ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-270-281

Рассеяние звуковых волн цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе¹

Л. А. Толоконников

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет, г. Тула. *e-mail: tolokonnikovla@mail.ru*

Аннотация

В статье рассматривается задача рассеяния звуковых волн абсолютно жестким цилиндром с радиально-неоднородным изотропным упругим покрытием в плоском волноводе. Полагается, что волновод заполнен однородной идеальной жидкостью, одна его граница является абсолютно жесткой, а другая — акустически мягкой, законы неоднородности материала покрытия цилиндра описываются дифференцируемыми функциями, гармоническая звуковая волна возбуждается заданным распределением источников на сечении волновода.

В случае установившихся колебаний распространение малых возмущений в идеальной жидкости описывается уравнением Гельмгольца. Колебания неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя описываются общими уравнениями движения сплошной среды.

Для нахождения поля смещений в неоднородном покрытии построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Первичное поле возмущений представлено совокупностью собственных волн волновода. Давление рассеянного цилиндрическим телом поля ищется в виде потенциала простого слоя.

Построена функция Грина для уравнения Гельмгольца, удовлетворяющая заданным граничным условиям на стенках волновода и условиям излучения на бесконечности. Функция плотности распределения источников ищется в виде разложения в ряд Фурье. Для нахождения коэффициентов этого разложения получена бесконечная линейная система уравнений. Проведено усечение бесконечной системы и ее решение найдено методом обратной матрицы.

Получены аналитические выражения для рассеянного акустического поля в разных областях волновода.

Kлючевые слова: рассеяние, звуковые волны, цилиндр, неоднородное упругое покрытие, плоский волновод.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников Рассеяние звуковых волн цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 270–281.

 $^{^{1}}$ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK Vol. 20. No. 1.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-270-281

Scattering of sound waves by an cylinder with an radial non-uniform elastic coating in a planar waveguide²

L. A. Tolokonnikov

Tolokonnikov Lev Alekseevich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula state University, Tula. *e-mail: tolokonnikovla@mail.ru*

Abstract

In paper the problem of sound wave scattering by absolutely rigid cylinder with radially inhomogeneous isotropic elastic coating in a planar waveguide is considered. It is believed that a waveguide filled with a homogeneous ideal fluid, one of its borders is absolutely rigid and the other — acoustically soft, heterogeneity laws of a coating material are described by differentiable functions, harmonic sound wave excited by a given distribution of sources in the section waveguide.

In the case of steady state oscillations the propagation of small perturbations in ideal fluid is described by the Helmholtz's equation. The oscillations of an inhomogeneous isotropic elastic cylindrical layer described by general motion equations of the continuous medium.

The boundary-value problem for the system of ordinary second order differential equations is constructed for determination of the displacement field in inhomogeneous coating.

The primary field of disturbances is represented by a set of its own waveguide waves. The pressure of the field scattered by the cylindrical body is sought as potential of a simple layer.

The Green function for the Helmholtz equation that satisfies the given boundary conditions on the waveguide walls and conditions of radiation at infinity is constructed. The function of distribution density of sources are sought as a Fourier series expansion. The infinite linear system of equations is obtained for determination of the coefficients of this decomposition. The solution of truncated infinite system is found by the inverse matrix method.

Analytical expressions for the scattered acoustic field in different areas of the waveguide are obtained.

 $\label{lem:keywords:scattering} \textit{Keywords:} \textit{scattering}, \textit{sound waves}, \textit{cylinder}, \textit{non-uniform elastic coating}, \textit{planar waveguide}.$

Bibliography: 15 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, 2019, "Scattering of sound waves by an cylinder with an radial non-uniform elastic coating in a planar waveguide", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 270–281.

1. Введение

Существует большое количество работ по дифракции акустических волн на телах разной формы в волноводах, в том числе плоскослоистых. В ряде работ решение дифракционных задач находилось в предположении, что эффектами многократного переотражения звука между телом и границами волновода можно пренебречь. Однако учет многократного рассеяния является весьма существенным, хотя и усложняет решение задачи дифракции. Это связано с тем,

²The study was carried out at the expense of a grant from the Russian science Foundation (project 18-11-00199).

что акустическое поле должно удовлетворять граничным условиям на границах волновода и поверхности тела, которые имеют разную геометрию и свойства. Множественное рассеяние звуковых волн на теле произвольной формы и границах плоскослоистого волновода рассматривалось, например, в [1-4], а в [5-8] изучалось распространение звуковых волн в плоских волноводах, содержащих цилиндрические тела. Дифракция звуковых волн на сплошном однородном упругом цилиндре в волноводе с идеальными границами исследована в [5, 6]. В [5] стенки волновода полагались абсолютно мягкими. В [6] рассматривался случай, когда одна граница волновода является абсолютно жесткой, а другая – акустически мягкой. Задачи дифракция звуковых волн на однородных упругих цилиндрах в волноводе с импедансными стенками решены в [7, 8]. Звукоотражающие характеристики рассеивателей можно изменять с помощью покрытий в виде непрерывно-неоднородного слоя (см., например, [9, 10]). В настоящей работе методом, предложенным в [5], решается задача дифракция звуковых волн на жестком цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе, у которого одна граница — абсолютно жесткая, а другая — акустически мягкая.

2. Постановка задачи

Рассмотрим плоский волновод шириной d, заполненный идеальной жидкостью с плотностью ρ_1 и скоростью звука c. Одна стенка волновода является абсолютно жесткой, а другая – акустически мягкой. В волновод помещен бесконечный абсолютно жесткий цилиндр радиуса r_0 . Цилиндр имеет покрытие в виде коаксиального радиально-неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя с внешним радиусом r_1 . Материал покрытия характеризуется плотностью ρ и упругими постоянными λ и μ . Ось вращения цилиндра параллельна стенкам волновода. Вдоль стенок волновода перпендикулярно к оси цилиндрического тела распространяется гармоническая звуковая волна давления p_0 с круговой частотой ω , возбуждаемая заданным распределением источников на сечении волновода, расположенном на расстоянии X_0 от оси цилиндра. В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать. Схема волноводной системы изображена на рисунке.

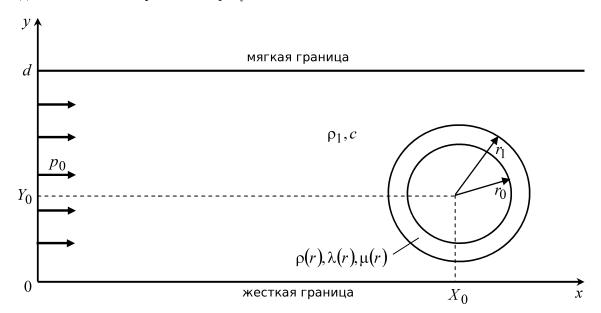


Рис. Схема волноводной системы

Введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z так, чтобы ось x проходила по нижней стенке волновода, ось y лежала в сечении волновода с заданным распределением

источников звука, а ось z была параллельна оси цилиндра. Пусть нижняя граница волновода, определяемая уравнением y=0, является жесткой, а верхняя граница, определяемая уравнением y=d, — мягкой. Положение оси цилиндра определяется координатами

$$x = X_0, y = Y_0, -\infty < z < \infty.$$

Источники звука распределены по поперечному сечению волновода

$$x = 0, \quad 0 \le y \le d, \quad -\infty < z < \infty.$$

С цилиндром свяжем цилиндрическую систему координат r, φ, z .

Полагаем, что плотность материала покрытия ρ является непрерывной функцией радиальной координаты r, а модули упругости покрытия λ и μ — дифференцируемыми функциями координаты r.

Определим акустическое поле в волноводе, а также найдем поле смещений в упругом покрытии.

3. Аналитическое решение задачи

Рассматриваемая задача является двумерной. Все искомые величины не зависят от координаты z.

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний в области $(r \geqslant r_1, \ 0 \leqslant y \leqslant d, \ -\infty < x < \infty)$ описывается уравнением Гельмгольца [11]

$$\Delta p + k^2 p = 0, (1)$$

где $p=p_0+p_s$ — давление полного акустического поля в волноводе, p_s — давление акустического поля, рассеянного цилиндром с покрытием, $k=\omega/c$ — волновое число в жидкости. При этом скорость частиц жидкости $\mathbf{v}=\frac{1}{i\rho_1\omega}\mathrm{grad}\,p$.

Уравнения движения неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя в случае установившихся колебаний в цилиндрической системе координат имеют вид [12]

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = -\omega^2 \rho u_r,
\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} = -\omega^2 \rho u_{\varphi},$$
(2)

где u_r, u_{φ} — компоненты вектора смещения ${\bf u}$ частиц неоднородного слоя, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений в неоднородном слое, $\rho = \rho(r), r_0 \leqslant r \leqslant r_1$.

На границах волновода должны выполняться краевые условия, которые заключаются в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости на нижней стенке и равенстве нулю акустического давления на верхней стенке:

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x,0) = 0, \quad p(x,d) = 0. \tag{3}$$

Граничные условия на внешней поверхности неоднородного покрытия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой неоднородной среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

$$r = r_1: -i\omega u_r = v_r, \sigma_{rr} = -p, \sigma_{r\varphi} = 0,$$
 (4)

где
$$v_r = \frac{1}{i\rho_1\omega} \frac{\partial p}{\partial r}$$
.

На внутренней поверхности покрытия должен быть равен нулю вектор смещения частиц упругой среды

$$r = r_0: u_r = 0, u_{\varphi} = 0.$$
 (5)

Кроме того, необходимо выполнения условий излучения на бесконечности в направлении оси \boldsymbol{x}

$$\lim_{x \to \pm \infty} r \left(\frac{\partial p_s}{\partial r} - ikp_s \right) = 0.$$
 (6)

Первичное поле возмущений p_0 можно представить в виде разложения по полной системе собственных функций краевой задачи (1), (3)

$$p_n(x,y) = e^{\pm i\xi_n x} \cos \lambda_n y,\tag{7}$$

где $\xi_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n^2}$ и $\lambda_n = \frac{\pi}{2d}(2n+1)$ — продольная и поперечная компоненты волнового числа k соответственно.

С помощью системы функций (7) в области x>0 давление поля источников может быть представлено совокупностью собственных (нормальных) волн волновода, распространяющихся вдоль оси x

$$p_0(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i\xi_n x} \cos \lambda_n y,$$
 (8)

где A_n — заданные амплитуды.

Давление рассеянного цилиндром поля p_s представим в виде потенциала простого слоя [5]

$$p_s(x,y) = \int_{L_0} \nu_1(x_0, y_0) G(x, y | x_0, y_0) dl_0,$$
(9)

где $\nu_1(x_0, y_0)$ — неизвестная функция, описывающая распределение источников поля p_s на внешней поверхности неоднородного покрытия, $G(x, y|x_0, y_0)$ — функция Грина, L_0 — окружность радиуса r_1 с центром в точке (X_0, Y_0) , $dl_0 = r_1 d\varphi_0$ — элемент контура L_0 .

Функция $G(x,y|x_0,y_0)$ является решением краевой задачи

$$\Delta G + k^2 G = -\delta (x - x_0) \delta (y - y_0), \qquad (10)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x,0|x_0,y_0) = 0, \quad G(x,d|x_0,y_0) = 0,$$
 (11)

$$\lim_{x \to \pm \infty} R\left(\frac{\partial G}{\partial R} - ikG\right) = 0,\tag{12}$$

где $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ — расстояние между точкой наблюдения (x,y) и источником поля (x_0,y_0) на контуре L_0 . Условия (11) и (12) записаны на основании условий (3) и (6).

Функцию Грина будем искать в виде

$$G(x, y|x_0, y_0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) \cos \lambda_n y,$$
(13)

где
$$C_n(x) = c_n \begin{cases} e^{i\xi_n(x-x_0)}, & x \geqslant x_0 \\ e^{-i\xi_n(x-x_0)}, & x \leqslant x_0 \end{cases}$$
.

Для определения коэффициентов c_n проделаем следующие преобразования. Разложим дельта-функцию $\delta\left(y-y_0\right)$ в ряд Фурье по функциям $\cos\lambda_n y$

$$\delta(y - y_0) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos \lambda_n y.$$

Умножим обе части последнего уравнения на $\cos \lambda_q y$ и проинтегрируем по промежутку [0,d]. Находим коэффициенты d_n , учитывая, что по свойству δ -функции

$$\int_{0}^{d} \delta(y - y_0) \cos \lambda_q y \, dy = \cos \lambda_q y_0$$

и что

$$\int_{0}^{d} \cos \lambda_{n} y \cos \lambda_{q} y \, dy = \begin{cases} 0, & n \neq q, \\ 0, & n = q = 0, \\ d/2, & n = q \neq 0. \end{cases}$$

В результате получаем

$$\delta(y - y_0) = \frac{2}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0n}} \cos \lambda_n y \cos \lambda_n y_0.$$
 (14)

Подставим разложения (13) и (14) в уравнение (10). Умножим обе части полученного уравнения на $\cos \lambda_q y$ и проинтегрируем по y в пределах от 0 до d. Приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 C_n(x)}{\partial x^2} + C_n(x) \left(k^2 - \lambda_n^2\right) = -\frac{2}{d(1 + \delta_{0n})} \cos \lambda_n y_0 \, \delta(x - x_0).$$

Проинтегрируем левую и правую части последнего уравнения по x по малой окрестности точки $x=x_0$. Учитывая, что $\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\delta\left(x-x_0\right)\;dx=1$, получим

$$\frac{dC_n(x)}{dx}\Big|_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} + \left(k^2 - \lambda_n^2\right) \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} C_n(x) dx = -\frac{2}{d(1+\delta_{0n})} \cos \lambda_n y_0, \tag{15}$$

где
$$\frac{dC_n(x)}{dx} = c_n \begin{cases} i\xi_n e^{i\xi_n(x-x_0)}, & x \geqslant x_0 \\ -i\xi_n e^{-i\xi_n(x-x_0)}, & x \leqslant x_0 \end{cases}$$

где $\frac{dC_n\left(x\right)}{dx}=c_n\left\{ egin{array}{l} i\xi_ne^{i\xi_n\left(x-x_0\right)}, & x\geqslant x_0 \\ -i\xi_ne^{-i\xi_n\left(x-x_0\right)}, & x\leqslant x_0 \end{array} \right.$ Перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$. Так как функция $C_n\left(x\right)$ непрерывна в точке $x=x_0$, то второе слагаемое в уравнении (15) обращается в нуль при $\varepsilon \to 0$. Производная $\frac{dC_n(x)}{dx}$ в точке $x=x_0$ имеет разрыв первого рода, равный по величине $2i\,\xi_n\,c_n$. В результате находим

$$c_n = \frac{i}{\xi_n d(1 + \delta_{0n})} \cos \lambda_n y_0.$$

Таким образом, искомая функции Грина имеет вид

$$G(x, y|x_0, y_0) = \frac{i}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + \delta_{0n}) \xi_n} \cos \lambda_n y \cos \lambda_n y_0 e^{i\xi_n|x - x_0|}.$$
 (16)

Когда $\lambda_n > k, \, \xi_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n^2}$ становится чисто мнимым. В этом случае для выполнения условий излучения (12) необходимо, чтобы Im $\xi_n > 0$, то есть $\xi_n = i\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}$.

Запишем поле источников (8) в полярной системе координат, связанной с цилиндром. Воспользуемся представлением $\cos \lambda_n y = (e^{i\lambda_n y} + e^{-i\lambda_n y})/2$ и учтем, что введенные прямоугольные и цилиндрические координаты связаны между собой соотношениями

$$x = X_0 + r\cos\varphi$$
, $y = Y_0 + r\sin\varphi$, $z = z$.

Так как
$$\frac{\xi_n^2}{k^2} + \frac{\lambda_n^2}{k^2} = 1$$
, то положим $\frac{\xi_n}{k} = \cos \psi$ и $\frac{\lambda_n}{k} = \sin \psi$. Тогда

$$\xi_n x \pm \lambda_n y = \xi_n X_0 \pm \lambda_n Y_0 + kr \cos(\varphi \mp \psi).$$

Используя формулу [13]

$$e^{ikr\cos\phi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(kr) e^{im\phi},$$

получаем

$$p_0(r,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m J_m(kr) e^{im\varphi}, \qquad (17)$$

где $J_m(x)$ — цилиндрическая функция Бесселя порядка n,

$$a_m = i^m \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i\xi_n X_0} \cos(\lambda_n Y_0 - m\psi), \quad \psi = \arcsin \frac{\lambda_n}{k}.$$

Теперь запишем функцию Грина (16) в полярной системе координат. Для этого выразим через экспоненты $\cos \lambda_n y_0$ и проделаем преобразования, аналогичные приведенным выше. Получим

$$G(r,\varphi|r_0,\varphi_0) = \frac{i}{2d} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\delta_{0n})\xi_n} e^{\pm i\xi_n(X_0+r\cos\varphi)} \cos[\lambda_n(Y_0+r\sin\varphi)] e^{\mp i\xi_nX_0} \times \left[e^{i\lambda_n Y_0 \mp ikr_1\cos(\varphi_0 \pm \psi)} + e^{-i\lambda_n Y_0 \mp ikr_1\cos(\varphi_0 \mp \psi)} \right].$$

$$(18)$$

Здесь верхний знак соответствует случаю $x > x_0$, а нижний — $x < x_0$.

Обозначая $\nu\left(x_{0},y_{0}\right)=r_{1}\nu_{1}\left(x_{0},y_{0}\right)$ и переходя от декартовых координат $x,\ y$ к полярным $r,\ \varphi$, выражение (9) представим в виде

$$p_s(r,\varphi) = \int_0^{2\pi} \nu(\varphi_0) G(r,\varphi|r_1,\varphi_0) d\varphi_0.$$
 (19)

При этом функция плотности распределения источников ν на внешней поверхности покрытия цилиндра зависит только от одной угловой координаты, так как на этой поверхности радиальная координата постоянна и равна r_1 .

Функция $p_s(r,\varphi)$, определяемая формулой (19), удовлетворяет уравнению Гельмгольца (1), краевым условиям (3) и условиям излучения на бесконечности (6). Таким образом, задача определения рассеянного поля p_s сводится к нахождению функция плотности распределения источников $\nu(\varphi_0)$, обеспечивающей выполнение граничных условий (4).

Функцию плотности распределения источников будем искать в виде разложения в ряд Фурье

$$\nu\left(\varphi\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{im\varphi},\tag{20}$$

где коэффициенты b_m подлежат определению.

Соотношения между компонентами тензора напряжений и вектора смещения в неоднородном покрытии записываются следующим образом [12]:

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \left(\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} + u_r \right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\lambda + 2\mu}{r} \left(\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} + u_r \right) + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r},$$

$$\sigma_{r\varphi} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{\varphi}}{r} \right),$$
(21)

где $\lambda = \lambda(r), \quad \mu = \mu(r).$

Используя соотношения (21), запишем уравнения (2) через компоненты вектора смещения u:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^{2} u_{r}}{\partial r^{2}} + \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial^{2} u_{\varphi}}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\mu}{r^{2}} \frac{\partial^{2} u_{r}}{\partial \varphi^{2}} + \left(\lambda' + 2\mu' + \frac{\lambda + 2\mu}{r}\right) \frac{\partial u_{r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\lambda' - \frac{\lambda + 3\mu}{r}\right) \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} + \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{\lambda + 2\mu}{r^{2}} + \omega^{2} \rho\right) u_{r} = 0,$$

$$\mu \frac{\partial^{2} u_{\varphi}}{\partial r^{2}} + \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial^{2} u_{r}}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\lambda + 2\mu}{r^{2}} \frac{\partial^{2} u_{\varphi}}{\partial \varphi^{2}} + \left(\mu' + \frac{\mu}{r}\right) \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\mu' + \frac{\lambda + 3\mu}{r}\right) \frac{\partial u_{r}}{\partial \varphi} + \left(-\frac{\mu'}{r} - \frac{\mu}{r^{2}} + \omega^{2} \rho\right) u_{\varphi} = 0,$$

$$(22)$$

где штрих означает дифференцирование по r.

Компоненты вектора смещения **u** в упругом слое являются периодическими функциями координаты φ с периодом 2π . Поэтому функции $u_r(r,\varphi)$ и $u_{\varphi}(r,\varphi)$ будем искать в виде рядов Фурье

$$u_r(r,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{1m}(r)e^{im\varphi}; \quad u_{\varphi}(r,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{2m}(r)e^{im\varphi}.$$
 (23)

Подставляя выражения (23) в уравнения (22), получим следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $u_{1m}(r)$ и $u_{2m}(r)$ для каждого m:

$$\tilde{A}_m U_m'' + \tilde{B}_m U_m' + \tilde{C}_m U_m = 0, \tag{24}$$

где $U_m=(u_{1m},u_{2m})^T;\, \tilde{A}_m, \tilde{B}_m, \tilde{C}_m$ — матрицы второго порядка

$$\tilde{A}_m = r^2 \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}; \quad \tilde{B}_m = \begin{pmatrix} (\lambda' + 2\mu')r^2 + (\lambda + 2\mu)r & im(\lambda + \mu)r \\ im(\lambda + \mu)r & \mu'r^2 + \mu r \end{pmatrix};$$

$$\tilde{C}_m = \begin{pmatrix} \lambda' r - \lambda - (2+m^2)\mu + \omega^2 \rho r^2 & im(\lambda' r - \lambda - 3\mu) \\ im(\mu' r + \lambda + 3\mu) & -\mu' r - m^2 \lambda - (2m^2 + 1)\mu + \omega^2 \rho r^2 \end{pmatrix}.$$

Задача состоит в нахождении функций $u_{1m}(r)$ и $u_{2m}(r)$, обеспечивающих выполнение граничных условий (4) и (5).

Коэффициенты b_m и еще два краевых условия для нахождения частного решения системы (24) подлежат определению из трех граничных условий (4).

Воспользуемся первым их граничных условий (4). Будем учитывать, что нормальная производная от потенциала простого слоя на поверхности тела имеет разрыв первого рода, равный по величине $\pi\nu$ [14]. Тогда на внешней границе покрытия

$$\frac{\partial p_s(r,\varphi)}{\partial r}\bigg|_{r=r_1} = \pi\nu(\varphi) + \int_0^{2\pi} \nu(\varphi_0) M(\varphi,\varphi_0) d\varphi_0, \tag{25}$$

где $M\left(\varphi,\varphi_{0}\right)=\left.\frac{\partial}{\partial r}G\left(r,\varphi|r_{1},\varphi_{0}\right)\right|_{r=r_{1}}$ (точка (r_{1},φ) лежит на поверхности рассеивателя).

Интеграл в (25) следует понимать в смысле главного значения.

Таким образом, подставляя разложения (20) и (23) в первое условие (4) и учитывая (25), получаем бесконечную линейную систему уравнений относительно коэффициентов b_m , зависящих от $u_{1m}(r_1)$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta_{mn} + \alpha_{mn}) b_n = f_m^{(0)} + f_m^{(1)} u_{1m} (r_1) \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$
 (26),

где

$$\alpha_{mn} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M(\varphi, \varphi_0) e^{in\varphi_0} e^{-im\varphi} d\varphi_0 d\varphi,$$
$$f_m^{(0)} = -\frac{1}{\pi} a_m k J_m'(k r_1), \quad f_m^{(1)} = \frac{1}{\pi} \omega^2 \rho_1.$$

Из второго условия (4) получаем еще одну бесконечную систему уравнений

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_{mn} b_n = g_m^{(0)} + g_m^{(1)} u_{1m} (r_1) + g_m^{(2)} u_{2m} (r_1) + g_m^{(3)} u'_{1m} (r_1)$$
(27)

$$(m=0, \pm 1, \pm 2, ...),$$

где

$$\beta_{mn} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2\pi} K(\varphi, \varphi_0) e^{in\varphi_0} e^{-im\varphi} d\varphi_0 d\varphi, \quad K(\varphi, \varphi_0) = G(r, \varphi|r_1, \varphi_0)|_{r=r_1},$$

$$g_m^{(0)} = -a_m J_m(k r_1), \quad g_m^{(1)} = -\frac{\lambda(r_1)}{r_1}, \quad g_m^{(2)} = -\frac{im\lambda(r_1)}{r_1},$$

$$g_m^{(3)} = -[\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)].$$

Из последнего граничного условия (4) получаем соотношение

$$\frac{im}{r_1}u_{1m}(r_1) + u'_{2m}(r_1) - \frac{1}{r_1}u_{2m}(r_1) = 0 \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$
(28)

Из граничных условий (5) находим

$$r = r_0: u_{1m} = 0, u_{2m} = 0.$$
 (29)

Проведем усечение систем (26) и (27), выбрав порядок усечения N. В матричном виде усеченная система (26) будем иметь

$$Q b = f^{(0)} + f^{(1)}u_1,$$

где

$$Q = (\delta_{mn} + \alpha_{mn})_{(2N+1)\times(2N+1)}, \quad b = (b_{-N}, b_{-N+1}, ..., b_0, b_1, ..., b_N)^T,$$

$$f^{(0)} = (f_{-N}^0, f_{-N+1}^0, ..., f_0^0, f_1^0, ..., f_N^0)^T,$$

$$f^{(1)}u_1 = (f_{-N}^{(1)}u_{1,-N}(r_1), f_{-N+1}^{(1)}u_{1,-N+1}(r_1), ..., f_0^{(1)}u_{10}(r_1), ..., f_N^{(1)}u_{1N}(r_1))^T.$$

Методом обратной матрицы находим

$$b = Q^{-1}(f^{(0)} + f^{(1)}u_1)$$

или в координатной форме

$$b_n = \sum_{j=-N}^{N} q_{nj} \left[f_j^{(0)} + f_j^{(1)} u_{1j} (r_1) \right] \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm N),$$
(30)

где q_{nj} — элементы обратной матрицы Q^{-1} .

Подставим (30) в усеченную систему (26). Получим

$$g_{m}^{(1)}u_{1m}(r_{1}) + g_{m}^{(2)}u_{2m}(r_{1}) + g_{m}^{(3)}u_{1m}'(r_{1}) - \sum_{n=-N}^{N} \beta_{mn} \sum_{j=-N}^{N} q_{nj} f_{j}^{(1)}u_{1j}(r_{1}) =$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \beta_{mn} \sum_{j=-N}^{N} q_{nj} f_{j}^{(0)} - g_{m}^{(0)}.$$
(31)

Таким образом, получили четыре краевых условия (27-29), (31) которым должно удовлетворять решение системы дифференциальных уравнений (24).

Построенная краевая задача (24), (27-29), (31) может быть решена каким-либо методом. В результате находим поле смещений в неоднородном покрытии (23). Затем по формуле (30) вычисляем коэффициенты разложения функции плотности распределения источников (20). Аналитическое описание рассеянного акустического поля дается выражением (19).

Подставим (18) и (20) в (19) и воспользуемся формулой [15]

$$J_m(kr)e^{im\psi} = \frac{1}{2\pi i^m} \int_0^{2\pi} e^{i[kr\cos(\psi - \varphi_0) + m\varphi_0]} d\varphi_0.$$

Переходя к декартовой системе координат, получим следующие выражения для рассеянного поля $p_s(x,y)$:

при
$$x \geqslant X_0 + r_1$$

$$p_s(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^r e^{i\xi_n x} \cos \lambda_n y,$$

при
$$x \leq X_0 - r_1$$

$$p_s(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^r e^{-i\xi_n x} \cos \lambda_n y,$$

где

$$A_n^r = \frac{2\pi i}{d(1+\delta_{0n})\xi_n} e^{-i\xi_n X_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m b_m J_m(kr_1) \cos(\lambda_n Y_0 - m\psi),$$

$$A_n^l = \frac{2\pi i}{d(1+\delta_{0n})\xi_n} e^{i\xi_n X_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m b_m J_m(kr_1) \cos(\lambda_n Y_0 + m\psi).$$

4. Заключение

В настоящей работе получено аналитическое решение задачи рассеяния звуковых волн акустически жестким цилиндром с непрерывно-неоднородным упругим покрытием, находящимся в плоском волноводе с идеальными стенками. Подобный подход может быть использован при решении задач дифракции звуковых волн на абсолютно жестком и упругом цилиндрах с непрерывно-неоднородными и дискретно-неоднородными покрытиями в плоском волноводе с импедансными границами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Hackman R. H., Sammelman G. S. Acoustic scattering in an inhomogeneous waveguide: Theory // J. Acoust. Soc. Amer. 1986. V. 80, No. 5. P. 1447–1458.
- 2. Hackman R. H., Sammelman G. S. Multiple-scattering analysis for a target in oceanic waveguide // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. V. 84, No. 5. P. 1813–1825.
- 3. Кузькин В. М. Рассеяние звуковых волн на теле в плоскослоистом волноводе // Акустический журн. 2003. Т. 49, № 1. С. 77–84.
- 4. Шарфарец Б. П. Метод расчета поля излучателя и поля рассеяния неоднородного включения в плоскослоистых волноводах // Акустический журн. 2004. Т. 50, № 1. С. 123–128.
- Белов В. Е., Горский С. М., Зиновьев А. Ю., Хилько А. И. Применение метода интегральных уравнений к задаче о дифракции акустических волн на упругих телах в слое жидкости // Акустический журн. 1994. Т. 40, № 4. С. 548–560.
- Андрианова Т. А., Белов В. Е., Залезский А. А., Шаронов Г. А. Исследование модового состава и пространственного распределения акустического поля при различной локализации неоднородностей в слое жидкости // Акустический журн. 1996. Т. 42, № 4. С. 465–477.
- 7. Белов В. Е., Горский С. М., Залезский А. А., Зиновьев А. Ю., Хилько А. И. Рассеяние акустических волн упругими цилиндрами в многомодовых слоистых волноводах. // Формирование акустических полей в океанических волноводах. Реконструкция неоднородностей. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1994. С. 63–88.
- 8. Belov V. E., Gorsky S. M., Zalezsky A. A., Zinovyev A. Yu. Application of the integral equation method to acoustic wave diffraction from elastic bodies in a fluid layer // J. Acoust. Soc. Amer. 1994. Vol. 103, No 3. P. 1288–1295.
- 9. Романов А.Г., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75, № 5. С. 850–857.
- 10. Толоконников Л. А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265–274.
- 11. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
- 12. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- 13. Скучик Е. Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976. 544 с.
- 14. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
- 15. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.

REFERENCES

- 1. Hackman, R. H. & Sammelman, G. S. 1986, "Acoustic scattering in an inhomogeneous waveguide: Theory", J. Acoust. Soc. Amer., vol. 80, no. 5, pp. 1447–1458.
- 2. Hackman R. H. & Sammelman G. S. 1988, "Multiple-scattering analysis for a target in oceanic waveguide", J. Acoust. Soc. Amer., vol. 84, no. 5, pp. 1813–1825.

- 3. Kuz'kin, V. M. 2003, "Sound scattering by a body in a planar layered waveguide", *Acoustical Physics*, vol. 49, no 1, pp. 68–74.
- 4. Sharfarets, B.P. 2004, "Method for calculating the field of an opaque source and the field scattered by an inhomogeneous inclusion in a planar layered waveguide", *Acoustical Physics*, vol. 50, no 1, pp. 107-–111.
- 5. Belov, V. E., Gorskij, S. M., Zinov'ev, A. Y. & Khil'ko, A. I. 1994, "Application of the method of integral equations to diffraction of acoustic waves at elastic bodies in a layer of liquid", *Acoustical Physics*, vol. 40, no 4, pp. 548–560.
- Andrianova, T.A., Belov, V.E., Zalezsky, A.A. & Sharonov, G.A. 1996, "An analysis of the mode composition and spatial distribution of acobstic fields for different localizations of inhomogeneities in an liquid layer", Acoustical Physics, vol. 42, no 4, pp. 407–419.
- 7. Belov, V. E., Gorskij, S. M., Zalezsky, A. A., Zinov'ev, A. Y. & Khil'ko, A. I. 1994, "Scattering of acoustic waves by elastic cylinders in multimode layered waveguides", in "Formation of acoustic fields in oceanic waveguides. Reconstruction of inhomogeneities", Inst. Prikladnoj Fiziki RAN, Nizhnij Novgorod, pp. 63–88 [in Russian].
- 8. Belov, V. E., Gorsky, S. M., Zalezsky, A. A. & Zinovyev, A. Yu. 1994, "Application of the integral equation method to acoustic wave diffraction from elastic bodies in a fluid layer" *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 103, no 3, pp. 1288–1295.
- 9. Romanov, A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2011, "The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating", J. Appl. Math. Mech., vol. 75, no. 5, pp. 595–600.
- 10. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265–274 [in Russian].
- 11. Shenderov, E.L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", Sudostroenie, Leningrad, 352 p. [in Russian].
- 12. Nowacki, W. 1975, "Teoria sprezystosci", Mir, Moscow, 872 p. [in Russian].
- 13. Skudrzyk, E. 1976, "The Foundations of Acoustics", vol. 2, Mir, Moscow, 544 p. [in Russian].
- 14. Tikhonov, A. N & Samarskiy, A. A. 1972, "Equations of Mathematical Physics", Nauka, Moscow, 736 p. [in Russian].
- 15. Ivanov, E. A. 1968, "Diffraction of electromagnetic waves by two bodies", Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p. [in Russian].

Получено 25.01.2019 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.