ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 1.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-187-207

Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел[1]

Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Геофизический центр РАН, г. Москва.
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Балаба Ирина Николаевна — доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.
e-mail: ibalaba@mail.ru

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета математики, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Аннотация

В работе для произвольного моноида натуральных чисел строятся основы алгебры рядов Дирихле либо над числовым полем, либо над кольцом целых чисел алгебраического числового поля.

Для любого числового поля $\mathbb{K}$ показано, что множество $\mathbb{D}^*(M)_\mathbb{K}$ всех обратимых рядов Дирихле из $\mathbb{D}(M)_\mathbb{K}$ является бесконечной абелевой группой, состоящей из рядов, у которых первый коэффициент отличен от нуля.

Вводится понятие целого ряда Дирихле моноида натуральных чисел, которые образуют алгебру над кольцом целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_\mathbb{K}$ алгебраического поля $\mathbb{K}$. Показано, что для группы $\mathbb{U}_\mathbb{K}$ алгебраических единиц кольца целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_\mathbb{K}$ алгебраического поля $\mathbb{K}$ множество $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{U}_\mathbb{K}}$ целых рядов Дирихле, у которых $a(1) \in \mathbb{U}_\mathbb{K}$, является мультипликативной группой.

Для любого ряда Дирихле из алгебры рядов Дирихле моноида натуральных чисел определены приведенный ряд, необратимая часть и дополнительный ряд. Найдена формула разложения произвольного ряда Дирихле в произведение приведенного ряда и конструкции из необратимой части и дополнительного ряда.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.

Для любого моноида натуральных чисел выделена алгебра рядов Дирихле, сходящихся на всей комплексной области. Также построена алгебра рядов Дирихле с заданной полуплоскостью абсолютной сходимости. Показано, что для любого нетривиального моноида M и для любого вещественного σ_0 найдется бесконечное множество рядов Дирихле из $\mathbb{D}(M)$ таких, что областью их голоморфности является α-полуплоскость $\sigma > \sigma_0$.

С помощью теоремы универсальности С. М. Воронина удалось доказать слабую форму теоремы универсальности для широкого класса дзета-функций моноидов натуральных чисел.

В заключении рассмотрены актуальные задачи с дзета-функциями моноидов натуральных чисел, требующие дальнейшего исследования. В частности, если верна гипотеза Линника–Ибрагимова, то для них должна быть справедлива и сильная теорема универсальности.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел, эйлерово произведение, теорема универсальности, алгебра рядов Дирихле.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 179–194.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-187-207

Dirichlet series algebra of a monoid of natural numbers[2]

N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University; associate Professor of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Dobrovol'skii Mikhail Nikolaevich — candidate of candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher, Geophysical centre of RAS, Moscow.
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Balaba Irina Nikolaevna — doctor of physical and mathematical sciences, assistant professor, professor of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.
e-mail: ibalaba@mail.ru

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor, dean of the faculty of mathematics, physics and computer science, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.
e-mail: i_rebrova@mail.ru

[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

Abstract

In this paper, for an arbitrary monoid of natural numbers, the foundations of the Dirichlet series algebra are constructed either over a numerical field or over a ring of integers of an algebraic numerical field.

For any numerical field $\mathbb{K}$, it is shown that the set $\mathbb{D}^*(M)_\mathbb{K}$ of all reversible Dirichlet series of $\mathbb{D}(M)_\mathbb{K}$ is an infinite Abelian group consisting of series whose first coefficient is nonzero.

We introduce the notion of an integer Dirichlet monoid of natural numbers that form an algebra over a ring of algebraic integers $\mathbb{Z}_\mathbb{K}$ of the algebraic field $\mathbb{K}$. It is shown that for a group $\mathbb{U}_\mathbb{K}$ of algebraic units of the ring of algebraic integers of $\mathbb{Z}_\mathbb{K}$ an algebraic field $\mathbb{K}$ the set of $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{U}_\mathbb{K}}$ of entire Dirichlet series, $a(1) \in \mathbb{U}_\mathbb{K}$, is multiplicative group.

For any Dirichlet series from the Dirichlet series algebra of a monoid of natural numbers, the reduced series, the irreversible part and the additional series are determined. A formula for decomposition of an arbitrary Dirichlet series into the product of the reduced series and a construction of an irreversible part and an additional series is found.

For any monoid of natural numbers allocated to the algebra of Dirichlet series, convergent in the entire complex domain. The Dirichlet series algebra with a given half-plane of absolute convergence is also constructed. It is shown that for any nontrivial monoid M and for any real σ_0, there is an infinite set of Dirichlet series of $\mathbb{D}(M)$ such that the domain of their holomorphism is α-half-plane $\sigma > \sigma_0$.

With the help of the universality theorem S. M. Voronin managed to prove the weak form of the universality theorem for a wide class of Zeta functions of monoids of natural numbers.

In conclusion describes the actual problem with the Zeta functions of monoids of natural numbers that require further research. In particular, if the Linnik–Ibrahimov hypothesis is true, then a strong theorem of universality should be valid for them.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, zeta function of the monoid of natural numbers, Euler product, universality theorem, Dirichlet series algebra.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2019, "Dirichlet series algebra of a monoid of natural numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 179–194.

Посвящается 70-летию академика Литовской АН,
профессора Антанаса Лауринчикаса

1. Введение

За последние полтора года начало интенсивно развиваться новое направление исследований, связанное с изучением дзета-функций моноидов натуральных чисел [5, 6, 7, 9, 10, 11].

В данной работе преследуется цель — показать, что теория дзета-функций моноидов натуральных чисел входит как составная часть в более общую теорию Алгебры рядов Дирихле моноида натуральных чисел, основы которой и будут изложены далее.

2. Основные определения и обозначения

Пусть $M \subset \mathbb{N}$ — произвольный моноид натуральных чисел. Рассмотрим множество $\mathbb{D}(M)$ — произвольных рядов Дирихле вида

$$f(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{a(n)}{n^\alpha} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_f \geqslant \sigma_f^*,$$

где σ_f — абсцисса абсолютной сходимости и σ_f^* — абсцисса сходимости. Как хорошо известно [14, 15], для любых рядов Дирихле справедливо неравенство $\sigma_f \leqslant \sigma_f^* + 1$.

Пусть $\mathbb{K}$ — произвольное числовое поле. Таким образом, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$. Если все коэффициенты $a(n) \in \mathbb{K}$, то множество всех таких рядов Дирихле будем обозначать через $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ и оно является бесконечномерным линейным функциональным пространством над полем $\mathbb{K}$.

Выделим подпространство $\mathbb{D}^\infty(M)_{\mathbb{K}}$ условием $\sup_{n\in M} |a(n)| < \infty$. На $\mathbb{D}^\infty(M)_{\mathbb{K}}$ зададим норму

$$\|f(\alpha)\| = \sup_{n\in M} |a(n)|.$$

Относительно заданной нормы $\mathbb{D}^\infty(M)_{\mathbb{K}}$ является несепарабельным пространством. Оно будет банаховым, если поле $\mathbb{K}$ — банахово пространство над полем $\mathbb{Q}$ относительно нормы, заданной абсолютной величиной числа из поля $\mathbb{K}$. Так как отсюда следует, что либо $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, либо $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то $\mathbb{D}^\infty(M)_{\mathbb{K}}$ — банахово пространство, только для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, либо $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Нетрудно понять, что пространство $\mathbb{D}^\infty(M)_{\mathbb{K}}$ над полем $\mathbb{K}$ не является алгеброй, так как нет замкнутости относительно произведения рядов Дирихле.

Рассмотрим произведение двух рядов Дирихле из $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$:

$$f(\alpha) = \sum_{n\in M} \frac{a(n)}{n^\alpha}, \quad g(\alpha) = \sum_{n\in M} \frac{b(n)}{n^\alpha} \quad a(n), b(n) \in \mathbb{K},$$

имеем:

$$f(\alpha)g(\alpha) = \sum_{n\in M} \frac{c(n)}{n^\alpha},$$

где

$$c(n) = \sum_{m|n,\, m,\, \frac{n}{m}\in M} a(m) b\left(\frac{n}{m}\right) \in \mathbb{K} \qquad n \in M.$$

Следовательно $f(\alpha)g(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ и $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ является коммутативной алгеброй над полем $\mathbb{K}$.

Аналогично, для произведения трёх рядов Дирихле имеем:

$$f(\alpha) = \sum_{n\in M} \frac{a(n)}{n^\alpha}, \quad g(\alpha) = \sum_{n\in M} \frac{b(n)}{n^\alpha}, \quad h(\alpha) = \sum_{n\in M} \frac{c(n)}{n^\alpha}, \quad a(n), b(n), c(n) \in \mathbb{K},$$

$$(f(\alpha)g(\alpha))h(\alpha) = \left(\sum_{n\in M} \frac{1}{n^\alpha} \left(\sum_{m|n,\, m,\, \frac{n}{m}\in M} a(m) b\left(\frac{n}{m}\right)\right)\right) \sum_{n\in M} \frac{c(n)}{n^\alpha} =$$

$$= \sum_{n\in M} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{m_1,m_2,m_3\in M,\, m_1m_2m_3=n} a(m_1)b(m_2)c(m_3);$$

$$f(\alpha)(g(\alpha)h(\alpha)) = \sum_{n\in M} \frac{a(n)}{n^\alpha} \left(\sum_{n\in M} \frac{1}{n^\alpha} \left(\sum_{m|n,\, m,\, \frac{n}{m}\in M} b(m) c\left(\frac{n}{m}\right)\right)\right) =$$

$$= \sum_{n\in M} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{m_1,m_2,m_3\in M,\, m_1m_2m_3=n} a(m_1)b(m_2)c(m_3) = (f(\alpha)g(\alpha))h(\alpha),$$

что доказывает ассоциативность алгебры $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ над полем $\mathbb{K}$.

Если ряд Дирихле $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ имеет коэффициент $a(1) \neq 0$, то существует обратный ряд Дирихле $f^{-1}(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$, то есть такой ряд Дирихле

$$f^{-1}(\alpha) = \sum_{n\in M} \frac{b(n)}{n^\alpha}, \quad \text{что} \quad f(\alpha)f^{-1}(\alpha) = 1.$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты $b(n)$ удовлетворяют соотношениям:

$$b(1)=\frac{1}{a(1)},\quad b(n)=-\frac{1}{a(1)}\sum_{m|n,\,m,\,\frac{n}{m}\in M,\,m>1}a(m)b\left(\frac{n}{m}\right)\quad n\in M,n>1.$$

Множество всех обратимых рядов Дирихле из $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ обозначим через $\mathbb{D}^*(M)_{\mathbb{K}}$. Ясно, что это мультипликативный моноид, но справедливо более сильное утверждение.

Теорема 1. *Множество $\mathbb{D}^*(M)_{\mathbb{K}}$ всех обратимых рядов Дирихле из $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ является бесконечной абелевой группой, состоящей из рядов, у которых первый коэффициент отличен от нуля.*

Доказательство. Действительно, из предыдущего видно, что если первый коэффициент ряда Дирихле $a(1)\neq 0$, то существует обратный ряд Дирихле $f^{-1}(\alpha)\in\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ и, значит, $f(\alpha)\in\mathbb{D}^*(M)_{\mathbb{K}}$.

Покажем теперь, что условие $a(1)\neq 0$ является необходимым для обратимости ряда Дирихле. Действительно, если $a(1)=0$, то обозначим через $m\in M$ наименьший номер такой, что $a(m)\neq 0$. Пусть произвольное $\sigma_0>\max(\sigma_f,\sigma_{f^{-1}})$ и величина A задана равенством

$$A=\max\left(\sum_{n\in M,\,n\geqslant m}\frac{|a(n)|}{n^{\sigma_0}},\sum_{n\in M}\frac{|b(n)|}{n^{\sigma_0}}\right),\quad f^{-1}(\alpha)=\sum_{n\in M}\frac{b(n)}{n^{\alpha}},$$

тогда при $\alpha>\sigma_0$ имеем:

$$|f^{-1}(\alpha)|\leqslant A,\qquad |f(\alpha)|\leqslant\sum_{n\in M,\,n\geqslant m}\frac{|a(n)|}{n^{\alpha}}\leqslant\frac{1}{m^{\alpha-\sigma_0}}\sum_{n\in M,\,n\geqslant m}\frac{|a(n)|}{n^{\sigma_0}}\leqslant\frac{A}{m^{\alpha-\sigma_0}}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\alpha>\sigma_0,\,\alpha\to\infty}f^{-1}(\alpha)f(\alpha)=0,$$

но это противоречит обратимости $f^{-1}(\alpha)f(\alpha)=1$.

Единичным элементом является ряд Дирихле $f(\alpha)\equiv 1$.

Замкнутость относительно произведения рядов Дирихле очевидна, так как младший коэффициент произведения является произведением младших коэффициентов. Существования обратного элемента входит в определение множества обратимых рядов. □

Обозначим через A_f область аналитичности ряда Дирихле $f(\alpha)$, то есть максимальную область куда ряд Дирихле $f(\alpha)$ аналитически продолжается. Через P_f — множество полюсов его аналитического продолжения, а через Z_f — множество его нулей. Очевидно, что для $f(\alpha)\in\mathbb{D}^*(M)_{\mathbb{K}}$ выполняются соотношения

$$A_{f^{-1}}=(A_f\setminus Z_f)\bigcup P_f.$$

3. Алгебра целых рядов Дирихле

Рассмотрим кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ алгебраического поля $\mathbb{K}$. Ряд Дирихле

$$f(\alpha)=\sum_{n\in M}\frac{a(n)}{n^{\alpha}}\quad a(n)\in\mathbb{K},n\in M$$

будем называть целым рядом Дирихле над алгебраическим полем $\mathbb{K}$ для моноида M. Множество всех таких рядов Дирихле будем обозначать через $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}$. Ясно, что $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}\subset\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$.

Нетрудно видеть, что множество целых рядов Дирихле, с одной стороны, является $\mathbb{Z}_\mathbb{K}$-модулем, а с другой стороны, — алгеброй над целым алгебраическим кольцом $\mathbb{Z}_\mathbb{K}$.

Обозначим через $\mathbb{U}_\mathbb{K}$ группу алгебраических единиц кольца целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_\mathbb{K}$ алгебраического поля $\mathbb{K}$. Через $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{U}_\mathbb{K}}$ обозначим подмножество целых рядов Дирихле из алгебры $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{Z}_\mathbb{K}}$, у которых $a(1) \in \mathbb{U}_\mathbb{K}$.

Теорема 2. *Множество $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{U}_\mathbb{K}}$ целых рядов Дирихле является мультипликативной группой.*

Доказательство. Во-первых, покажем что множество $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{U}_\mathbb{K}}$ замкнуто относительно операции умножения рядов Дирихле. Действительно, если

$$f(\alpha) = \sum_{n\in M} \frac{a(n)}{n^\alpha}, \quad g(\alpha) = \sum_{n\in M} \frac{b(n)}{n^\alpha} \quad a(n), b(n) \in \mathbb{Z}_\mathbb{K}, \quad a(1), b(1) \in \mathbb{U}_\mathbb{K},$$

то

$$f(\alpha)g(\alpha) = \sum_{n\in M} \frac{c(n)}{n^\alpha}, \quad c(n) = \sum_{m|n,\, m,\, \frac{n}{m}\in M} a(m) b\left(\frac{n}{m}\right) \in \mathbb{Z}_\mathbb{K} \quad n \in M, \quad c(1) = a(1)b(1) \in \mathbb{U}_\mathbb{K}$$

и замкнутость установлена.

Во-вторых, единичным элементом является ряд Дирихле $f(\alpha) \equiv 1$.

Наконец, для любого $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{U}_\mathbb{K}}$ имеем:

$$f^{-1}(\alpha) = \sum_{n\in M} \frac{b(n)}{n^\alpha}, \quad b(1) = \frac{1}{a(1)}, \quad b(n) = -\frac{1}{a(1)} \sum_{m|n,\, m,\, \frac{n}{m}\in M,\, m>1} a(m) b\left(\frac{n}{m}\right) \quad n \in M, n > 1.$$

Ясно, что $b(1) \in \mathbb{U}_\mathbb{K}$. Далее индукцией по n мы получаем, что для всех $n \in M$, $n > 1$ имеем $b(n) \in \mathbb{Z}_\mathbb{K}$, что доказывает $f^{-1}(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{U}_\mathbb{K}}$. Тем самым теорема полностью доказана. □

Если определить множество $\mathbb{D}(M)_{1_\mathbb{K}}$ целых рядов Дирихле с $a(1) = 1$, то нетрудно видеть, что это будет подгруппа: $\mathbb{D}(M)_{1_\mathbb{K}} \subset \mathbb{D}(M)_{\mathbb{U}_\mathbb{K}} \subset \mathbb{D}^*(M)_\mathbb{K}$.

4. Алгебра необратимых рядов Дирихле

Для произвольного ряда Дирихле $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_\mathbb{K}$ определим его необратимую часть $f^*(\alpha)$ равенством $f^*(\alpha) = f(\alpha) - a(1)$. Ясно, что $f^*(\alpha) = f(\alpha)$ только для необратимых рядов Дирихле. Обозначим множество всех необратимых рядов Дирихле через $\mathbb{D}^0(M)_\mathbb{K}$, а множество всех необратимых целых рядов Дирихле через $\mathbb{D}^0(M)_{\mathbb{Z}_\mathbb{K}}$. Очевидно, что $\mathbb{D}^0(M)_\mathbb{K}$ — алгебра над полем $\mathbb{K}$, а $\mathbb{D}^0(M)_{\mathbb{Z}_\mathbb{K}}$ — алгебра над кольцом $\mathbb{Z}_\mathbb{K}$.

Ясно, что справедливы следующие разложения в прямые суммы:

$$\mathbb{D}(M)_\mathbb{K} = \mathbb{K} \bigoplus \mathbb{D}^0(M)_\mathbb{K}, \qquad \mathbb{D}(M)_{\mathbb{Z}_\mathbb{K}} = \mathbb{Z}_\mathbb{K} \bigoplus \mathbb{D}^0(M)_{\mathbb{Z}_\mathbb{K}}.$$

Кроме этого, справедливы равенства:

$$\mathbb{D}^*(M)_\mathbb{K} = \mathbb{K}^* + \mathbb{D}^0(M)_\mathbb{K}, \qquad \mathbb{D}^*(M)_{\mathbb{Z}_\mathbb{K}} = \mathbb{Z}^*_\mathbb{K} + \mathbb{D}^0(M)_{\mathbb{Z}_\mathbb{K}}, \qquad \mathbb{D}(M)_{\mathbb{U}_\mathbb{K}} = \mathbb{U}_\mathbb{K} + \mathbb{D}^0(M)_{\mathbb{Z}_\mathbb{K}},$$

где $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ и $\mathbb{Z}^*_\mathbb{K} = \mathbb{Z}_\mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Для произвольного ряда Дирихле $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_\mathbb{K}$ определим его дополнительную часть $f^{**}(\alpha)$ равенством $f^{**}(\alpha) = (1 + f^*(\alpha))^{-1} - 1$.

Если дан произвольный ряд Дирихле $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_\mathbb{K}$, то его приведенным рядом Дирихле назовём ряд $f^{(p)}(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_\mathbb{K}$, заданный равенством $f^{(p)}(\alpha) = 1 + f^*(\alpha)$. Очевидно, что для $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{1_\mathbb{K}}$ будет $f^{(p)}(\alpha) = f(\alpha)$.

Теорема 3. *Для любого $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ справедливо равенство*

$$f(\alpha) = f^{(p)}(\alpha)(a(1) + f^*(\alpha) + f(\alpha)f^{**}(\alpha)).$$

Доказательство. Действительно,

$$f^{(p)}(\alpha)(1 + f^{**}(\alpha)) = (1 + f^*(\alpha))(1 + f^{**}(\alpha)) = 1;$$

$$f^{(p)}(\alpha)(a(1) + f^*(\alpha) + f(\alpha)f^{**}(\alpha)) = f^{(p)}(f(\alpha) + f(\alpha)f^{**}(\alpha)) = f(\alpha)f^{(p)}(\alpha)(1 + f^{**}(\alpha)) = f(\alpha).$$

□

Следствие 1. *Для любого $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}$ справедливо равенство*

$$f(\alpha) = f^{(p)}(\alpha)(a(1) + f^*(\alpha) + f(\alpha)f^{**}(\alpha)),$$

где $f^{(p)}(\alpha), a(1) + f^*(\alpha) + f(\alpha)f^{**}(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}$.

Доказательство. Действительно, каждый приведенный ряд Дирихле $f^{(p)}(\alpha)$ для произвольного целого ряда Дирихле $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}$ принадлежит группе $\mathbb{D}(M)_{1_{\mathbb{K}}}$. Следовательно, $1 + f^{**}(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{1_{\mathbb{K}}}$, а значит, и $a(1) + f^*(\alpha) + f(\alpha)f^{**}(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}$. □

5. Алгебра рядов Дирихле, сходящихся на всей комплексной плоскости

Рассмотрим ряд Дирихле $f_0(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{R}}$, заданный равенством

$$f_0(\alpha) = \sum_{n\in M} \frac{1}{n^\alpha e^n}.$$

Для любого $\alpha = \sigma + it$ мажорирующим рядом для $f_0(\alpha)$ будет ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma e^n},$$

который сходится по интегральному признаку Коши, так как сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\sigma e^x}, \quad \int\limits_{x_\sigma}^\infty \frac{dx}{x^\sigma e^x} \leqslant \int\limits_{x_\sigma}^\infty \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}} = \frac{2}{e^{x_\sigma}},$$

где $x_\sigma \geqslant 1$ определяется из условия $x > -2\sigma \ln x$ при $x > x_\sigma$.

Отсюда следует, что ряд Дирихле $f_0(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{R}}$ сходится для любого комплексного α. Так как $n!$ растёт быстрее чем e^n, то и ряд Дирихле $f_1(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{Q}}$, заданный равенством

$$f_1(\alpha) = \sum_{n\in M} \frac{1}{n^\alpha n!},$$

будет сходиться для любого комплексного α. Так как $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ для любого числового поля $\mathbb{K}$, то для любого числового поля $\mathbb{K}$ множество рядов Дирихле, сходящихся для любого комплексного α, непусто. Обозначим это множество через $\mathbb{DC}(M)_{\mathbb{K}}$.

Будем через $\mathbb{D}_{fin}(M)_{\mathbb{K}}$, $\mathbb{D}_{fin}(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}$, $\mathbb{D}_{fin}(M)_{\mathbb{U}_{\mathbb{K}}}$, $\mathbb{D}_{fin}(M)_{1_{\mathbb{K}}}$ и $\mathbb{D}^*_{fin}(M)_{\mathbb{K}}$ обозначать соответствующие множества конечных рядов Дирихле. Очевидно, что все эти множества являются подмножествами множества $\mathbb{DC}(M)_{\mathbb{K}}$. Первые два множества являются алгебрами, а последние три — мультипликативными моноидами, так как, вообще говоря, обратный ряд к конечному ряду Дирихе не является конечным.

Теорема 4. *Для любого моноида M натуральных чисел множество $\mathbb{DC}(M)_{\mathbb{K}}$ является алгеброй над полем $\mathbb{K}$.*

Доказательство. Тот факт, что $\mathbb{DC}(M)_{\mathbb{K}}$ является линейным пространством над полем $\mathbb{K}$, очевиден. Требуется доказать, что произведение двух рядов Дирихле абсолютно сходящихся для любого комплексного значения α будет абсолютно сходиться для любого комплексного значения α.

Пусть величины A, B и m_ε определены из условий

$$A=\sum_{n\in M}\frac{|a(n)|}{n^\sigma},\quad B=\sum_{n\in M}\frac{|b(n)|}{n^\sigma},\quad \max\left(\sum_{n\in M,\, n>m_\varepsilon}\frac{|a(n)|}{n^\sigma},\sum_{n\in M,\, n>m_\varepsilon}\frac{|b(n)|}{n^\sigma}\right)<\varepsilon,$$

тогда

$$AB=S_1+S_2+S_3+S_4,$$

где

$$S_1=\sum_{n\in M,\, n<m_\varepsilon^2}\frac{1}{n^\sigma}\sum_{m,k\in M,\, mk=n,\, m,k<m_\varepsilon}|a(m)b(k)|=\left(\sum_{n\in M,\, n<m_\varepsilon}\frac{|a(n)|}{n^\sigma}\right)\left(\sum_{n\in M,\, n<m_\varepsilon}\frac{|b(n)|}{n^\sigma}\right),$$

$$S_2=\sum_{n\in M,\, n<m_\varepsilon^2}\frac{1}{n^\sigma}\sum_{m,k\in M,\, mk=n,\, m<m_\varepsilon,\, k\geqslant m_\varepsilon}|a(m)b(k)|<\left(\sum_{n\in M,\, n<m_\varepsilon}\frac{|a(n)|}{n^\sigma}\right)\left(\sum_{n\in M,\, n\geqslant m_\varepsilon}\frac{|b(n)|}{n^\sigma}\right),$$

$$S_3=\sum_{n\in M,\, n<m_\varepsilon^2}\frac{1}{n^\sigma}\sum_{m,k\in M,\, mk=n,\, m\geqslant m_\varepsilon,\, k<m_\varepsilon}|a(m)b(k)|<\left(\sum_{n\in M,\, n\geqslant m_\varepsilon}\frac{|a(n)|}{n^\sigma}\right)\left(\sum_{n\in M,\, n<m_\varepsilon}\frac{|b(n)|}{n^\sigma}\right),$$

$$S_4=\sum_{n\in M,\, n\geqslant m_\varepsilon^2}\frac{1}{n^\sigma}\sum_{m,k\in M,\, mk=n,\, m,k\geqslant m_\varepsilon}|a(m)b(k)|<\left(\sum_{n\in M,\, n\geqslant m_\varepsilon}\frac{|a(n)|}{n^\sigma}\right)\left(\sum_{n\in M,\, n\geqslant m_\varepsilon}\frac{|b(n)|}{n^\sigma}\right).$$

Из предыдущего следует, что

$$(A-\varepsilon)(B-\varepsilon)<S_1\leqslant AB,\quad 0\leqslant S_2<A\varepsilon,\quad 0\leqslant S_3<B\varepsilon,\quad 0\leqslant S_4<\varepsilon^2.$$

Отсюда вытекает, что ряд Дирихле

$$\sum_{n\in M}\frac{1}{n^\sigma}\sum_{m,k\in M,\, mk=n}|a(m)b(k)|$$

абсолютно сходится и равен произведению соответствующих рядов Дирихле. □

Теорема 5. *Если целый ряд из $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{Z}}$ абсолютно сходится для любого комплексного значения α, то он из $\mathbb{D}_{fin}(M)_{\mathbb{Z}}$:*

$$\mathbb{DC}(M)_{\mathbb{Z}}=\mathbb{D}_{fin}(M)_{\mathbb{Z}}.$$

Доказательство. Действительно, если целый ряд Дирихле $f(\alpha)\in\mathbb{DC}(M)_{\mathbb{Z}}$, то

$$f(\alpha)=\sum_{n\in M}\frac{a(n)}{n^\alpha},\quad a(n)\in\mathbb{Z}\quad(n\in M)$$

и бесконечное число $a(n) \neq 0$, но это означает, что при $\alpha = 0$ ряд расходится, так как общий член не стремится к нулю.

Следовательно, если целый ряд Дирихле сходится для любого комплексного значения α, то он содержит конечное число слагаемых, то есть $\mathbb{DC}(M)_{\mathbb{Z}} = \mathbb{D}_{fin}(M)_{\mathbb{Z}}$. □

Заметим, что если мы переходим к полю алгебраических чисел $\mathbb{K}$ на полем $\mathbb{Q}$, то утверждение теоремы 5 перестает быть верным. Действительно, в вещественном алгебраическом поле существует бесконечно много алгебраических единиц. В частности, если $\varepsilon \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ и $0 < \varepsilon < 1$, то ряд Дирихле с $a(n) = \varepsilon^n$ $n \in M$ будет примером целого ряда Дирихле, который сходится для любого значения α.

6. Алгебра рядов Дирихле с заданной полуплоскостью абсолютной сходимости

Пусть σ_0 — произвольное вещественное число. Обозначим через $\mathbb{D}_{\sigma_0}(M)_{\mathbb{K}}$ подмножество всех рядов Дирихле $f(\alpha)$ из $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$, для которых $\sigma_f \leqslant \sigma_0$. Очевидно, что $\mathbb{DC}(M)_{\mathbb{K}} \subset \mathbb{D}_{\sigma_0}(M)_{\mathbb{K}}$ для любого σ_0. Повторяя дословно доказательство теоремы 4 получим следующий результат.

Теорема 6. *Для любого моноида M натуральных чисел множество $\mathbb{D}_{\sigma_0}(M)_{\mathbb{K}}$ является алгеброй над полем $\mathbb{K}$.*

Нетрудно видеть, что при $\sigma_1 < \sigma_0$ будет выполнено включение $\mathbb{D}_{\sigma_1}(M)_{\mathbb{K}} \subset \mathbb{D}_{\sigma_0}(M)_{\mathbb{K}}$ и

$$\mathbb{DC}(M)_{\mathbb{K}} = \bigcap_{\sigma_0 \in \mathbb{R}} \mathbb{D}_{\sigma_0}(M)_{\mathbb{K}}, \quad \mathbb{DC}(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}} = \bigcap_{\sigma_0 \in \mathbb{R}} \mathbb{D}_{\sigma_0}(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}.$$

Несложно задать при $\sigma_1 > \sigma_0$ изоморфизм линейных пространств $\mathbb{D}_{\sigma_1}(M)_{\mathbb{K}}$ и $\mathbb{D}_{\sigma_0}(M)_{\mathbb{K}}$. Действительно, каждому ряду Дирихле

$$f(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{a(n)}{n^\alpha} \in \mathbb{D}_{\sigma_1}(M)_{\mathbb{K}}$$

поставим в соответствие ряд Дирихле

$$g(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{b(n)}{n^\alpha} \in \mathbb{D}_{\sigma_0}(M)_{\mathbb{K}}$$

с помощью равенства

$$b(n) = a(n)[n^{\sigma_1 - \sigma_0}], \quad n \in M.$$

И наоборот, каждому ряду Дирихле $g(\alpha)$ поставим в соответствие ряд Дирихле $f(\alpha)$ с помощью равенства

$$a(n) = \frac{b(n)}{[n^{\sigma_1 - \sigma_0}]}, \quad n \in M.$$

Указанное соответствие осуществляет изоморфизм линейных пространств, но изоморфизм алгебр при этом не выполняется, так как произведение не переходит в произведение.

Обозначим указанное отображение $\mathbb{D}_{\sigma_1}(M)_{\mathbb{K}}$ в $\mathbb{D}_{\sigma_0}(M)_{\mathbb{K}}$ через $\varphi_{\sigma_1,\sigma_0}$. Это линейное преобразование можно применить к любому ряду Дирихле $f(\alpha)$. Оно будет сдвигать абсциссу абсолютной сходимости.

Теорема 7. *Для абсциссы абсолютной сходимости образа ряда Дирихле $f(\alpha)$ справедливо равенство*

$$\sigma_{\varphi_{\sigma_1,\sigma_0}(f)} = \sigma_f + \sigma_1 - \sigma_0.$$

Доказательство. Согласно определению абсциссы абсолютной сходимости ряда Дирихле $f(\alpha)$ для любого значения $\alpha = \sigma + it$ при $\sigma > \sigma_f$ ряд

$$\sum_{n\in M} \frac{|a(n)|}{|n^\alpha|}$$

сходится, а согласно теореме Ландау (см. [14], стр.) ряд

$$\sum_{n\in M} \frac{|a(n)|}{n^{\sigma_f}}$$

расходится.

Ряд Дирихле для $\varphi_{\sigma_1,\sigma_0}(f)$ имеет вид:

$$\varphi_{\sigma_1,\sigma_0}(f) = \sum_{n\in M} \frac{a(n)[n^{\sigma_1-\sigma_0}]}{n^\alpha}.$$

Для ряда абсолютных величин имеем неравенства:

$$\frac{1}{2}\sum_{n\in M} \frac{|a(n)|n^{\sigma_1-\sigma_0}}{n^\sigma} \leqslant \sum_{n\in M} \frac{|a(n)|[n^{\sigma_1-\sigma_0}]}{n^\sigma} \leqslant \sum_{n\in M} \frac{|a(n)|n^{\sigma_1-\sigma_0}}{n^\sigma}.$$

Так как при $\sigma - \sigma_1 + \sigma_0 > \sigma_f$ мажорирующий ряд сходится, а при $\sigma - \sigma_1 + \sigma_0 = \sigma_f$ расходится, то утверждение теоремы доказано. □

7. Ряды Дирихле с областью голоморфности заданной правой полуплоскостью

В работе [8] была доказана гипотеза о заградительном ряде для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых из работы [9]. Этим же методом мы покажем, что для простейшего моноида — геометрической прогрессии существует ряд Дирихле, для которого областью голоморфности является заданная правая полуплоскость.

Для произвольного вещественного σ_0 и натурального $q > 1$ определим ряд Дирихле

$$f_{\sigma_0,q}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n\sigma_0}}{q^{n\alpha}} \in \mathbb{D}(M(q)), \quad M(q) = \{m = q^n \,|\, n = 0, 1, \ldots\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$f_{\sigma_0,q}(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{q^{\alpha-\sigma_0}}\right)^{-1}.$$

Отсюда следует что для абсциссы абсолютной сходимости справедливо равенство

$$\sigma_{f_{\sigma_0,q}} = \sigma_0.$$

Функция $f_{\sigma_0,q}(\alpha)$ — мероморфная функция на всей комплексной α-плоскости кроме точек $\alpha = \sigma_0 + \frac{2\pi ik}{\ln q}$, k — любое целое число.

Определим функцию $F_{\sigma_0,q}(\alpha)$ с помощью обобщенного произведения Эйлера:

$$F_{\sigma_0,q}(\alpha) = \prod_{m=1}^{\infty} f_{\sigma_0,q^m}(\alpha) = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(q^m)^{\alpha-\sigma_0}}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(n)}{q^{n(\alpha-\sigma_0)}},$$

где $a(0) = 1$ и при $n > 0$ $a(n)$ — количество решений в целых неотрицательных числах линейного уравнения с растущим числом слагаемых

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = n. \tag{1}$$

Ясно, что $F_{\sigma_0,q}(\alpha) \in \mathbb{D}(M(q))$.

Лемма 1. *При $\alpha = \sigma + it0$ и $\sigma > \sigma_0$ ряд Дирихле для $F_{\sigma_0,q}(\alpha)$ абсолютно сходится.*

Доказательство. Возьмём логарифм обобщенного произведения Эйлера для $F_{\sigma_0,q}(\alpha)$, получим

$$\ln F_{\sigma_0,q}(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(q^m)^{(\alpha-\sigma_0)n}}.$$

При $\delta = \sigma - \sigma_0 > 0$ для него имеется мажорирующий ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(q^m)^{\delta n}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n(m)}{q^{m\delta}}, \quad n(m) = \sum_{n|m} \frac{1}{n} < 1 + \ln m,$$

который абсолютно равномерно сходится. □

Далее будем использовать обозначения и определения из работы [8].

Лемма 2. *Пусть $\alpha_1 = \sigma_1 + it_1$ — произвольная точка в правой полуплоскости $\sigma_1 > \sigma_0$, тогда порядок $\operatorname{ord}_{\alpha_1} F_{\sigma_0,q}(\alpha) = 0$ и радиус в этой точке $\operatorname{rad}_{\alpha_1} F_{\sigma_0,q}(\alpha)) = \sigma_1$.*

Доказательство. Из наличия обобщённого эйлерова произведения следует, что справедливо равенство

$$F_{\sigma_0,q}(\alpha) = \prod_{m=1}^{\infty} f_{\sigma_0,q^m}(\alpha), \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_0.$$

Очевидно, что для любого $m \geqslant 1$ справедливы равенства

$$\operatorname{ord}_{\alpha_1} f_{\sigma_0,q^m}(\alpha) = 0, \quad \operatorname*{Wei}_{\alpha_1} f_{\sigma_0,q^m}(\alpha) = f_{\sigma_0,q^m}(\alpha_1), \quad \operatorname{rad}_{\alpha_1} f_{\sigma_0,q^m}(\alpha) = \sqrt{(\sigma_1-\sigma_0)^2 + \tau_m^2},$$

где $\tau_m = \min_{k\in\mathbb{Z}} \left| t_1 - \frac{2k\pi}{m \ln q} \right|$ задает расстояние до ближайшего полюса $\sigma_0 + \frac{2k\pi}{m\ln q} i$ функции $f_{\sigma_0,q^m}(\alpha)$.

Нетрудно видеть, что круг $K(\alpha_1, \sigma_1 - \sigma_0) = \{\alpha \,|\, |\alpha - \alpha_1| < \sigma_1 - \sigma_0\}$ является пересечением всех кругов $K\left(\alpha_1, \sqrt{(\sigma_1-\sigma_0)^2 + \tau_m^2}\right) = \{\alpha \,|\, |\alpha - \alpha_1| < \sqrt{(\sigma_1-\sigma_0)^2 + \tau_m^2}\}$, когда m пробегает все натуральные значения:

$$K(\alpha_1, \sigma_1 - \sigma_0) = \bigcap_{m=1}^{\infty} K\left(\alpha_1, \sqrt{(\sigma_1-\sigma_0)^2 + \tau_m^2}\right).$$

Как известно (см. [3], стр. 59), на окружности круга сходимости всегда есть по меньшей мере одна особая точка. Так как все точки окружности круга $K(\alpha_1, \sigma_1 - \sigma_0)$ кроме точки касания с прямой $\sigma = \sigma_0$ принадлежат области абсолютной сходимости ряда $F_{\sigma_0,q}(\alpha)$, то особой точкой является точка касания $\alpha = \sigma_0 + it_1$. Лемма полностью доказана. □

Теорема 8. *Областью голоморфности ряда Дирихле $F_{\sigma_0,q}(\alpha)$ является α-полуплоскость $\sigma > \sigma_0$.*

Доказательство. Из доказательства предыдущей леммы следует, что все точки прямой $\sigma = \sigma_0$ являются особыми точками ряда Дирихле $F_{\sigma_0,q}(\alpha)$. Отсюда следует, что прямая $\sigma = \sigma_0$ целиком является особой линией для ряда Дирихле $F_{\sigma_0,q}(\alpha)$. А это означает, что областью голоморфности ряда Дирихле $F_{\sigma_0,q}(\alpha)$ является α-полуплоскость $\sigma > \sigma_0$. □

Из доказанной теоремы следует что для любого нетривиального моноида M и для любого вещественного σ_0 найдется бесконечное множество рядов Дирихле из $\mathbb{D}(M)$ таких, что областью их голоморфности является α-полуплоскость $\sigma > \sigma_0$.

8. Универсальность некоторых рядов Дирихле и дзета-функций некоторых моноидов натуральных чисел

45 лет тому назад 21 августа 1974 года в редакцию Известий АН СССР Серия математическая поступила работа С. М. Воронина, в которой была доказана знаменитая теорема об универсальности дзета-функции Римана [1]. Эта работа открыла целое новое направление исследований, в котором значительную роль сыграли А. Лауринчикас и его ученики. Более подробно о вкладе в данную тематику литовской школы теории чисел можно узнать по работе [12].

Теорема 9. *Пусть $0 < r < \frac{1}{4}$; пусть $f(s)$ — функция, аналитическая внутри круга $|s| \leqslant r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(s)$ не имеет нулей внутри круга $|s| \leqslant r$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует вещественное $T = T(\varepsilon)$ такое, что*

$$\max_{|s|\leqslant r} \left| f(s) - \zeta\left(s + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right)\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. См. [1] или [2], стр. 240–250. □

Для дальнейшего нам потребуются моноиды M с однозначным разложением на простые числа такие, что для их дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ справедливо разложение в произведение Эйлера

$$\zeta(M|\alpha) = \prod_{p\in P(M)} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma \geqslant \frac{1}{2}.$$

Доказательство существования таких моноидов содержится в работе [7]. Будем через $\mathfrak{M}_{\sigma_0}$ обозначать класс моноидов M с однозначным разложением на простые числа таких, что дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ представляется в виде произведения Эйлера, абсолютно и равномерно сходящегося в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$.

Лемма 3. *При $Q > 4$ для любого $q > Q$ и для любого вещественного T справедливы неравенства*

$$\max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}} \left| \frac{1 - \frac{1}{q^{\alpha+\frac{3}{4}+iT}}}{1 - \frac{1}{q^{\alpha+\frac{3}{4}}}} - 1 \right| < \frac{4}{\sqrt{Q}}, \quad \max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}} \left| 1 - \frac{1}{q^{\alpha+\frac{3}{4}+iT}} \right| < 1 + \frac{1}{\sqrt{Q}}.$$

Доказательство. Действительно, для второго неравенства имеем:

$$\left| 1 - \frac{1}{q^{\alpha+\frac{3}{4}+iT}} \right| \leqslant 1 + \frac{1}{\left|q^{\alpha+\frac{3}{4}+iT}\right|} \leqslant 1 + \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{Q}}.$$

Далее имеем:

$$\left| \frac{1 - \frac{1}{q^{\alpha+\frac{3}{4}+iT}}}{1 - \frac{1}{q^{\alpha+\frac{3}{4}}}} - 1 \right| = \left| \frac{q^{\alpha+\frac{3}{4}} - \frac{1}{q^{iT}}}{q^{\alpha+\frac{3}{4}} - 1} - 1 \right| = \left| \frac{1 - \frac{1}{q^{iT}}}{q^{\alpha+\frac{3}{4}} - 1} \right| \leqslant \frac{4}{q^{\frac{1}{2}}} < \frac{4}{\sqrt{Q}}.$$

□

Пусть p_0 — простое число и моноид $M_-(p_0)$ обозначает моноид натуральных чисел, не делящихся на p_0. Дзета-функция $\zeta(M_-(p_0)|\alpha)$ в правой полуплоскости $\sigma > 1$ имеет представление в виде произведения Эйлера:

$$\zeta(M_-(p_0)|\alpha) = \prod_{p\neq p_0} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}.$$

Теорема 10. *Пусть $Q > 4$, $0 < r < \frac{1}{4}$; пусть $f(\alpha)$ — функция, аналитическая внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(\alpha)$ не имеет нулей внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и $A(r,f) = \max_{|\alpha|\leqslant r}|f(\alpha)|$, то для всякого $\varepsilon > 0$ и для любого простого $p_0 > Q$ существует вещественное $T = T(\varepsilon, p_0)$ такое, что*

$$\max_{|\alpha|\leqslant r}\left|f(\alpha) - \zeta\left(M_-(p_0)\middle|\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right)\right| < \varepsilon\left(1 + \frac{1}{\sqrt{Q}}\right) + \frac{4A}{\sqrt{Q}}.$$

Доказательство. Определим функцию $f_1(\alpha)$ с помощью равенства

$$f_1(\alpha) = f(\alpha)\left(1 - \frac{1}{p_0^{\alpha+\frac{3}{4}}}\right)^{-1}.$$

Для неё выполнены все условия теоремы С. М. Воронина (теорема 9), поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ существует вещественное $T = T(\varepsilon, p_0)$ такое, что

$$\max_{|\alpha|\leqslant r}\left|f_1(\alpha) - \zeta\left(\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right)\right| < \varepsilon.$$

Так как

$$\zeta\left(\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right) = \zeta\left(M_-(p_0)\middle|\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right)\left(1 - \frac{1}{p_0^{\alpha+\frac{3}{4}+iT}}\right)^{-1},$$

то

$$\max_{|\alpha|\leqslant r}\left|f(\alpha)\frac{1 - \frac{1}{q^{\alpha+\frac{3}{4}+iT}}}{1 - \frac{1}{q^{\alpha+\frac{3}{4}}}} - \zeta\left(M_-(p_0)\middle|\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right)\right| < \varepsilon\max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}}\left|1 - \frac{1}{q^{\alpha+\frac{3}{4}+iT}}\right|.$$

Применяя лемму 3, получим утверждение теоремы. □

Теорему 10 можно существенно усилить. Пусть Q — натуральное число и моноид $M \in \mathfrak{M}_{\frac{1}{2}}$. Определим моноид M_{-Q} как множество натуральных чисел, не делящихся на простые p из $P(M)$ и больших Q. Если определить моноид M_{+Q} как множество натуральных чисел, имеющих в своём каноническом разложении только простые числа $p \in P(M)$, которые больше Q, то $\mathbb{N} = M_{-Q}\cdot M_{+Q}$ и $\zeta(\alpha) = \zeta(M_{-Q}|\alpha)\zeta(M_{+Q}|\alpha)$.

Лемма 4. *Для любого вещественного $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < 1$ найдётся натуральное $Q = Q(\varepsilon_1)$ такое, что для любого вещественного T справедливы неравенства*

$$\max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}}\left|\frac{\zeta(M_{+Q}|\alpha + \frac{3}{4})}{\zeta(M_{+Q}|\alpha + \frac{3}{4} + iT)} - 1\right| < 3\varepsilon_1, \quad \max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}}\left|\frac{1}{\zeta\left(M_{+Q}\left|\alpha + \frac{3}{4} + iT\right.\right)}\right| < 1 + \varepsilon_1.$$

Доказательство. Действительно, так как $M \in \mathfrak{M}_{\frac{1}{2}}$, то для любого α из круга $|\alpha| \leqslant \frac{1}{4}$ справедливо равенство

$$\zeta\left(M\middle|\alpha + \frac{3}{4} + iT\right) = \prod_{p\in P(M)}\left(1 - \frac{1}{p^{\alpha+\frac{3}{4}+iT}}\right)^{-1},$$

в котором произведение Эйлера равномерно и абсолютно сходится.

Почленно прологарифмировав, получим

$$\ln\zeta\left(M\left|\alpha+\frac{3}{4}+iT\right.\right)=\sum_{p\in P(M)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu p^{(\alpha+\frac{3}{4}+iT)\nu}},$$

$$\ln\zeta\left(M_{+Q}\left|\alpha+\frac{3}{4}+iT\right.\right)=\sum_{p\in P(M),p>Q}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu p^{(\alpha+\frac{3}{4}+iT)\nu}}.$$

Отсюда следует, что для любого вещественного $\varepsilon_1>0$ найдётся натуральное $Q=Q(\varepsilon_1)$ такое, что для любого вещественного T справедливы неравенства

$$-\ln(1+\varepsilon_1)<\left|\ln\zeta\left(M_{+Q}\left|\alpha+\frac{3}{4}+iT\right.\right)\right|<\ln(1+\varepsilon_1)$$

и, значит,

$$\max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}}\left|\frac{1}{\zeta\left(M_{+Q}\left|\alpha+\frac{3}{4}+iT\right.\right)}\right|<1+\varepsilon_1.$$

Аналогично,

$$\left|\ln\frac{\zeta(M_{+Q}|\alpha+\frac{3}{4})}{\zeta(M_{+Q}|\alpha+\frac{3}{4}+iT)}\right|=\left|\sum_{p\in P(M),p>Q}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu p^{(\alpha+\frac{3}{4})\nu}}-\frac{1}{\nu p^{(\alpha+\frac{3}{4}+iT)\nu}}\right)\right|=$$

$$=\left|\sum_{p\in P(M),p>Q}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu p^{(\alpha+\frac{3}{4})\nu}}\left(1-\frac{1}{p^{iT\nu}}\right)\right|<\sum_{p\in P(M),p>Q}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2}{\nu p^{\frac{\nu}{2}}}<2\ln(1+\varepsilon_1).$$

Отсюда следует, что

$$\left|\frac{\zeta(M_{+Q}|\alpha+\frac{3}{4})}{\zeta(M_{+Q}|\alpha+\frac{3}{4}+iT)}-1\right|<(1+\varepsilon_1)^2-1<3\varepsilon_1.$$

□

Теорема 11. *Пусть $0<r<\frac{1}{4}$; пусть $f(\alpha)$ — функция, аналитическая внутри круга $|\alpha|\leqslant r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(\alpha)$ не имеет нулей внутри круга $|\alpha|\leqslant r$ и $A(r,f)=\max_{|\alpha|\leqslant r}|f(\alpha)|$, то для всякого $\varepsilon>0$ и для всякого $1>\varepsilon_1>0$ существует натуральное $Q=Q(\varepsilon_1)$ такое, что существует вещественное $T=T(\varepsilon,\varepsilon_1)$ такое, что*

$$\max_{|\alpha|\leqslant r}\left|f(\alpha)-\zeta\left(M_{+Q}\left|\alpha+\left(\frac{3}{4}+iT\right)\right.\right)\right|<\varepsilon\left(1+\varepsilon_1\right)+3A\varepsilon_1.$$

Доказательство. Пусть $Q=Q(\varepsilon_1)$ из леммы 4. Определим функцию $f_2(\alpha)$ с помощью равенства

$$f_2(\alpha)=f(\alpha)\zeta\left(M_{+Q}\left|\alpha+\frac{3}{4}\right.\right).$$

Для неё выполнены все условия теоремы С. М. Воронина (теорема 9), поэтому для всякого $\varepsilon>0$ существует вещественное $T=T(\varepsilon,\varepsilon_1)$ такое, что

$$\max_{|\alpha|\leqslant r}\left|f_2(\alpha)-\zeta\left(\alpha+\left(\frac{3}{4}+iT\right)\right)\right|<\varepsilon.$$

Так как

$$\zeta\left(\alpha+\left(\frac{3}{4}+iT\right)\right)=\zeta\left(M_{-Q}\left|\alpha+\left(\frac{3}{4}+iT\right)\right.\right)\zeta\left(M_{+Q}\left|\alpha+\left(\frac{3}{4}+iT\right)\right.\right),$$

то

$$\max_{|\alpha|\leqslant r}\left|f(\alpha)\frac{\zeta\left(M_{+Q}\left|\alpha+\frac{3}{4}\right.\right)}{\zeta\left(M_{+Q}\left|\alpha+\left(\frac{3}{4}+iT\right)\right.\right)}-\zeta\left(M_{-Q}\left|\alpha+\left(\frac{3}{4}+iT\right)\right.\right)\right|<\varepsilon\max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}}\left|\frac{1}{\zeta\left(M_{+Q}\left|\alpha+\frac{3}{4}+iT\right.\right)}\right|.$$

Применяя лемму 4, получим утверждение теоремы. □

9. Заключение

Теория дзета-функций моноидов натуральных чисел входит как составная часть в более общую теорию Алгебры рядов Дирихле моноида натуральных чисел.

Представляет интерес, например, исследование подалгебры рядов Дирихле, сходящихся на всей комплексной плоскости. Другая интересная алгебра образована рядами Дирихле, которые имеют аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость.

С помощью теоремы универсальности С. М. Воронина удалось доказать слабую форму теоремы универсальности для широкого класса дзета-функций моноидов натуральных чисел. Было бы интересно выяснить какие элементы доказательства С. М. Воронина непосредственно переносятся на этот класс дзета-функций моноидов натуральных чисел?

Интересно заметить, что как показано в работе [8] среди дзета-функций моноидов натуральных чисел, для которых справедлива слабая теорема универсальности, есть те, для которых область голоморфности совпадает со всей α-полуплоскостью $\sigma > 0$, кроме точки $\alpha = 1$, где у них полюс первого порядка. Таким образом, они продолжаются в лево от полуплоскости абсолютной сходимости, но не на всю плоскость. Если верна гипотеза Линника–Ибрагимова [13], то для них должна быть справедлива и сильная теорема универсальности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронин С. М. Теорема об "универсальности" дзета-функции Римана // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1975. — Т. 39, № 3. — С. 475–486.

2. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.

3. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.

4. Демидов С. С., Морозова Е. А., Чубариков В. Н., Реброва И. Ю., Балаба И. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М., Добровольская Л. П., Родионов А. В., Пихтилькова О. А. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. — Т. 18, вып. 4. — С. 6–85.

5. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.

6. Добровольский Н. Н. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 79–105.

7. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 142–150.

8. Добровольский Н. Н. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. — Т. 20, вып. 1, С. 148–163.

9. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.
10. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 123–141.
11. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 3. — С. 95–108.
12. Дубицкас А., Мацайтене Р. Некоторые моменты из жизни Антанаса Лауринчикаса: в поисках Универсальности // Чебышевский сборник. 2019. — Т. 20, вып. 1, с. 6–45.
13. Лауринчикас А. П., Матсумото К., Стеудинг Й. "Универсальность L-функций, связанных с новыми формами". Изв. РАН. Сер. матем. — Т. 67, № 1 (2003). — С. 83–98; Izv. Math., 67:1 (2003). — P. 77–90.
14. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. — 188 с.
15. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L-функций Дирихле. — М. – Л.: ОГИЗ, 1947. — 204 с.

REFERENCES

1. Voronin, S. M. 1975, "Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function", *Math. USSR Izv.*, vol. 9, pp. 443–453.
2. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, *Dzeta-funkcija Rimana*, Izd-vo Fiz-matlit, Moskva, 376 p.
3. Gurvic A., Kurant R., 1968, *Teorija funkcij*, Izd-vo Nauka, Moskva, 618 p.
4. Demidov S. S., Morozova E. A., Chubarikov V. N., Rebrov I. Yu., Balaba I. N., Dobrovol'skii N. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovol'skaya L. P., Rodionov A. V., Pikhtil'kova O. A., 2017, "Number-theoretic method in approximate analysis" *Chebyshevskii Sbornik* vol. 18, № 4. pp. 6–85.
5. Dobrovol'skaja L. P., Dobrovol'skij M. N., Dobrovol'skij N. M., Dobrovol'skij N. N., 2012, "Giperbolicheskie dzeta-funkcii setok i reshjotok i vychislenie optimal'nyh kojefficientov" *Chebyshevskii Sbornik* vol 13, №4(44) pp. 4–107.
6. Dobrovol'skij M. N., 2007, "Funkcional'noe uravnenie dlja giperbolicheskoj dzeta-funkcii celochislennyh reshetok" , *Doklady akademii nauk*, vol 412, № 3, pp. 302–304.
7. Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Soboleva V. N., Sobolev D. K., Dobrovol'skaya L. P., Bocharova O. E., 2016, "On hyperbolic Hurwitz zeta function" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol 17, № 3 pp. 72–105.
8. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices" , *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

Получено 4.12.2018 г.
Принято в печать 10.04.2019 г.