CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 511.6 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-246-258

The criterion of periodicity of continued fractions of key elements in hyperelliptic fields [2]

V. P. Platonov, G. V. Fedorov

Platonov Vladimir Petrovich — Federal State Institution «Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences» (SRISA); Steklov Mathematical Institute (MIAN), Moscow.

e-mail: platonov@niisi.ras.ru

Fedorov Gleb Vladimirovich — candidate of physical and mathematical sciences, Federal State Institution «Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences» (SRISA); Moscow State University (MSU), Moscow.

e-mail: fedorov@mech.math.msu.su

Abstract

The periodicity and quasi-periodicity of functional continued fractions in the hyperelliptic field $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$ has a more complex nature, than the periodicity of the numerical continued fractions of the elements of a quadratic fields. It is known that the periodicity of a continued fraction of the element $\sqrt{f}/h^{g+1}$, constructed by valuation associated with a polynomial h of first degree, is equivalent to the existence of nontrivial S-units in a field L of the genus g and is equivalent to the existence nontrivial torsion in a group of classes of divisors. This article has found an exact interval of values of $s \in \mathbb{Z}$ such that the elements $\sqrt{f}/h^s$ have a periodic decomposition into a continued fraction, where $f \in \mathbb{Q}[x]$ is a squarefree polynomial of even degree. For polynomials f of odd degree, the problem of periodicity of continued fractions of elements of the form $\sqrt{f}/h^s$ are discussed in the article [5], and it is proved that the length of the quasi-period does not exceed degree of the fundamental S-unit of L. The problem of periodicity of continued fractions of elements of the form $\sqrt{f}/h^s$ for polynomials f of even degree is more complicated. This is underlined by the example we found of a polynomial f of degree 4, for which the corresponding continued fractions have an abnormally large period length. Earlier in the article [5] we found examples of continued fractions of elements of the hyperelliptic field L with a quasi-period length significantly exceeding the degree of the fundamental S-unit of L.

Keywords: continued fractions, fundamental units, S-units, torsion in the Jacobians, hyperelliptic fields, divisors, divisor class group.

Bibliography: 16 – titles.

For citation:

V. P. Platonov, G. V. Fedorov, 2019, "The criterion of periodicity of continued fractions of key elements in hyperelliptic fields", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 246–258.

[2]The publication was performed within the framework of the state assignment of SRISA (14 GP implementation of fundamental research) on the subject № 0065-2019-0011 (№AAAA-A19-119011590095-7).

1. Введение

Пусть $F(X) \in K[X]$ — свободный от квадратов многочлен над полем K характеристики отличной от 2. В классическом случае рассматривается гиперэллиптическое поле $\mathcal{L} = K(X)(\sqrt{F})$, где у многочлена F степени $2g+2$, $g \geqslant 1$, старший коэффициент является полным квадратом в мультипликативной группе K^* поля K. Критерий периодичности непрерывной дроби $\sqrt{F}$, построенной в поле $K((X^{-1}))$, был известен еще Абелю [1] и Чебышеву [2], современные результаты наиболее полно изложены в [3]. В частности, из этих результатов следует, что в поле $\mathcal{L}$ элемент $\sqrt{F}$ и его разложение в непрерывную дробь играет ключевую роль в вопросах связанных с поиском фундаментальных единиц и рациональных точек кручения в якобиане гиперэллиптической кривой, заданной уравнением $Y^2 = F(X)$.

В отличие от числовых непрерывных дробей, в функциональном случае непрерывная дробь может быть квазипериодической — периодической с точностью до константы из K^*. Для непрерывной дроби элемента $\sqrt{F}$ справедливо утверждение: если длина квазипериода конечна, то длина периода либо равна длине квазипериода, либо равна удвоенной длине квазипериода.

В статье [4] дана оценка сверху на длину квазипериода t непрерывной дроби элемента специального вида $\beta = (B+\sqrt{F})/A \in \mathcal{L}$, где $A, B \in K[X]$, $A \mid F - B^2$, согласно которой $t \leqslant m - p + 1$, где m — порядок класса дивизора $(\infty^- - \infty^+)$ в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$, p — порядок полюса элемента β в ∞^+.

В данной статье мы покажем, что в поле $\mathcal{L}$ могут существовать элементы, имеющие периодическую непрерывную дробь с длиной квазипериода существенно больше, чем порядок класса дивизора $(\infty^- - \infty^+)$ в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$. Частные примеры непрерывных дробей, построенных по конечному нормированию, для которых длина квазипериода существенно больше степени соответствующего дивизора кручения, были приведены в статье [5] (см. примеры 1-4).

Пусть α является корнем многочлена

$$H(X) = \lambda_2 X^2 + 2\lambda_1 X + \lambda_0, \quad \text{где } \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in K[x], \quad (\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2) \in K^*. \tag{1}$$

Величину $d = \lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_0$ будем называть сокращенным дискриминантом многочлена (1) или просто *дискриминантом*. Положим f — свободная от квадратов часть многочлена d, т. е. $d = \omega^2 f$, $f, \omega \in K[x]$ и $\alpha \in L = K(x)(\sqrt{f})$.

Пусть $h \in K[x], \deg h = 1$, и нормирование v_h поля $K(x)$ имеет два продолжения v_h^- и v_h^+ на поле $L = K(x)(\sqrt{f})$. Поле L может быть вложено в поле формальных степенных рядов $K((h))$ двумя способами. Мы фиксируем одно из вложений, соответствующее нормированию v_h^-. Тогда любой элемент поля L имеет единственное разложение в непрерывную дробь в $K((h))$ (см. [5], [6]). Положим $S_h = \{v_h^-, v_h^+\}$. Пусть $\alpha = [a_0; a_1, \ldots]$ — разложение α в непрерывную дробь, соответствующее нормированию v_h^-. Положим $r = \max(\deg\lambda_0,\ \deg\lambda_1,\ \deg\lambda_2)$.

В теореме 1 статьи [5] доказан общий критерий квазипериодичности непрерывных дробей в поле формальных степенных рядов $K((h))$ для элементов поля L. Согласно этому критерию следующие условия эквивалентны:

1. непрерывная дробь α в поле $K((h))$ квазипериодическая;

2. в поле L существует нетривиальная S_h-единица вида $u = h^{-m}(\omega_1 + \omega_2\sqrt{d})$, где $S_h = \{v_h^-,\ v_h^+\}$, $\omega_1, \omega_2 \in K[h]$, $v_h(\omega_2) = 0$, $\deg\omega_1 - \deg\omega_2 \geqslant r$;

3. уравнение
$$\omega_1^2 - d\omega_2^2 = bh^{2m} \tag{2}$$
имеет решение $\omega_1, \omega_2 \in K[h]$ такое, что $v_h(\omega_2) = 0, \deg\omega_1 - \deg\omega_2 \geqslant r, b \in K^*, \deg\omega_1 = m$.

В статьях [5]-[15] отмечалось, что элементы вида $\sqrt{f}/h^s$ для различных $s \in \mathbb{Z}$ играют особую роль для поиска фундаментальных S_h-единиц и изучения их свойств в гиперэллиптическом поле $L = K(h)(\sqrt{f})$. В статье [11] доказано, что каждая квазипериодическая непрерывная дробь элемента вида $\sqrt{f}/h^s$, $s \in \mathbb{Z}$, является периодической, а в статье [13] показано, что из периодичности непрерывной дроби элемента $\sqrt{f}/h^s$ следует периодичность непрерывной дроби $\sqrt{f}/h^{k-s}$, где $k = \deg f$.

В теореме 2 статьи [5] для некоторого фиксированного $s \in \mathbb{Z}$ найдены достаточные условия одновременной квазипериодичности непрерывных дробей элементов α, $\alpha \cdot h^s \in L \setminus K(x)$. Для гиперэллиптических полей $L = K(x)(\sqrt{f})$, построенных с помощью свободных от квадратов многочленов $f \in K[x]$ нечетной степени $2g+1$ найденные достаточные условия также являются необходимыми. В случае $\deg f = 2g+2$ указанные теореме 2 статьи [5] достаточные условия не являются необходимыми, что подтверждается примерами 1-3 [5]. Одним из наглядных эффектов случая, когда для элементов α и $\alpha \cdot h^s$ достаточные условия не являются необходимыми, является значительное отличие длин квазипериодов и периодов непрерывных дробей элементов α и $\alpha \cdot h^s$. Так, в примере 4 статьи [5] найден свободный от квадратов многочлен $f \in \mathbb{Q}[h]$ степени 6, для которого длина периода непрерывной дроби элемента $\alpha = \sqrt{f}/h^3$ равна 2, а длина периода непрерывной дроби элемента $\alpha \cdot h^3 = \sqrt{f}$ равна 18 при том, что поле $L = \mathbb{Q}(h)(\sqrt{f})$ обладает фундаментальной S_h-единицей степени 4, где $S_h = \{v_h^-, v_h^+\}$.

Целью данной статьи является уточнение теоремы 2 статьи [5]. А именно, в теореме 2 данной статьи мы находим необходимые условия одновременной квазипериодичности непрерывных дробей элементов $\alpha, \alpha \cdot h^s \in L \setminus \mathbb{Q}(x)$ для гиперэллиптических полей $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$, $\deg f = 2g+2$. Также мы приводим интересный пример эллиптичекого поля $\mathbb{Q}(X)(\sqrt{F})$, $\deg F = 4$, для котогоро длина квазипериода непрерывной дроби элемента $\sqrt{F}$ равна 3, длина квазипериода непрерывной дроби элемента $\sqrt{F}/X$ равна 20, длина квазипериода непрерывной дроби элемента $\sqrt{F}/X^2$ равна 19, а длина периода — 38. Элементы $\sqrt{F}/X$ и $\sqrt{F}/X^2$ имеют аномально большую длину квазипериода по сравнению с порядком $m = 4$ класса дивизора $(\infty^- - \infty^+)$ в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$.

Символом $\mathrm{lc}\,(R)$ обозначим старший коэффициент для многочлена R, а символом $\mathrm{tc}\,(R)$ — свободный член многочлена R.

2. Вспомогательные утверждения

Следующая лемма была доказана в [5].

Лемма 1. *Пусть $Q, F \in K[X]$, многочлен Q неприводим в $K[X]$, $v_Q(F) > 0$, и поле $\mathcal{L} = K(X)(\sqrt{F})$ обладает фундаментальной единицей $\Psi_1 + \Psi_2\sqrt{F}$, где $\Psi_1, \Psi_2 \in K[X]$. Тогда для любой нетривиальной единицы $\Omega_1 + \Omega_2\sqrt{F}$ поля $\mathcal{L}$, где $\Omega_1, \Omega_2 \in K[X]$, справедливы соотношения $v_Q(\Omega_1) = v_Q(\Psi_1) = 0$ и $v_Q(\Omega_2) = v_Q(\Psi_2)$.*

Идея доказательства заключается в том, что без ограничения общности можно считать, что для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $c \in K^*$ справедливы тождества

$$\Omega_1 + \Omega_2\sqrt{F} = c(\Psi_1 + \Psi_2\sqrt{F})^n = \tag{3}$$
$$= c\left(\sum_{0\leqslant j\leqslant n/2}\binom{n}{2j}\Psi_1^{n-2j}\Psi_2^{2j}F^j\right) + c\left(\sum_{0\leqslant j<n/2}\binom{n}{2j+1}\Psi_1^{n-2j-1}\Psi_2^{2j+1}F^j\right)\sqrt{F}.$$

Остается заметить, что из условия $v_Q(F) > 0$ следует $v_Q(\Psi_1) = 0$.

Следующая теорема уточняет теорему 2 [5] для многочленов f четной степени.

Теорема 1. *Пусть непрерывная дробь элемента $\alpha \in L = K(h)(\sqrt{f})$ квазипериодическая, тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *если $s \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет неравенствам*

$$\deg \lambda_2 - \deg \omega_1 + \deg \omega_2 \leqslant s \leqslant \deg \omega_1 - \deg \omega_2 - \deg \lambda_0, \tag{4}$$

то непрерывные дроби элементов $\alpha \cdot h^s$ и $\overline{\alpha} \cdot h^s$ квазипериодические;

2. *если степень многочлена d нечетная и s не удовлетворяет неравенствам* (4), *то непрерывные дроби элементов $\alpha \cdot h^s$ и $\overline{\alpha} \cdot h^s$ не квазипериодические;*

3. *если степень многочлена d четная и в поле L фундаментальная S_h-единица*

$$u_h = (\mu_1 - \mu_2 \sqrt{f})/h^m$$

такая, что $\deg \mu_1 - \deg \mu_2 - g - 1 \neq 0$, *то для s не удовлетворяющим неравенствам* (4) *непрерывные дроби элементов $\alpha \cdot h^s$ и $\overline{\alpha} \cdot h^s$ не квазипериодические.*

Доказательство. Пункты 1. и 2. были доказаны в теореме 2 [5].

Докажем пункт 3. Обозначим $X = 1/h$, $\Psi_1(X) = \mu_1/h^m$, $\Psi_2(X) = \mu_2/h^{m-g-1}$, $F = f/h^{2g+2}$, и для некоторого $n \in \mathbb{N}$ положим $\Omega_1 + \Omega_2\sqrt{F} = \left(\Psi_1 + \Psi_2\sqrt{F}\right)^n$, $\Omega_1, \Omega_2, \Psi_1, \Psi_2 \in K[X]$. Из доказательства теоремы 2 [5] следует, что $v_X(\Psi_2) = |\deg \mu_1 - \deg \mu_2 - g - 1|$, то есть в нашем случае $v_X(\Psi_2) > 0$. Имеем $v_X(\Psi_1) = v_X(F) = 0$, следовательно, из (3) получаем $v_X(\Omega_1) = 0$, $v_X(\Omega_2) = v_X(\Psi_2)$. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству пункта 2. теоремы 2 [5]. □

В теореме 1 не разобраны случаи, когда

$$\deg \lambda_2 - \deg \omega_1 + \deg \omega_2 = 0 \quad \text{или} \quad \deg \omega_1 - \deg \omega_2 - \deg \lambda_0 = 0.$$

Оказывается, что эти случаи являются наиболее интересными, и имеют свои особенности. Для их рассмотрения над полем $K = \mathbb{Q}$ мы изучим рациональные корни двух последовательностей биномиальных многочленов.

Для $n \in \mathbb{N}$ определим две последовательности многочленов $T_n, Q_n \in \mathbb{Z}[X]$ следующим образом

$$T_n(X) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n/2} \binom{n}{2j} X^j, \quad Q_n(X) = \sum_{0 \leqslant j < n/2} \binom{n}{2j+1} X^j. \tag{5}$$

Тогда $\deg T_n = \left[\frac{n}{2}\right]$, $\deg Q_n = \left[\frac{n-1}{2}\right]$ и справедливо тождество

$$T_n(X^2) + XQ_n(X^2) = (X+1)^n. \tag{6}$$

Выпишем первые несколько многочленов $T_n, Q_n \in \mathbb{Q}[x]$

$$T_1(x) = 1, \quad Q_1(x) = 1, \quad T_2(x) = x + 1, \quad Q_2(x) = 2,$$
$$T_3(x) = 3x + 1, \quad Q_3(x) = x + 3, \quad T_4(x) = x^2 + 6x + 1, \quad Q_4(x) = 4(x+1),$$
$$T_5(x) = 5x^2 + 10x + 1, \quad Q_5(x) = x^2 + 10x + 5, \ \ldots$$

Лемма 2. *Многочлены T_n и Q_n взаимно просты, $(T_n,\ Q_n) \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Заметим, что для любого $z \in \mathbb{C}$ справедливы тождества

$$(1 + \sqrt{z})^n = T_n(z) + \sqrt{z} Q_n(z), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

и, следовательно, для $u = \sqrt{z} \in \mathbb{C}$ имеем

$$(1 + u)^n = T_n(u^2) + uQ_n(u^2), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Если предположить, что $u_0 \in \mathbb{C}$ является общим корнем многочленов $T_n(u^2)$ и $Q_n(u^2)$, то из (8) заключаем, что $u_0 = -1$, но

$$T_n\big((-1)^2\big) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n/2} \binom{n}{2j} > 0, \quad Q_n\big((-1)^2\big) = \sum_{0 \leqslant j < n/2} \binom{n}{2j+1} > 0.$$

□

Лемма 3. *Если число n простое, то многочлены $T_n, Q_n \in \mathbb{Q}[x]$ неприводимы над $\mathbb{Q}$.*

Доказательство. Пусть $n = p$ — простое, тогда $p \mid \binom{p}{j}$ для $1 \leqslant j \leqslant p-1$. Следовательно, по признаку Эйзенштейна многочлены $T_p, Q_p \in \mathbb{Q}[x]$ неприводимы над $\mathbb{Q}$. □

Лемма 4. *Для $n, m \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{Q}$ таких, что $T_n(a) \neq 0$, справедливы тождества*

$$T_{nm}(a) = \big(T_n(a)\big)^m \cdot T_m(b), \quad Q_{nm}(a) = \big(T_n(a)\big)^{m-1} \cdot Q_n(a) \cdot Q_m(b), \tag{9}$$

где $b = a\big(Q_n(a)/T_n(a)\big)^2$. В частности, из условия, что многочлен $T_{nm}(x) \cdot Q_{nm}(x)$ имеет рациональный корень следует, что $T_n(x) \cdot Q_n(x)$ или $T_m(x) \cdot Q_m(x)$ имеет рациональный корень.

Доказательство. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}$ такое, что $T_n(z) \neq 0$, тогда из (7) имеем

$$(1+\sqrt{z})^{mn} = \Big(T_n(z) + \sqrt{z}Q_n(z)\Big)^m = T_n(z)^m \left(1+\sqrt{u}\right)^m =$$

$$= \big(T_n(z)\big)^m \left(T_m(u) + \sqrt{u}Q_m(u)\right) =$$

$$= \big(T_n(z)\big)^m \cdot T_m(u) + \sqrt{z}\big(T_n(z)\big)^{m-1} Q_n(z) Q_m(u), \tag{10}$$

где $u = z\big(Q_n(z)/T_n(z)\big)^2$. □

Лемма 5. *Для $n \in \mathbb{N}$ такого, что $n \not\equiv 0 \pmod 2$ и $n \not\equiv 0 \pmod 3$, многочлены $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ рациональных корней не имеют.*

Доказательство. Будем рассуждать по индукции по количеству простых делителей числа n с учетом их кратностей. База индукции для простых n справедлива. Рассмотрим $n = p \cdot m$, p — простое, $p \neq 2$, $p \neq 3$. Так как $T_p(x)$ и $Q_p(x)$ неприводимы и $\deg T_p \geqslant 2$, $\deg Q_p \geqslant 2$, то по (9) получаем, что множество рациональных корней многочлена $T_{pn}(x) \cdot Q_{pn}(x)$ совпадает с множеством рациональных корней многочлена $T_n(x) \cdot Q_n(x)$, которое пусто по индукционному предположению. □

Лемма 6. *Для $a \in \mathbb{Q}$ и $n \in \mathbb{N}$ таких, что $T_n(a) = 0$, имеем $T_{nm}(a) = 0$ и $Q_{nm}(a) \neq 0$, если $m \in \mathbb{N}$ нечетно, и $T_{nm}(a) \neq 0$ и $Q_{nm}(a) = 0$, если $m \in \mathbb{N}$ четно; если $a \in \mathbb{Q}$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что $Q_n(a) = 0$, то $Q_{nm}(a) = 0$ и $T_{nm}(a) \neq 0$ для любого $m \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Следует из (10). □

Предложение 1. *Рациональные корни многочленов T_n, Q_n, $n \in \mathbb{N}$, описаны в таблице 1.*

Доказательство. Следует из лемм 2-6. □

Таблица 1: Рациональные корни многочленов T_n, Q_n

$n \pmod{12}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
рац. корни T_n			-1	-1/3			-1			-1/3	-1	
рац. корни Q_n	-1/3; -1; -3			-3	-1		-1/3; -3		-1	-3		

3. Основные результаты

Следующая теорема уточняет теорему 1 для элементов вида $h^{-s}\sqrt{f}$.

Теорема 2. *Пусть $f \in \mathbb{Q}[x]$ — свободный от квадратов многочлен, $\deg f = 2g+2$ и $h \in \mathbb{Q}[x]$ — линейный многочлен. Пусть $u_h = h^{-m}(\mu_1 + \mu_2\sqrt{f})$ — фундаментальная S_h-единица в поле $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$. Положим для $n \in \mathbb{N}$*

$$u_h^n = h^{-nm}(\mu_1^{(n)} + \mu_2^{(n)}\sqrt{f}), \quad r_n = \left|\deg \mu_1^{(n)} - \deg \mu_2^{(n)} - g - 1\right|.$$

1. *Если $r_1 \neq 0$, то элементы вида $h^{-s}\sqrt{f}$ имеют периодическое разложение в непрерывную дробь тогда и только тогда, когда $g+1-r_1 \leqslant s \leqslant g+1+r_1$.*
2. *Если $r_1 = 0$, то элементы вида $h^{-s}\sqrt{f}$ имеют периодическое разложение в непрерывную дробь тогда и только тогда, когда $g+1-r_2-r_3 \leqslant s \leqslant g+1+r_2+r_3$.*

Доказательство. Пункт 1 следует из теоремы 1.

Рассмотрим пункт 2, когда $r_1 = 0$. Обозначим

$$X = 1/h,\ \Psi_1(X) = \mu_1/h^m,\ \Psi_2(X) = \mu_2/h^{m-g-1},\ D_0(X) = f/h^{2g+2},$$

тогда в (3) можно считать $c = 1$,

$$\Omega_1(X) = \Omega_1^{(n)}(X) = \mu_1^{(n)}h^{-nm}, \quad \Omega_2(X) = \Omega_2^{(n)}(X) = \mu_2^{(n)}h^{g+1-nm}.$$

Положим $Z = \Psi_2^2 D_0/\Psi_1^2$, тогда

$$\Omega_1 + \Omega_2\sqrt{D_0} = \Psi_1^n\big(T_n(Z) + Q_n(Z)\sqrt{Z}\big).$$

Отметим, что при $n \geqslant 2$ возможно $r_n > 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{tc}\,(\Omega_1) = 0$ или $\mathrm{tc}\,(\Omega_2) = 0$, так как $\mathrm{tc}\,(\Omega_1) = \mathrm{tc}\,(\Omega_2) = 0$ невозможно из-за условия $\Omega_1^2 - \Omega_2^2 D_0 \in \mathbb{Q}^*$. Так как по условию $r_1 = 0$, то $v_X(\Psi_1) = v_X(\Psi_2) = v_X(D_0) = 0$, и может быть корректно вычислен предел $Z_0 = \lim_{X\to 0} Z \in \mathbb{Q}$. Пусть многочлены T_n и Q_n определены как в (5). Тогда в силу (3) возможно $\mathrm{tc}\,(\Omega_1) = 0$, если и только если $T_n(Z_0) = 0$, и, аналогично, $\mathrm{tc}\,(\Omega_2) = 0$, если и только если $Q_n(Z_0) = 0$. Из предложения 1, дающего полное описание всех рациональных корней многочленов T_n и Q_n, в частности следует, что если $r_n = 0$ при $n \leqslant 3$, то $r_n = 0$ при $n \geqslant 4$. Дальше нам остается проверить, сколько младших коэффициентов многочленов Ω_1 и Ω_2 могут обнулиться в каждом из случаев, соответствующих различным корням Z_0 многочленов T_n, Q_n, описанных в предложении 1.

Пусть

$$\Psi_1(X) \equiv \Psi_{1,0} + \Psi_{1,1}X \pmod{X^2},$$
$$\Psi_2(X) \equiv \Psi_{2,0} + \Psi_{2,1}X \pmod{X^2},$$
$$D_0(X) \equiv D_{0,0} + D_{0,1}X \pmod{X^2},$$

причем $\Psi_{1,0} \neq 0$, $\Psi_{2,0} \neq 0$ и $D_{0,0} \neq 0$.

Предположим, что $r_2 > 0$. По предложению 1 выполнено неравенство $r_2 > 0$ только, если $\operatorname{tc}\left(\Omega_1^{(2)}\right) = 0$. Последнее условие равносильно $\lim_{X\to 0} T_2(Z) = T_2(Z_0) = 0$, что возможно только при $Z_0 = -1$. По определению величины Z, условие $Z_0 = -1$ равносильно условию $\Psi_{1,0}^2 + \Psi_{2,0}^2 D_{0,0} = 0$. Также по предложению 1 ясно, что при $r_2 > 0$ справедливы соотношения $v_X\left(\Omega_1^{(n)}\right) = 0$ при $n \not\equiv 2 \pmod 4$, и $v_X\left(\Omega_2^{(n)}\right) = 0$ при $n \not\equiv 0 \pmod 4$. Покажем, что для $k \in \mathbb{N}$ выполнены равенства $v_X\left(\Omega_1^{(4k+2)}\right) = v_X\left(\Omega_1^{(2)}\right) = v_X\left(\Omega_2^{(4k)}\right) = r_2$.

Для начала рассмотрим $\Omega_1^{(2)}(X) \equiv \Omega_{1,0}^{(2)} + \Omega_{1,1}^{(2)} X \pmod{X^2}$, где

$$\Omega_{1,0}^{(2)} = \Psi_{1,0}^2 + \Psi_{2,0}^2 D_{0,0} = 0,$$
$$\Omega_{1,1}^{(2)} = 2\Psi_{1,0}\Psi_{1,1} + 2\Psi_{2,0}\Psi_{2,1}D_{0,0} + \Psi_{2,0}^2 D_{0,1}.$$

По формулам (10) имеем

$$\Omega_1^{(4k+2)} = \Psi_1^{4k+2} T_{4k+2}\left(\frac{\Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2}\right) =$$
$$= \left(\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0\right) \cdot T_{2k+1}\left(\frac{4\Psi_1\Psi_2^2 D_0}{\left(\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0\right)^2}\right)\left(\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0\right)^{2k} \equiv$$
$$\equiv \Omega_{1,1}^{(2)} \cdot \left(4\Psi_{1,0}\Psi_{2,0}^2 D_{0,0}\right)^k \cdot X \pmod{X^2}.$$

Таким образом, $\Omega_{1,1}^{(4k+2)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{1,1}^{(2)} = 0$. Далее, рассуждая аналогично, при условии, что $\Omega_{1,0}^{(2)} = \Omega_{1,1}^{(2)} = \ldots = \Omega_{1,n-1}^{(2)} = 0$, по индукции имеем

$$\Omega_1^{(4k+2)} \equiv \Omega_{1,n}^{(2)} \cdot \left(4\Psi_{1,0}\Psi_{2,0}^2 D_{0,0}\right)^k \cdot X^n \pmod{X^{n+1}},$$

т. е. $\Omega_{1,n}^{(4k+2)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{1,n}^{(2)} = 0$, что означает $v_X\left(\Omega_1^{(4k+2)}\right) = v_X\left(\Omega_1^{(2)}\right)$.

Аналогично, по формулам (10) получаем

$$\Omega_2^{(4k)} = \Psi_1^{4k-2} Q_{4k}\left(\frac{\Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2}\right) =$$
$$= \left(\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0\right) \cdot Q_{2k}\left(\frac{4\Psi_1\Psi_2^2 D_0}{\left(\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0\right)^2}\right)\left(\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0\right)^{2(k-1)} \equiv$$
$$\equiv \operatorname{lc}(Q_{2k}) \cdot \Omega_{1,1}^{(2)} \cdot \left(4\Psi_{1,0}\Psi_{2,0}^2 D_{0,0}\right)^{k-1} \cdot X \pmod{X^2}.$$

Следовательно, $\Omega_{2,1}^{(4k)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{1,1}^{(2)} = 0$. Далее, по индукции получаем $\Omega_{1,n}^{(4k+2)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{1,n}^{(2)} = 0$, что означает $v_X\left(\Omega_2^{(4k)}\right) = v_X\left(\Omega_1^{(2)}\right)$.

Предположим, что $r_3 > 0$. В этом случае $r_1 = r_2 = 0$. По предложению 1 неравенство $r_3 > 0$ может быть выполнено только, если $\operatorname{tc}\left(\Omega_1^{(3)}\right) = 0$ или $\operatorname{tc}\left(\Omega_2^{(3)}\right) = 0$.

Первым рассмотрим условие $\operatorname{tc}\left(\Omega_1^{(3)}\right) = 0$, которое равносильно

$$\lim_{X\to 0} T_3(Z) = T_3(Z_0) = 0,$$

что возможно только при $Z_0 = -1/3$. По определению величины Z, условие $Z_0 = -1/3$ равносильно условию $\Psi_{1,0}^2 + 3\Psi_{2,0}^2 D_{0,0} = 0$. Также по предложению 1 ясно, что в этом случае справедливы соотношения $v_X\left(\Omega_1^{(n)}\right) = 0$ при $n \not\equiv 3 \pmod 6$, и $v_X\left(\Omega_2^{(n)}\right) = 0$ при $n \not\equiv 0 \pmod 6$. Покажем, что для $k \in \mathbb{N}$ выполнены равенства $v_X\left(\Omega_1^{(6k+3)}\right) = v_X\left(\Omega_1^{(3)}\right) = v_X\left(\Omega_2^{(6k)}\right) = r_3$.

Для начала рассмотрим $\Omega_1^{(3)}(X) \equiv \Omega_{1,0}^{(3)} + \Omega_{1,1}^{(3)} X \pmod{X^2}$, где

$$\Omega_{1,0}^{(3)} = \Psi_{1,0}(\Psi_{1,0}^2 + 3\Psi_{2,0}^2 D_{0,0}) = 0,$$

$$\Omega_{1,1}^{(3)} = 3(2D_{0,0}\Psi_{1,0}\Psi_{2,0}\Psi_{2,1} + D_{0,0}\Psi_{1,1}\Psi_{2,0}^2 + D_{0,1}\Psi_{1,0}\Psi_{2,0}^2 + \Psi_{1,0}^2\Psi_{1,1}).$$

По формулам (10) имеем

$$\Omega_1^{(6k+3)} = \Psi_1^{6k+3} T_{6k+3}\left(\frac{\Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2}\right) =$$

$$= \Psi_1^{2k+1}\big(\Psi_1^2 + 3\Psi_2^2 D_0\big) \cdot T_{2k+1}\left(\frac{\Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2}\left(\frac{3\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2 + 3\Psi_2^2 D_0}\right)^2\right)\big(\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0\big)^{2k} \equiv$$

$$\equiv \Psi_{1,0}\Omega_{1,1}^{(3)} \cdot \big(\Psi_{2,0}^2 D_{0,0}\big)^k \cdot \big(\Omega_{2,0}^{(3)}\big)^{2k} \cdot X \pmod{X^2},$$

где $\Omega_{2,0}^{(3)} = 3\Psi_{1,0}^2 + \Psi_{2,0}^2 D_{0,0} \neq 0$. Таким образом, $\Omega_{1,1}^{(6k+3)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{1,1}^{(3)} = 0$. Далее, по индукции получаем $\Omega_{1,n}^{(6k+3)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{1,n}^{(3)} = 0$, что означает $v_X\left(\Omega_1^{(6k+3)}\right) = v_X\left(\Omega_1^{(3)}\right)$.

Аналогично, по формулам (10) получаем

$$\Omega_2^{(6k)} = \Psi_1^{6k-2} Q_{6k}\left(\frac{\Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2}\right) =$$

$$= \Psi_1^{6k+1}\big(\Psi_1^2 + 3\Psi_2^2 D_0\big)\big(3\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0\big) Q_{2k}\left(\frac{\Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2}\left(\frac{3\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2 + 3\Psi_2^2 D_0}\right)^2\right)\big(\Psi_1^2 + 3\Psi_2^2 D_0\big)^{2(k-1)} \equiv$$

$$\equiv \operatorname{lc}(Q_{2k}) \cdot \Omega_{1,1}^{(3)} \cdot \big(\Psi_{2,0}^2 D_{0,0}\big)^{k-1} \cdot \big(\Omega_{2,0}^{(3)}\big)^{2k-1} \cdot X \pmod{X^2}.$$

Следовательно, если $\Omega_{1,1}^{(3)} \neq 0$, то $\Omega_{2,1}^{(6k)} \neq 0$. Следовательно, $\Omega_{2,1}^{(6k)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{1,1}^{(3)} = 0$. Далее, по индукции получаем $\Omega_{1,n}^{(6k)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{1,n}^{(3)} = 0$, что означает $v_X\left(\Omega_2^{(6k)}\right) = v_X\left(\Omega_1^{(3)}\right)$.

Теперь рассмотрим условие $\operatorname{tc}\left(\Omega_2^{(3)}\right) = 0$, которое равносильно

$$\lim_{X \to 0} Q_3(Z) = Q_3(Z_0) = 0,$$

что возможно только при $Z_0 = -3$. По определению величины Z, условие $Z_0 = -3$ равносильно условию $3\Psi_{1,0}^2 + \Psi_{2,0}^2 D_{0,0} = 0$. Также по предложению 1 ясно, что в этом случае справедливо $v_X\left(\Omega_2^{(n)}\right) = 0$ при $n \not\equiv 0 \pmod 3$. Покажем, что для $k \in \mathbb{N}$ выполнены равенства $v_X\left(\Omega_2^{(3k)}\right) = v_X\left(\Omega_2^{(3)}\right) = r_3$.

Для начала рассмотрим $\Omega_2^{(3)}(X) \equiv \Omega_{2,0}^{(3)} + \Omega_{2,1}^{(3)} X \pmod{X^2}$, где

$$\Omega_{2,0}^{(3)} = \Psi_{2,0}(3\Psi_{1,0}^2 + \Psi_{2,0}^2 D_{0,0}) = 0,$$

$$\Omega_{2,1}^{(3)} = 3D_{0,0}\Psi_{2,0}^2\Psi_{2,1} + D_{0,1}\Psi_{2,0}^3 + 3\Psi_{1,0}^2\Psi_{2,1} + 6\Psi_{1,0}\Psi_{1,1}\Psi_{2,0}.$$

По формулам (10) имеем

$$\Omega_2^{(6k)} = \Psi_1^{6k-2} Q_{6k}\left(\frac{\Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2}\right) =$$

$$= \Psi_1^{2k-2}\big(\Psi_1^2 + 3\Psi_2^2 D_0\big)\big(3\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0\big) Q_{2k}\left(\frac{\Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2}\left(\frac{3\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2 + 3\Psi_2^2 D_0}\right)^2\right)\big(\Psi_1^2 + 3\Psi_2^2 D_0\big)^{2(k-1)} \equiv$$

$$\equiv \Psi_{1,0}^{2k-2} Q_{2k}(0) \cdot \Omega_{2,1}^{(3)} \cdot \big(\Omega_{1,0}^{(3)}\big)^{2k-1} \cdot X \pmod{X^2}.$$

Следовательно, $\Omega_{2,1}^{(6k)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{2,1}^{(3)} = 0$. Далее, по индукции получаем $\Omega_{2,n}^{(6k)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{2,n}^{(3)} = 0$, что означает $v_X\left(\Omega_2^{(6k)}\right) = v_X\left(\Omega_2^{(3)}\right)$.

Аналогично, по формулам (10) получаем

$$\Omega_2^{(6k+3)} = \Psi_1^{6k+1} Q_{6k+3}\left(\frac{\Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2}\right) =$$

$$= \Psi_1^{2k-1}\big(3\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0\big) Q_{2k+1}\left(\frac{\Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2}\left(\frac{3\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2 + 3\Psi_2^2 D_0}\right)^2\right)\big(\Psi_1^2 + 3\Psi_2^2 D_0\big)^{2k} \equiv$$

$$\equiv \Psi_{1,0}^{2k-1} Q_{2k+1}(0) \cdot \Omega_{2,1}^{(3)} \cdot \big(\Omega_{1,0}^{(3)}\big)^{2k} \cdot X \pmod{X^2}.$$

Таким образом, $\Omega_{2,1}^{(6k+3)} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{2,1}^{(3)} \neq 0$. Далее, по индукции получаем $\Omega_{1,n}^{(6k+3)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{2,n}^{(3)} = 0$, что означает $v_X\left(\Omega_2^{(6k+3)}\right) = v_X\left(\Omega_2^{(3)}\right)$.

Теорема 2 доказана. □

4. Заключение

Приведем пример элемента эллиптического поля $\mathcal{L} = \mathbb{Q}(X)(\sqrt{F})$, $F \in \mathbb{Q}[X]$, $\deg F = 4$, у которого длина квазипериода непрерывной дроби значительно превосходит порядок порядок класса дивизора $(\infty^- - \infty^+)$ в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$. Этот пример был найден с помощью символьных компьютерных вычислений и параметризации Куберта [16] всех эллиптических кривых, имеющих точку конечного порядка.

Положим $F = 4X^4 - 8X^3 - 8X^2 - 12X - 3$. Бесконечное нормирование поля $\mathbb{Q}(X)$ имеет два неэквивалентных продолжения на поле $\mathcal{L} = \mathbb{Q}(X)(\sqrt{F})$. Рассмотрим элемент $\alpha = \sqrt{F}$ и его непрерывную дробь.

В обозначениях теоремы 2 справедливы соотношения $v_X\left(\Omega_1^{(1)}\right) = v_X\left(\Omega_1^{(2)}\right) = 0$, $v_X\left(\Omega_1^{(3)}\right) = 2$, то есть $r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = 2$. Поэтому, согласно пункту 3 теоремы 2, элементы $\sqrt{F} \cdot X^s$ для $-2 \leqslant s \leqslant 2$ имеют периодическое разложение в непрерывную дробь.

Непрерывная дробь элемента $\sqrt{F}$ в $\mathbb{Q}((1/X))$ имеет вид

$$\sqrt{F} = \left[2X^2 - 2X - 3;\ \overline{-\frac{X}{6} + \frac{1}{4}, 8X - 12, -\frac{X^2}{12} + \frac{X}{12} + \frac{1}{8}, 8X - 12, -\frac{X}{6} + \frac{1}{4}, 4X^2 - 4X - 6}\right].$$

Длина квазипериода равна 3, длина периода равна 6, коэффициент квазипериода $c = -48$, период имеет симметричный вид. В поле $\mathcal{L}$ существует фундаментальная единица степени 4, порядок класса дивизора $(\infty^- - \infty^+)$ в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$ равен 4. В отличие от элементов $\sqrt{F}/X$ и $\sqrt{F}/X^2$ для элемента $\sqrt{F}$ справедливы условия утверждения из статьи [4] об оценке длины квазипериода.

Непрерывная дробь элемента $\sqrt{F}/X$ в $\mathbb{Q}((1/X))$ имеет вид

$$\frac{\sqrt{F}}{X} = \Bigg[2X - 2;\ \overline{-\frac{X}{3} + \frac{2}{3}, -3X - 6, -\frac{2X}{27} + \frac{2}{9}, 27X - 27, -\frac{X}{27} + \frac{1}{18}, 24X^2 - 36X - 18,}$$
$$\overline{-\frac{X}{36} + \frac{1}{36}, 24X - 24, -\frac{X}{12} + \frac{1}{6}, \frac{16X^3}{3} - \frac{16X^2}{3} - 8X - 16, -\frac{X}{12} + \frac{1}{6}, 24X - 24,}$$
$$\overline{-\frac{X}{36} + \frac{1}{36}, 24X^2 - 36X - 18, -\frac{X}{27} + \frac{1}{18}, 27X - 27, -\frac{2X}{27} + \frac{2}{9}, -3X - 6, -\frac{X}{3} + \frac{2}{3}, 4X - 4}\Bigg].$$

Длина периода совпадает с длиной квазипериода и равна 20, период имеет симметричный вид.

Непрерывная дробь элемента $\sqrt{F}/X^2$ в $\mathbb{Q}((1/X))$ имеет вид

$$\frac{\sqrt{F}}{X^2} = \Bigg[2; -\frac{X}{2}+\frac{3}{4}, \overline{\frac{8X}{3}+4, -\frac{X^2}{24}+\frac{X}{8}-\frac{1}{6}, 48X-96, -\frac{X}{24}+\frac{1}{48}, \frac{32X}{3}-16,}$$
$$\overline{\frac{X}{16}+\frac{1}{16}, 8X-22, -\frac{2X}{3}+\frac{3}{2}, \frac{X^4}{3}-\frac{X^3}{3}-\frac{X^2}{2}-X-\frac{3}{2}, -\frac{2X}{3}+\frac{3}{2}, 8X-22, \frac{X}{16}+\frac{1}{16},}$$
$$\overline{\frac{32X}{3}-16, -\frac{X}{24}+\frac{1}{48}, 48X-96, -\frac{X^2}{24}+\frac{X}{8}-\frac{1}{6}, \frac{8X}{3}+4, -\frac{X}{2}+1, 8X-16,}$$
$$\overline{-\frac{X}{6}-\frac{1}{4}, \frac{2X^2}{3}-2X+\frac{8}{3}, -3X+6, \frac{2X}{3}-\frac{1}{3}, -\frac{2X}{3}+1, -X-1, -\frac{X}{2}+\frac{11}{8},}$$
$$\overline{\frac{32X}{3}-24, -\frac{X^4}{48}+\frac{X^3}{48}+\frac{X^2}{32}+\frac{X}{16}+\frac{3}{32}, \frac{32X}{3}-24, -\frac{X}{2}+\frac{11}{8}, -X-1, -\frac{2X}{3}+1,}$$
$$\overline{\frac{2X}{3}-\frac{1}{3}, -3X+6, \frac{2X^2}{3}-2X+\frac{8}{3}, -\frac{X}{6}-\frac{1}{4}, 8X-16, -\frac{X}{2}+1}\Bigg].$$

Длина квазипериода равна 19, длина периода равна 38, коэффициент квазипериода $c = -1/16$, период имеет сдвинутый симметричный вид.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abel N. H. Uber die Integration der Differential-Formel $\rho\ \mathrm{d}x/\sqrt{R}$, wenn R und ρ ganze Functionen sind // J. Reine Angew. Math. 1826. №1. P. 185–221.

2. Chebychev P. L. Sur l'integration de la differential $\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma}}\mathrm{d}x$ // J. Math. Pures Appl. 1864. Vol. 2, № 9. P. 225–246.

3. Платонов В. П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. Т. 69, № 1(415). С. 3–38.

4. Berry, T. G. 1990, "On periodicity of continued fractions in hyperelliptic function fields", *Arch. Math.*, vol. 55, pp. 259–266.

5. Платонов В. П., Федоров Г. В. О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Матем. сб. 2018. Т. 209, № 4. С. 54–94.

6. Беняш-Кривец В. В., Платонов В. П. Группы S-единиц в гиперэллиптических полях и непрерывные дроби // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 1. С. 15–44.

7. Федоров Г. В. Периодические непрерывные дроби и S-единицы с нормированиями второй степени в гиперэллиптических полях // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, № 3.

8. Платонов В. П., Федоров Г. В. О периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // ДАН. 2017. Т. 474, № 5. С. 540–544.

9. Платонов В. П., Федоров Г. В. О периодичности непрерывных дробей в эллиптических полях // ДАН. 2017. Т. 475, № 2. С. 133–136.

10. Платонов В. П., Жгун В. С., Федоров Г. В. Непрерывные дроби в гиперэллиптических полях и многочлены Мамфорда // ДАН. 2016. Т. 471, № 6. С. 640–644.

11. Платонов В. П., Петрунин М. М. Группы S-единиц и проблема периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Тр. МИАН. 2018. Т. 302. С. 354–376.

12. Платонов В. П., Петрунин М. М. S-единицы и периодичность в квадратичных функциональных полях // УМН. 2016. Т. 71, № 5. С. 181–182.

13. Платонов В. П., Петрунин М. М. S-единицы в гиперэллиптических полях и периодичность непрерывных дробей // ДАН. 2016. Т. 470, № 3. С. 260–265.

14. Жгун В. С., Обобщенные якобианы и непрерывные дроби в гиперэллиптических полях // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 4. С. 208–220.

15. Платонов В. П., Федоров Г. В., S-единицы и периодичность непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // ДАН. 2015. Т. 465, № 5. С. 537–541.

16. Kubert D.S., Universal bounds on the torsion of elliptic curves // Proc. London Math.Soc. (3). 1976. Vol. 33, № 2. P. 193–237.

REFERENCES

1. Abel N. H. 1826, “Uber die Integration der Differential-Formel $\rho\, \mathrm{d}x/\sqrt{R}$, wenn R und ρ ganze Functionen sind”, *J. Reine Angew. Math.*, no. 1, pp. 185–221.

2. Chebychev P. L. 1864. “Sur l’integration de la differential $\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma}}\mathrm{d}x$”, *J. Math. Pures Appl.*, vol. 2, no. 9, pp. 225–246.

3. Platonov, V. P. 2014, “Number-theoretic properties of hyperelliptic fields and the torsion problem in Jacobians of hyperelliptic curves over the rational number field”, *Russian Math. Surveys*, vol. 69, no. 1, pp. 1–34.

4. Berry, T. G. 1990, “On periodicity of continued fractions in hyperelliptic function fields”, *Arch. Math.*, vol. 55, pp. 259–266.

5. Platonov, V. P., Fedorov, G. V. 2018, “On the problem of periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields”, *Sb. Math.*, vol. 209, no. 4, pp. 519–559.

6. Benyash-Krivets, V. V., Platonov, V. P. 2009, “Groups of S-units in hyperelliptic fields and continued fractions”, *Sb. Math.*, vol. 200, no. 11, pp. 1587–1615.

7. Fedorov, G. V. 2018, “Periodic continued fractions and S-units with second degree valuations in hyperelliptic fields”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 3. (In Russ.)

8. Platonov, V. P., Fedorov, G. V. 2017, “On the periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields”, *Dokl. Math.*, vol. 95, no. 3, pp. 254–258.

9. Platonov, V. P., Fedorov, G. V. 2017, “On the periodicity of continued fractions in elliptic fields”, *Dokl. Math.*, vol. 96, no. 1, pp. 332–335.

10. Platonov, V. P., Zhgoon, V. S., Fedorov, G. V. 2016, “Continued Rational Fractions in Hyperelliptic Fields and the Mumford Representation”, *Dokl. Math.*, vol. 94, no. 3, pp. 692–696.

11. Platonov, V. P., Petrunin, M. M. 2018, “Groups of S-units and the problem of periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 302, pp. 336–357.

12. Platonov, V. P., Petrunin, M. M. 2016, “S-Units and periodicity in quadratic function fields”, *Russian Math. Surveys*, vol. 71, no. 5, pp. 973–975.

13. Platonov, V. P., Petrunin, M. M. 2016, “S-units in hyperelliptic fields and periodicity of continued fractions”, *Dokl. Math.*, vol. 94, no. 2, pp. 532–537.

14. Zhgoon V. S. 2017, “On generalized jacobians and rational continued fractions in the hyperelliptic fields”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 4, pp. 208–220. (In Russ.)

15. Platonov, V. P., Fedorov, G. V. 2015, “S-Units and Periodicity of Continued Fractions in Hyperelliptic Fields”, *Dokl. Math.*, vol. 92, no. 3, pp. 752–756.

16. Kubert, D. S. 1976, “Universal bounds on the torsion of elliptic curves”, *Proc. London Math.Soc. (3)*, vol. 33, no. 2, pp. 193–237.

Получено 02.02.2019 г.
Принято в печать 10.04.2019 г.