$$= \frac{z+z^2-(q+1)z^{q+1}+(q-1)z^{q+2}}{(1-z)^3} - \frac{q^2z^{q+1}-(q^2-q)z^{q+1}}{(1-z)^2} =$$

$$\frac{z+z^2-q^2z^q+(2q^2-2q-1)z^{q+1}-(q^2+1)z^{q+2}}{(1-z)^3} =$$

$$= 2\frac{z^2-z^{q+2}}{(1-z)^3} + \frac{z-(2q+1)z^{q+1}}{(1-z)^2} - \frac{qz^q}{1-z}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть для любого простого числа* $q > 2$

$$G_f(m) = \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q}\right) f\left(\left\{x + \frac{mn}{q}\right\}\right),$$

*где* $f(x)$ *— периодическая функция с периодом 1 и* $\left(\frac{n}{q}\right)$ *— символ Лежандра вычета* $n$ *по модулю* $q$.

*Тогда имеем*

$$\left(\frac{m}{q}\right) G_f(1) = G_f(m),$$

*а при* $\mathrm{Re}s > 1$ *и при* $G_f(1) \neq 0$ *для* $L$*-ряда Дирихле справедлива формула*

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{q}\right) n^{-s} = \frac{1}{G_f(1)} \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} f\left(\left\{x + \frac{mn}{q}\right\}\right).$$

Доказательство. Сделаем замену переменной суммирования, положив $k \equiv mn \pmod q$, получим $km^{-1} \equiv n \pmod q$ и в силу периодичности функции $f(x)$ имеем:

$$G_f(m) = \sum_{k=1}^{q-1} \left(\frac{km^{-1}}{q}\right) f\left(\left\{x + \frac{k}{q}\right\}\right) = \left(\frac{m}{q}\right) \sum_{k=1}^{q-1} \left(\frac{k}{q}\right) f\left(\left\{x + \frac{k}{q}\right\}\right) = \left(\frac{m}{q}\right) G_f(1)$$

и первое утверждение леммы доказано.

Если $G_f(1) \neq 0$, то $\left(\frac{m}{q}\right) = \frac{G_f(m)}{G_f(1)}$. Отсюда следует, что

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{q}\right) n^{-s} = \frac{1}{G_f(1)} \sum_{n=1}^{\infty} G_f(n) n^{-s} = \frac{1}{G_f(1)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{q-1} \left(\frac{k}{q}\right) f\left(\left\{x + \frac{kn}{q}\right\}\right) n^{-s}.$$

В силу абсолютной сходимости рядов можно переставить порядки суммирования, получим

$$L(s) = \frac{1}{G_f(1)} \sum_{k=1}^{q-1} \left(\frac{k}{q}\right) \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\left\{x + \frac{kn}{q}\right\}\right) n^{-s}$$

и лемма полностью доказана. □

Лемма 3. *Пусть $q > 1, u$ — натуральные числа. Тогда имеем*

$$B_1\left(\left\{\frac{u}{q}\right\}\right) = \left\{\frac{u}{q}\right\} - \frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{q-1} c_k e_q(ku),$$

*где $c_k = \frac{1}{q(e_q(-k)-1)}$ при $1 \le k \le q-1$ и $c_0 = -\frac{1}{2q}$.*

Доказательство. Используя соотношение

$$\frac{1}{q}\sum_{a=0}^{q-1} e_q(am) = \begin{cases} 1, & \text{если } q \mid m, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

находим

$$B_1\left(\left\{\frac{u}{q}\right\}\right) = \sum_{m=0}^{q-1} B_1\left(\left\{\frac{m}{q}\right\}\right) \frac{1}{q}\sum_{a=0}^{q-1} e_q(a(u-m)) =$$

$$= \frac{1}{q}\sum_{a=0}^{q-1} e_q(au) \sum_{m=0}^{q-1} B_1\left(\left\{\frac{m}{q}\right\}\right) e_q(-am) = \sum_{a=0}^{q-1} c_a e_q au.$$

Вычислим коэффициенты Фурье $c_a$. Имеем

$$c_0 = \frac{1}{q}\sum_{m=0}^{q-1} B_1\left(\left\{\frac{m}{q}\right\}\right) = \frac{1}{q}\sum_{m=0}^{q-1}\left(\frac{m}{q} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2q},$$

при $1 \le a \le q-1$ из леммы 1б) получим

$$c_a = \frac{1}{q}\sum_{m=0}^{q-1} B_1\left(\left\{\frac{m}{q}\right\}\right) e_q(-am) = \frac{1}{q^2}\sum_{m=1}^{q-1} m e_q(-am) =$$

$$= \frac{1}{q^2}\left(\frac{e_q(-a)-1}{(1-e_q(-a))^2} - \frac{q-1}{1-e_q(-a)}\right) = \frac{1}{q(e_q(-a)-1)}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 4. *Пусть $q > 1, u$ — натуральные числа. Тогда имеем*

$$B_2\left(\left\{\frac{u}{q}\right\}\right) = \left\{\frac{u}{q}\right\}^2 - \left\{\frac{u}{q}\right\} + \frac{1}{6} = \sum_{k=0}^{q-1} c_k e_q(ku),$$

*где $c_k = c_k(2) = -2q^{-2}\frac{e^{-2\pi i\frac{kr}{q}}}{\left(1-e^{-2\pi i\frac{kr}{q}}\right)^2}$ при $1 \le k \le q-1$ и $c_0 = -\frac{1}{6q^2}$.*

Доказательство. Сначала вычислим $c_0 = c_0(2)$. Получим

$$c_0 = \frac{1}{q}\sum_{r=0}^{q-1} B_2\left(\frac{r}{q}\right) = \frac{1}{q^3}\sum_{r=1}^{q-1} r^2 - \frac{1}{q^2}\sum_{r=1}^{q-1} r + \frac{1}{q}\sum_{r=0}^{q-1}\frac{1}{6} = \frac{1}{6q^2}.$$

Найдём коэффициенты Фурье $c_k = c_k(2)$ при $1 \le k < q$. Имеем

$$c_k = \frac{1}{q}\sum_{r=0}^{q-1} B_2\left(\frac{r}{q}\right) e^{-2\pi i\frac{kr}{q}} = \frac{1}{q^3}\sum_{r=1}^{q-1} r^2 e^{-2\pi i\frac{kr}{q}} - \frac{1}{q^2}\sum_{r=1}^{q-1} r e^{-2\pi i\frac{kr}{q}} = \Sigma_1 - \Sigma_2.$$

Далее воспользуемся следующими формулами (лемма 1.б,в)

$$\sum_{r=1}^{q-1} r^2 z^r = \frac{z^2 - z^{q+2}}{(1-z)^3} + \frac{z-(2q+1)z^{q+1}}{(1-z)^2} - \frac{q^2 z^q}{1-z}$$

и

$$\sum_{r=1}^{q-1} r z^r = \frac{z-z^q}{(1-z)^2} - \frac{(q-1)z^q}{1-z}.$$

Получим

$$\Sigma_1 = q^{-3}\sum_{r=1}^{q-1} r^2 e_q(-kr) = \frac{e_q(-k)-(2q+1)e_q(-k)}{q^3(1-e_q(-k))^2} - \frac{1}{q(1-e_q(-k))} =$$

$$= -2\frac{e_q(-k)}{q^2(1-e_q(-k))^2} - \frac{1}{q(1-e_q(-k))},$$

$$\Sigma_2 = \frac{e_q(-k)-1}{q^2(1-e_q(-k))^2} - \frac{q-1}{q^2(1-e_q(-k))}.$$

Следовательно,

$$c_k = c_k(2) = -2q^{-2}\frac{e^{-2\pi i\frac{kr}{q}}}{\left(1-e^{-2\pi i\frac{kr}{q}}\right)^2}.$$

Лемма доказана. □

## 2. Вычисление $G_1$. Доказательство теоремы 1

Из определения $G_1$ находим

$$G_1 = \sum_{n=1}^{q-1}\left(\frac{n}{q}\right)B_1\left(\frac{n}{q}\right) = \sum_{n=1}^{q-1}\left(\frac{n}{q}\right)\left(\frac{n}{q}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{q}\sum_{n=1}^{q-1} n\left(\frac{n}{q}\right).$$

Следовательно,

$$qG_1 = \sum_{n=1}^{q-1} n\left(\frac{n}{q}\right).$$

В частности, при $q \equiv 3 \pmod 4$ получим цепочку сравнений

$$qG_1 \equiv \sum_{n=1}^{q-1} n \pmod 2, \quad G_1 \equiv 1 \pmod 2, \quad |G_1| \geq 1.$$

Далее при $q \equiv 1 \pmod 4$ имеем

$$-qG_1 = \sum_{n=1}^{q-1} n\left(\frac{n}{q}\right) = q\sum_{n=1}^{(q-1)/2}\left(\frac{n}{q}\right) = 0.$$

Наконец, исходя из формулы а) леммы, при $1 \leq k < q$ получим

$$c_k = \frac{1}{q}\sum_{r=0}^{q-1}\left(\frac{r}{q}-\frac{1}{2}\right)e^{-2\pi i\frac{rk}{q}} = \frac{1}{q^2}\sum_{r=1}^{q-1} r e^{-\frac{2\pi i k}{q}} = \frac{1}{q\left(1-e^{-\frac{2\pi i k}{q}}\right)}.$$

Отсюда, используя представление для $G_1$, находим

$$G_1 = \varepsilon\sqrt{q}\sum_{k=0}^{q-1}\left(\frac{k}{q}\right)c_k = \frac{\varepsilon}{\sqrt{q}}\sum_{k=1}^{q-1}\left(\frac{k}{q}\right)\frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi i k}{q}}}.$$

Все утверждения теоремы 1 доказаны. □

## 3. Вычисление $G_2$. Доказательство теоремы 2

Найдём разложение в конечный ряд Фурье суммы $G_2$. Получим

$$G_2 = \varepsilon\sqrt{q}\sum_{k=1}^{q-1}\left(\frac{k}{q}\right)c_k(2) = -2\varepsilon q^{-3/2}\sum_{k=1}^{q-1}\left(\frac{k}{q}\right)\frac{e^{-2\pi i\frac{kr}{q}}}{\left(1-e^{-2\pi i\frac{kr}{q}}\right)^2}.$$

Далее вычислим $G_2$ при $q \equiv 3 \pmod 4$. Имеем

$$G_2 = \sum_{n=1}^{q-1}\left(\frac{n}{q}\right)B_2\left(\frac{n}{q}\right) = \sum_{n=1}^{q-1}\left(\frac{n}{q}\right)\left(\left\{\frac{n}{q}\right\}^2 - \left\{\frac{n}{q}\right\} + \frac{1}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{q^2}\sum_{n=1}^{q-1} n^2\left(\frac{n}{q}\right) - \frac{1}{q}\sum_{n=1}^{q-1} n\left(\frac{n}{q}\right).$$

После замены переменной суммирования $n$ на $q-n$ при $1 \le n \le q-1$ находим

$$\sum_{n=1}^{q-1}\frac{n^2}{q^2}\left(\frac{n}{q}\right) = \sum_{n=1}^{q-1}\frac{(q-n)^2}{q^2}\left(\frac{q-n}{q}\right) =$$

$$= -\sum_{n=1}^{q-1}\frac{(q-n)^2}{q^2}\left(\frac{n}{q}\right) = 2\sum_{n=1}^{q-1}\frac{n}{q}\left(\frac{n}{q}\right) - \sum_{n=1}^{q-1}\frac{n^2}{q^2}\left(\frac{n}{q}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{q-1}\frac{n^2}{q^2}\left(\frac{n}{q}\right) = \sum_{n=1}^{q-1}\frac{n}{q}\left(\frac{n}{q}\right).$$

Отсюда получим, что $G_2 = 0$ при $q \equiv 3 \pmod 4$.

Наконец вычислим $G_2$ при $q \equiv 1 \pmod 4$. Имеем по теореме 1

$$G_2 = \sum_{n=1}^{q-1}\left(\frac{n}{q}\right)\left(\left\{\frac{n}{q}\right\}\right)^2.$$

Теорема 2 доказана. □

## 4. Заключение.

В настоящей статье найдены новые формулы, выражающие значение символа Лежандра через полные суммы от периодических функций. Последнее обстоятельство позволяет получить новые аналитические свойства соответствующих рядов Дирихле и арифметических функций (см. [1]–[9]).

Важную роль в получении основных результатов сыграла техника конечных рядов Фурье, которая позволяет находить простые формулы для некоторых теоретико-числовых функций удобные для исследований.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел, 2-е изд., Москва, Наука, 1980, 144 с.

2. Hua L.-K. Selected Papers. New York Inc.: Springer Verlag, 1983, pp. 888.

3. Архипов Г. И. Избранные труды. Орел: Изд-во Орловского гос.ун-та, 2013. 464 с.

4. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39. Berlin, New York, 2004. 554 c.

5. Chubarikov,V. N. Azerbaijan-Turkey-Ukrainian Int.Conf."Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications". Abstracts.(September 08–13, 2015, Baku—Azerbaijan). Linear arithmetic sums and Gaussian multiplication theorem. 2015, p. 38.

6. Чубариков В. Н. Элементарный вывод оценки полной рациональной арифметической суммы от многочлена // Чебышевский сборник. — 2015. — Т.16, №3(55). — С.452–461.

7. Чубариков В. Н. Показатель сходимости среднего значения полных рациональных арифметических сумм // Чебышевский сборник. — 2015. — Т.16, №4(56). — С.303–318.

8. Чубариков В. Н. Арифметические суммы от значений полинома // Докл. РАН — 2016. — Т.466, №2. — С.152–153.

9. Чубариков В. Н. Полные рациональные арифметические суммы // Вестн. Моск. ун-та. Сер.I, Математика, механика. 2015. №1. С. 60–61.

10. Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел. — М.: Изд-во Академии наук СССР, 1959, 979 с.

11. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел.

12. Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1971,

13. Прахар К. Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967,

14. Хассе Г. Лекции по теории чисел, пер. с нем., М., 1953.

15. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.

16. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. — М.: Наука, 1967. 376 с.

17. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

## REFERENCES

1. Vinogradov I. M. Method of Trigonometric Sums in Number Theory, 2nd Ed., M:, Nauka, 1980, pp. 144.

2. Hua L.-K. Selected Papers. New York Inc.: Springer Verlag, 1983, pp. 888.

3. Arkhipov G. I. Selected Papers. Orjol: Publ.House of Orjol Univ., 2013. pp. 464.

4. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39. Berlin, New York, 2004. pp. 554.

5. Chubarikov,V. N. Azerbaijan-Turkey-Ukrainian Int.Conf."Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications". Abstracts.(September 08–13, 2015, Baku—Azerbaijan). Linear arithmetic sums and Gaussian multiplication theorem. 2015, p. 38.

6. Chubarikov,V. N. An elementary deduction of the estimate of of the complete rational arithmetical sum of polynomial // Chebyshev Sbornik. — 2015. — v.16, №3(55). — p.452–461.

7. Chubarikov,V. N. The exponent of a convergence of the mean value of the complete rational arithmetical sums// Chebyshev Sbornik. — 2015. — v.16, № 4(56). — p.303–318.

8. Chubarikov,V. N. Arithmetical sums of values of polynomial // Doklady of RAS — 2016. — v.466, № 2. — p.152–153.

9. Chubarikov,V. N. Complete rational arithmetical sums // Vestnik of Moscow State University. Serija I. Math., Mech. 2015. № 1. p. 60–61.

10. Gauss K. F. Works on the Number Theory. — M.: Publ. House of Academy of Sci. USSR, 1959, 979 pp.

11. Ireland K., Rosen M. Classical introduction to modern number theory.

12. Davenport H. Multiplicative number theory, Markham Publ. Comp., Chicago, 1967.

13. Prachar K. Primzahlverteilung, Springer - Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1957,

14. Hasse H. Vorlesungen über zahlentheorie, Berlin, 1950.

15. Borevich Z. I., Shafarevich I. R. Number theory. M: Nauka, 1985.

16. Gelfond A. O. Calculus of finite differences. — M.: Nauka, 1967. pp. 376.

17. Korobov N. M. Number-theoretical methods in numerical analysis. 2nd Ed. / M: MCCME, 2004. pp. 288.


Получено 01.02.2019 г.
Принято в печать 10.04.2019 г.