ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 1.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-164-178

Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе[1]

Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета математики, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Родионов Александр Валерьевич — старший преподаватель кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Аннотация

В работе для каждого моноида M натуральных чисел определён новый класс периодических функций M_s^α, который является подклассом известного класса Коробова периодических функций E_s^α. Относительно нормы $\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}$ класс M_s^α является несепарабельным банаховым подпространством класса E_s^α.

Установлено, что класс M_s^α замкнут относительно действия интегрального оператора Фредгольма и на этом классе разрешимо интегральное уравнение Фредгольма второго рода. В работе получены оценки нормы образа интегрального оператора, которые содержат норму ядра и s-ю степень дзета-функции моноида M. Получены оценки на параметр λ, при которых интегральный оператор $A_{\lambda,f}$ является сжатием. Доказана теорема о представлении единственного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода в виде ряда Неймана.

В работе рассмотрены вопросы решения дифференциального уравнения с частными производными с дифференциальным оператором $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)$ в пространстве M_s^α, который зависит от арифметических свойств спектра этого оператора.

В работе обнаружен парадоксальный факт, что для моноида $M_{q,1}$ чисел сравнимых с 1 по модулю q квадратурная формула с параллелепипедальной сеткой для допустимого набора коэффициентов по модулю q точна на классе $M_{q,1,s}^\alpha$. Более того, это утверждение остается верным и для класса $M_{q,a,s}^\alpha$ с $1 < a < q$, когда q — простое число. Так как функции из класса $M_{q,a,s}^\alpha$ с $1 < a < q$ не имеют нулевого коэффициента Фурье $C(\vec{0})$, то при простом

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.

q сумма значений функции по узлам соответствующей параллелепипедальной сетки будет нулевой.

Ключевые слова: классы функций, квадратурные формулы, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов. Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 164–178.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 1.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-164-178

Monoids of natural numbers in the numerical-theoretical method in the approximate analysis[2]

N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionov

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University; associate Professor of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor, dean of the faculty of mathematics, physics and computer science, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Rodionov Alexandr Valer'evich — senior lecturer of the Department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.
e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Abstract

For every monoid M of natural numbers defined a new class of periodic functions M_s^α, which is a subclass of a known class of periodic functions Korobov E_s^α. With respect to the norm $\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}$, the class M_s^α is an inseparable Banach subspace of class E_s^α.

It is established that the class M_s^α is closed with respect to the action of the Fredholm integral operator and the Fredholm integral equation of the second kind is solvable on this class.

In this paper we obtain estimates of the image norm of the integral operator, which contain the kernel norm and the s-th degree of the Zeta function of the monoid M. Estimates are obtained for the parameter λ, in which the integral operator $A_{\lambda,f}$ is a compression. The theorem

[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

on the representation of the unique solution of Fredholm integral equation of the second kind in the form of Neumann series is proved.

The paper deals with the problems of solving the partial differential equation with the differential operator $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)$ in the space M_s^α, which depends on the arithmetic properties of the spectrum of this operator.

A paradoxical fact is found that for a monoid $M_{q,1}$ of numbers comparable to 1 modulo q, a quadrature formula with a parallelepiped grid for an admissible set of coefficients modulo q is exact on the class $M^\alpha_{q,1,s}$. Moreover, this statement remains true for the class $M^\alpha_{q,a,s}$ with $1 < a < q$ when q is a Prime number. Since the functions of class $M^\alpha_{q,a,s}$ with $1 < a < q$ do not have a zero Fourier coefficient $C(\vec{0})$, then for a simple q the sum of the function values at the nodes of the corresponding parallelepipedal grid will be zero.

Keywords: classes of functions, quadrature formulas, Dirichlet series, zeta function of the monoid of natural numbers.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionov, 2019, "Monoids of natural numbers in the numerical-theoretical method in the approximate analysis" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 164–178.

Посвящается 70-летию академика Литовской АН,
профессора Антанаса Лауринчикаса

1. Введение

В данной работе преследуется цель — показать, что теория дзета-функций моноидов натуральных чисел связана с теоретико-числовым методом в приближенном анализе. Для этого вводится новый класс периодических функций многих переменных M_s^α, соответствующий моноиду M натуральных чисел, у которого множество номеров экспонент, входящих в комплексный ряд Фурье, задается этим мультипликативным моноидом натуральных чисел. В результате мы получаем некоторый подкласс известного класса периодических функций многих переменных E_s^α. Относительно нормы $\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}$ класс M_s^α является несепарабельным банаховым подпространством.

Как известно, класс $\mathfrak{E}_s$ определяется как объединение всех классов E_s^α при $\alpha > 1$. С одной стороны, класс $\mathfrak{E}_s$ состоит из непрерывных периодических функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье. С другой стороны он замкнут относительно действия интегральных операторов Фредгольма и подкласс дифференцируемых функций при действии дифференциальных операторов переходит в некоторый подкласс класса $\mathfrak{E}_s$.

Целью данной статьи является перенос этих свойств на новый класс функций.

2. Моноиды натуральных чисел и классы периодических функций

Пусть M — произвольный моноид натуральных чисел. Определим класс функций M_s^α следующим образом. Этот класс периодических функций состоит из функций $f(\vec{x})$, которые задаются многомерным рядом Фурье вида[3]

$$f(\vec{x}) = \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,\\ \overline{m_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} C(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} = \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,\\ \overline{m_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} \frac{c(\vec{m})}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha}e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

[3]Здесь и далее для вещественных m полагаем $\overline{m} = \max(1, |m|)$.

где коэффициенты Фурье удовлетворяют неравенствам

$$|C(\vec{m})| \leqslant \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha}$$

и

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = \sup_{\overline{m_\nu} \in M,\, (\nu=1,\ldots,s)} |C(\vec{m})|(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha = \sup_{\overline{m_\nu} \in M,\, (\nu=1,\ldots,s)} |c(\vec{m})| < \infty.$$

Если σ_M — абсцисса абсолютной сходимости дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ моноида натуральных чисел M, то для любого $\alpha > \sigma_M$ ряд Фурье для функции $f(\vec{x}) \in M_s^\alpha$ абсолютно и равномерно сходится для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$.

Таким образом, справедливо вложение $M_s^\alpha \subset \mathfrak{A}_s$, где $\mathfrak{A}_s$ — пространство периодических функций от s переменных с абсолютно сходящимся рядом Фурье.

Рассмотрим пространство $\mathfrak{M}_s$ периодических функций от s переменных, заданное равенством $\mathfrak{M}_s = \bigcup_{\alpha > \sigma_M} M_s^\alpha$. Ясно, что $\mathfrak{M}_s \subset \mathfrak{A}_s$.

Нетрудно видеть, что для нормы $\|f(\vec{x})\|_C = \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^s} |f(\vec{x})|$ справедливо неравенство

$$\|f(\vec{x})\|_C \leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \left(1 + 2\zeta(M|\alpha)\right)^s.$$

Рассмотрим оператор вложения $\mathbb{A}_{\alpha_1,\alpha_2}$ пространства $M_s^{\alpha_1}$ в пространство $M_s^{\alpha_2}$ при $\alpha_1 > \alpha_2$. Естественно, что нормой оператора вложения $\mathbb{A}_{\alpha_1,\alpha_2}$ называется величина, определяемая равенством

$$\|\mathbb{A}_{\alpha_1,\alpha_2}\| = \sup_{f(\vec{x}) \in M_s^{\alpha_1}} \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_2}}}{\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_1}}}.$$

Лемма 1. *Для любых $\alpha_1 > \alpha_2 > \sigma_M$ для нормы оператора вложения пространства $M_s^{\alpha_1}$ в пространство $M_s^{\alpha_2}$ справедливо равенство*

$$\|\mathbb{A}_{\alpha_1,\alpha_2}\| = 1.$$

Доказательство. Действительно, если $f(\vec{x}) = C$, то $\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_2}} = \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_1}} = C$ и, значит, $\|\mathbb{A}_{\alpha_1,\alpha_2}\| \geqslant 1$.

С другой стороны, если $f(\vec{x}) \in M_s^{\alpha_1}$ и

$$f(\vec{x}) = \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,\\ \overline{m_\nu} \in M,\, (\nu=1,\ldots,s)}} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

то

$$|C(\vec{m})| \leqslant \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_1}}}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^{\alpha_1}},$$

поэтому

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_2}} = \sup_{\overline{m_\nu} \in M,\, (\nu=1,\ldots,s)} |C(\vec{m})|(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^{\alpha_2} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\overline{m_\nu} \in M,\, (\nu=1,\ldots,s)} \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_1}} (\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^{\alpha_2}}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^{\alpha_1}} \leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_1}}$$

и $\|\mathbb{A}_{\alpha_1,\alpha_2}\| \leqslant 1$. Следовательно, $\|\mathbb{A}_{\alpha_1,\alpha_2}\| = 1$. □

Очевидно, что для любого $\alpha > 1$ пространство периодических функций M_s^α является подпространством периодических функций E_s^α. Соответствующий оператор вложения будем обозначать через $\mathbb{A}_\alpha$. Ясно, что этот оператор имеет единичную норму: $\|\mathbb{A}_\alpha\| = 1$.

3. Замкнутость относительно оператора Фредгольма

Одним из важных классов интегральных уравнений является уравнение Фредгольма второго рода, то есть уравнение вида

$$\varphi\left(\vec{t}\right)=\lambda\iint\limits_{G_s}K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)\varphi\left(\vec{u}\right)d\vec{u}+f\left(\vec{t}\right),\tag{1}$$

где $G_s=[0;1)^s$.

Характерная особенность уравнения (1) — его линейность: неизвестная функция φ входит в него линейно.

Мы будем исследовать уравнение (1) для случая, когда свободный член $f\left(\vec{t}\right)$ и ядро $K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)$ этого уравнения принадлежат, соответственно, классам $M_s^\alpha(C_1)$ и $M_{2s}^\alpha(C_2)$.

Первые работы по применению теоретико-числовых методов для приближённого решения уравнение (1) принадлежат Н. М. Коробову (см. [10], [12]).

Сопоставим уравнению (1) оператор $A_{\lambda,f}$, определяемый равенством:

$$A_{\lambda,f}\varphi\left(\vec{t}\right)=g\left(\vec{t}\right).$$

Это означает, что:

$$g\left(\vec{t}\right)=A_{\lambda,f}\varphi\left(\vec{t}\right)=\lambda\iint\limits_{G_s}K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)\varphi(\vec{u})d\vec{u}+f\left(\vec{t}\right).\tag{2}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $\alpha>\sigma_M$, $K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)\in M_{2s}^\alpha$; $f\left(\vec{t}\right),\varphi\left(\vec{t}\right)\in M_s^\alpha$ тогда*

$$A_{\lambda,f}\varphi\left(\vec{t}\right)\in M_s^\alpha$$

и

$$||A_{\lambda,f}\varphi\left(\vec{t}\right)||_{E_s^\alpha}\leqslant||f\left(\vec{t}\right)||_{E_s^\alpha}+|\lambda|\cdot||K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)||_{E_{2s}^\alpha}\cdot||\varphi\left(\vec{t}\right)||_{E_s^\alpha}\cdot(1+2\zeta(M|2\alpha))^s.$$

Доказательство. Пусть $C_2=||K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)||_{E_{2s}^\alpha}$, $C_1=||f\left(\vec{t}\right)||_{E_s^\alpha}$, $C=||\varphi\left(\vec{t}\right)||_{E_s^\alpha}$, тогда

$$K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)=\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,n_1,\ldots,n_s\\ \overline{m_\nu},\overline{n_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}}C(\vec{m},\vec{n})e^{2\pi i((\vec{m},\vec{t})+(\vec{n},\vec{u}))},\qquad |C(\vec{m},\vec{n})|\leqslant\frac{C_2}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s\overline{n}_1\ldots\overline{n}_s)^\alpha};$$

$$f\left(\vec{t}\right)=\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,\\ \overline{m_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}}C_1(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{t})},\qquad |C_1(\vec{m})|\leqslant\frac{C_1}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha};$$

$$\varphi\left(\vec{t}\right)=\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,\\ \overline{m_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}}C(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{t})},\qquad |C(\vec{m})|\leqslant\frac{C}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}.$$

Подставим данные равенства в соотношение (2):

$$g\left(\vec{t}\right)=\lambda\iint\limits_{G_s}\left(\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,n_1,\ldots,n_s\\ \overline{m_\nu},\overline{n_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}}C(\vec{m},\vec{n})e^{2\pi i((\vec{m},\vec{t})+(\vec{n},\vec{u}))}\right)\left(\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_s,\\ \overline{k_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}}C(\vec{k})e^{2\pi i(\vec{k},\vec{u})}\right)d\vec{u}+$$
$$+\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,\\ \overline{m_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}}C_1(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{t})}.$$

Перемножим абсолютно сходящиеся ряды и почленно проинтегрируем их произведение, получим:

$$g\left(\vec{t}\right)=\lambda\sum_{\substack{\vec{m},\vec{n},\vec{k}\\ \overline{m_\nu},\overline{n_\nu},\overline{k_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} C(\vec{m},\vec{n})C(\vec{k})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{t})}\iint\limits_{G_s} e^{2\pi i(\vec{n}+\vec{k},\vec{u})}d\vec{u}+\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,\\ \overline{m_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} C_1(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{t})}.$$

Так как

$$\iint\limits_{G_s} e^{2\pi i(\vec{n}+\vec{k},\vec{u})}d\vec{u}=\begin{cases}1 & \text{при} \quad \vec{n}+\vec{k}=\vec{0},\\ 0 & \text{при} \quad \vec{n}+\vec{k}\neq\vec{0},\end{cases}$$

то для $g\left(\vec{t}\right)$ справедливо равенство:

$$g\left(\vec{t}\right)=\lambda\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,n_1,\ldots,n_s\\ \overline{m_\nu},\overline{n_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} C(\vec{m},\vec{n})C(-\vec{n})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{t})}+\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,\\ \overline{m_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} C_1(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{t})}=$$

$$=\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,\\ \overline{m_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}}\left(C_1(\vec{m})+\lambda\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_s,\\ \overline{n_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} C(\vec{m},\vec{n})C(-\vec{n})\right)e^{2\pi i(\vec{m},\vec{t})}=$$

$$=\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,\\ \overline{m_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} C_2(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{t})}.$$

Оценим модуль коэффициента $C_2(\vec{m})$.

$$|C_2(\vec{m})|=|C_1(\vec{m})+\lambda\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_s,\\ \overline{n_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} C(\vec{m},\vec{n})C(-\vec{n})|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_1}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}+\lambda\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_s,\\ \overline{n_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}}\frac{C_2}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s\overline{n}_1\ldots\overline{n}_s)^\alpha}\frac{C}{(\overline{-n_1}\ldots\overline{-n_s})^\alpha}=$$

$$=\frac{1}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}\left(C_1+\lambda C_2C\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_s,\\ \overline{n_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}}\frac{1}{(\overline{n}_1\ldots\overline{n}_s)^{2\alpha}}\right)=\frac{C_1+\lambda C_2C(1+2\zeta(M|2\alpha))^s}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}.$$

Таким образом показано, что функция $g\left(\vec{t}\right)=A_{\lambda,f}\varphi\left(\vec{t}\right)$ принадлежит классу M_s^α и

$$\|g\left(\vec{t}\right)\|_{E_s^\alpha}\leqslant\|f\left(\vec{t}\right)\|_{E_s^\alpha}+\lambda\cdot(1+2\zeta(M|2\alpha))^s\cdot\|\varphi\left(\vec{t}\right)\|_{E_s^\alpha}\cdot\|K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)\|_{E_{2s}^\alpha}.$$

А, следовательно, доказано, что оператор $A_{\lambda,f}$ при достаточно малом λ является сжимающим отображением. □

Лемма 3. *Пусть* $|\lambda|\leqslant\frac{q}{\|K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)\|_{E_s^\alpha}(1+2\zeta(M|2\alpha))^s}$ *и* $q<1$ *тогда оператор* $A_{\lambda,f}$ *является сжатием, то есть*

$$\|A_{\lambda,f}\varphi_1-A_{\lambda,f}\varphi_2\|_{E_s^\alpha}\leqslant q\|\varphi_1-\varphi_2\|_{E_s^\alpha}.$$

Доказательство. Обозначим через A_λ оператор $A_{\lambda,f}$ при $f\equiv 0$. Из определения A_λ следует , что это линейный оператор и

$$A_{\lambda,f}\varphi\left(\vec{t}\right)=A_\lambda\varphi\left(\vec{t}\right)+f\left(\vec{t}\right)$$

Отсюда следует, что:

$$A_{\lambda,f}\varphi_1-A_{\lambda,f}\varphi_2=A_\lambda\varphi_1-A_\lambda\varphi_2=A_\lambda(\varphi_1-\varphi_2)$$

Применяя лемму 2 при $f \equiv 0$, получим

$$\|A_\lambda(\varphi_1-\varphi_2)\|_{E_s^\alpha} \leqslant |\lambda|((1+2\zeta(M|2\alpha))^s)\|\varphi_1\left(\vec{t}\right)-\varphi_2\left(\vec{t}\right)\|_{E_s^\alpha}\cdot\|K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)\|_{E_{2s}^\alpha}.$$

Тогда при

$$|\lambda| \leqslant \frac{q}{\|K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)\|_{E_s^\alpha}(1+2\zeta(M|2\alpha))^s}$$

справедливо неравенство:

$$\|A_{\lambda,f}\varphi_1 - A_{\lambda,f}\varphi_2\|_{E_s^\alpha} \leqslant q\|\varphi_1-\varphi_2\|_{E_s^\alpha},$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 1. *Пусть $q<1$ и*

$$|\lambda| \leqslant \frac{q}{\|K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)\|_{E_s^\alpha}(1+2\zeta(M|2\alpha))^s}. \tag{3}$$

Тогда уравнение Фредгольма (1) имеет единственное решение и для него справедливо представление в виде ряда Неймана

$$\varphi\left(\vec{t}\right) = f\left(\vec{t}\right) + \sum_{\vec{k}=1}^{\infty}\lambda^k \iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\dots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\dots d\vec{u}_k.$$

Доказательство. Так как согласно лемме (2) при λ, удовлетворяющем условию (3) оператор $A_{\lambda,f}$ является сжатием полного пространства E_s^α, то он имеет единственную неподвижную точку, то есть уравнение

$$A_{\lambda,f}\varphi\left(\vec{t}\right) = \varphi\left(\vec{t}\right)$$

имеет единственное решение. Но это и означает, что $\varphi\left(\vec{t}\right)$ решение уравнения(1).

Как известно, для любой точки x_0 полного пространства E и сжимающего отображения A последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = A^n x_0$, сходится к неподвижной точке оператора A в норме пространства E. Применяя это к пространству $E = E_s^\alpha$, оператору $A = A_{\lambda,f}$, точке $x_0 = f\left(\vec{t}\right)$ и норме $\|\cdot\|_{E_s^\alpha}$, получим, что

$$A_{\lambda,f}^n f\left(\vec{t}\right) \to \varphi\left(\vec{t}\right)$$

где φ — решение уравнения (1). То есть

$$\|\varphi - A_{\lambda,f}^n f\|_{E_s^\alpha} \to 0, \text{ при } n\to\infty. \tag{4}$$

Так как

$$\|g(\vec{x})\|_C \leqslant (1+2\zeta(2\alpha))^s\|g(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}$$

для любой функции $g(\vec{x}) \in E_s^\alpha$, то из (4) следует, что

$$\|\varphi - A_{\lambda,f}^n f\|_C \to 0, \quad n\to\infty.$$

Другими словами, последовательность $A_{\lambda,f}^n f$ равномерно сходится к решению уравнения (1).

Докажем по индукции, что

$$A_{\lambda,f}^n f = f\left(\vec{t}\right) + \sum_{k=1}^{n}\lambda^k \iint\limits_{G_{sk}} K_s\left(\vec{t},\vec{u}_1\right)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\dots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\dots d\vec{u}_k. \tag{5}$$

Действительно, (5) справедливо при $n=1$, так как

$$A_{\lambda,f}f = f\left(\vec{t}\right) + \lambda \iint\limits_{G_s} K_s\left(\vec{t},\vec{u}\,\right) f(\vec{u})d\vec{u}.$$

Далее имеем:

$$A^{n+1}_{\lambda,f}f = A_{\lambda,f}(A^n_{\lambda,f}f) =$$

$$= A_{\lambda,f}\left(f\left(\vec{t}\right) + \sum_{k=1}^{n}\lambda^k \iint\limits_{G_s} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\ldots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\ldots d\vec{u}_k\right) =$$

$$= f\left(\vec{t}\right) + A_{\lambda}\left(f\left(\vec{t}\right) + \sum_{k=1}^{n}\lambda^k \iint\limits_{G_s} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\ldots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\ldots d\vec{u}_k\right)=$$

$$= f\left(\vec{t}\right) + \lambda \iint\limits_{G_s} K_s\left(\vec{t},\vec{u}\,\right) f(\vec{u})d\vec{u}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\lambda^{k+1} \iint\limits_{G_s} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)\left(\iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\ldots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_{k+1})f(\vec{u}_{k+1})d\vec{u}_2\ldots d\vec{u}_{k+1}\right)d\vec{u}_1.$$

Так как для непрерывных функций порядок интегрирования произвольный, то

$$\iint\limits_{G_s} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)\left(\iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\ldots K_s(\vec{u}_k,\vec{u}_{k+1})f(\vec{u}_{k+1})d\vec{u}_2\ldots d\vec{u}_{k+1}\right)d\vec{u}_1 =$$

$$= \iint\limits_{G_{(k+1)s}} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\ldots K_s(\vec{u}_k,\vec{u}_{k+1})f(\vec{u}_{k+1})d\vec{u}_1\ldots d\vec{u}_{k+1}.$$

Из равномерной сходимости последовательности $A_{\lambda,f}f$ следует, что

$$\varphi\left(\vec{t}\right) = f\left(\vec{t}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k \iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\ldots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\ldots d\vec{u}_k,$$

и этот ряд равномерно сходится на G_s. Теорема полностью доказана. □

Следствие 1. *Пусть выполняется условие теоремы, тогда для решения уравнения (1) справедливо соотношение*

$$\varphi\left(\vec{t}\right) = f\left(\vec{t}\right) + \sum_{k=1}^{n}\lambda^k \iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\ldots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\ldots d\vec{u}_k+$$

$$+\frac{q^{n+1}\cdot\Theta\cdot\|f(\vec{t})\|_{E^\alpha_s}}{1-q}, \quad \text{\textit{где}} \quad |\Theta| \leqslant (1+2\zeta(2\alpha))^s.$$

Доказательство.

$$\lambda^k \iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\ldots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\ldots d\vec{u}_k = A^k_\lambda f\left(\vec{t}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^k \iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\ldots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\ldots d\vec{u}_k \right\|_{E_s^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A_\lambda^k f\left(\vec{t}\right)\|_{E_s^\alpha}.$$

Так как A_λ линейный оператор и для его нормы $\|A_\lambda\|$ по лемме (1) справедливо неравенство

$$\|A_\lambda\| \leqslant |\lambda| \|K_s\left(\vec{t},\vec{u}\right)\|_{E_2 s^\alpha} \cdot (1+2\zeta(M|2\alpha))^s \leqslant q, \quad \text{то} \quad \|A_\lambda^n\| \leqslant \|A_\lambda\|^n \leqslant q^n.$$

Поэтому

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^k \iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\ldots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\ldots d\vec{u}_k \right\|_{E_s^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} q^k ||f\left(\vec{t}\right)||_{E_s^\alpha} = \frac{q^{n+1}||f(\vec{t})||_{E_s^\alpha}}{1-q}.$$

Отсюда следует, что

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^k \iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{t},\vec{u}_1)K_s(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\ldots K_s(\vec{u}_{k-1},\vec{u}_k)f(\vec{u}_k)d\vec{u}_1\ldots d\vec{u}_k \right\|_{C} \leqslant$$

$$\leqslant (1+2\zeta(2\alpha))^s \frac{q^{n+1}||f(\vec{t})||_{E_s^\alpha}}{1-q},$$

чем следствие полностью доказано. □

4. Дифференциальные свойства классов M_s^α

Как хорошо известно, теоретико-числовые методы применимы для решения уравнений с частными производными [11, 13, 14, 15].

Рассмотрим

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right) = \sum_{j_1=0}^{n_1}\ldots\sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1,\ldots,j_s}\frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}}\cdots\frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}} \tag{6}$$

— дифференциальный оператор порядка $n(Q) = n_1+\ldots+n_s$, с максимальным порядком по отдельным переменным, не превосходящим $m(Q) = \max(n_1,\ldots,n_s)$, а $\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1,\ldots,x_s)$ — периодическая с периодом единица по каждому из своих аргументов функция из класса M_s^α $(\alpha > m(Q)+1)$.[4]

Таким образом,

$$\varphi(x_1,\ldots,x_s) = \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s,\\ \overline{m_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)}} c_{m_1,\ldots,m_s} e^{2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_sx_s)} \tag{7}$$

[4]Условие на α гарантирует, что ряд Фурье для образа $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)\varphi(\vec{x})$, полученный почленным дифференцированием, равномерно и абсолютно сходится.

и для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$|c_{m_1,\ldots,m_s}| \leqslant \frac{\|\varphi\|_{E_s^\alpha}}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha}. \tag{8}$$

Величина

$$\|\varphi\|_{E_s^\alpha} = \sup_{m_1,\ldots,m_s} |c_{m_1,\ldots,m_s}(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha| < \infty \tag{9}$$

является нормой на пространстве M_s^α, относительно которой оно является несепарабельным банаховым пространством.

В своей работе В. С. Рябенький предложил некоторый общий подход численного решения задачи Коши с использованием произвольных сеток, для которых выполнены специальные условия, и показал, что его конструкция применима для многомерных кубических сеток, которые ещё называют равномерными, и для параллелепипедальных сеток Н. М. Коробова.

Прежде всего найдем собственные функции и ядро дифференциального оператора

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right).$$

Положим

$$M_s = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \,|\, \overline{m_\nu} \in M,\ (\nu = 1,\ldots,s)\}.$$

Для любого $\vec{m} \in M_s$ зададим величины $Q(\vec{m})$ равенствами

$$Q(\vec{m}) = \sum_{j_1=0}^{n_1}\ldots\sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1,\ldots,j_s}(2\pi i)^{j_1+\ldots+j_s} m_1^{j_1}\ldots m_s^{j_s} = \sum_{j=0}^{n(Q)} A_j(\vec{m})(2\pi i)^j, \tag{10}$$

$$A_j(\vec{m}) = \sum_{j_1+\ldots+j_s=j} a_{j_1,\ldots,j_s} m_1^{j_1}\ldots m_s^{j_s}. \tag{11}$$

Заметим, что если все коэффициенты $a_{j_1,\ldots,j_s}$ — алгебраические числа, то в силу трансцендентности числа π величина $Q(\vec{m}) = 0$ тогда и только тогда, когда $A_j(\vec{m}) = 0$, для всех $j = 0,\ldots,n(Q)$.

Лемма 4. *Для любого $\vec{m} \in M_s$ функция $e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}$ является собственной функцией оператора $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)$ с собственным числом $Q(\vec{m})$, если $Q(\vec{m}) \neq 0$, или принадлежит ядру Ker_Q оператора, если $Q(\vec{m}) = 0$.*

Доказательство. Действительно,

$$\frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}}\ldots\frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} = (2\pi i)^{j_1+\ldots+j_s} m_1^{j_1}\ldots m_s^{j_s} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

Поэтому

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} =$$
$$= \sum_{j_1=0}^{n_1}\ldots\sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1,\ldots,j_s}(2\pi i)^{j_1+\ldots+j_s} m_1^{j_1}\ldots m_s^{j_s} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} =$$
$$= Q(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Будем использовать обозначение $\mathbb{K}er_Q$ для самого ядра оператора, а для множества значений $\vec{m}$, для которых $e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} \in \mathbb{K}er_Q$ будем использовать обозначение Ker_Q.

Пусть $S \subset M_s$ — произвольное конечное множество целочисленных векторов $\vec{m}$. Обозначим через $\mathbb{T}_0(S)$ — пространство всех тригонометрических многочленов с постоянными коэффициентами

$$\mathbb{T}_0(S) = \left\{ P(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in S} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} \middle| b_{\vec{m}} \in \mathbb{C},\, \vec{m} \in S \right\}.$$

Очевидно, что если $f(\vec{x}) \in \mathbb{K}er_Q$ и $f(\vec{x}) \neq 0$, то уравнение

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) = f(\vec{x}) \tag{12}$$

не имеет решений. Более того, пространство $\mathbb{T}_0(S)$ можно представить как прямую сумму подпространств

$$\mathbb{T}_0(S) = \mathbb{T}_0\left(S \setminus Ker_Q\right) \bigoplus \mathbb{T}_0\left(S \bigcap Ker_Q\right)$$

и уравнение (12) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$f(\vec{x}) \in \mathbb{T}_0\left(S \setminus Ker_Q\right).$$

Теорема 2. *Для пространства $\mathbb{T}_0(S)$ общим решением дифференциального уравнения*

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) = f(\vec{x}),$$

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in S\setminus Ker_Q} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} \in \mathbb{T}_0\left(S \setminus Ker_Q\right), \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \ldots, s) \tag{13}$$

является тригонометрический многочлен

$$u(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in S\setminus Ker_Q} \frac{b_{\vec{m}}}{Q(\vec{m})} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} + \sum_{\vec{m}\in S\bigcap Ker_Q} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}, \tag{14}$$

где $c_{\vec{m}}$ — произвольные числа.

Доказательство. Рассмотрим произвольный многочлен $u(\vec{x}) \in \mathbb{T}_0(S)$:

$$u(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in S} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

Тогда

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in S} c_{\vec{m}} Q(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} =$$
$$= \sum_{\vec{m}\in S\setminus Ker_Q} c_{\vec{m}} Q(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} = f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in S\setminus Ker_Q} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

Таким образом, приравнивая коэффициенты тригонометрических многочленов слева и справа, получим

$$c_{\vec{m}} = \frac{b_{\vec{m}}}{Q(\vec{m})}$$

для каждого $\vec{m} \in S \setminus Ker_Q$ и $c_{\vec{m}}$ — произвольное число, если $\vec{m} \in S \bigcap Ker_Q$, что и доказывает утверждение теоремы. $\square$

Вопрос о переходе от пространства $\mathbb{T}_0(S)$ к пространству M_s^α требует дополнительного анализа, так как связан с арифметическими свойствами спектра дифференциального оператора $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$ на пространстве M_s^α, от которых зависит сходимость тригонометрического ряда формального решения

$$\sum_{\vec{m} \in M_s \setminus Ker_Q} \frac{b_{\vec{m}}}{Q(\vec{m})} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} + \sum_{\vec{m} \in Ker_Q} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}$$

для произвольной функции

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M_s \setminus Ker_Q} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} \in M_s^\alpha.$$

5. О погрешности квадратурных формул на классе M_s^α для некоторых моноидов M

Пусть $q > 3^s$ и моноид $M = M_{q,1}$, состоящий из натуральных чисел сравнимых с 1 по модулю q:

$$M_{q,1} = \{m \,|\, m \equiv 1 \pmod q\}.$$

Рассмотрим квадратурную формулу с параллелепипедальной сеткой

$$\left(\frac{k}{q}, \left\{\frac{a_1 k}{q}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{q}\right\}\right) \quad k = 0, 1, \ldots, q-1$$

на классе M_s^α:

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{k=0}^{q-1} f\left(\frac{k}{q}, \left\{\frac{a_1 k}{q}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{q}\right\}\right) - R_q[f(\vec{x})], \quad f(\vec{x}) \in M_s^\alpha. \tag{15}$$

Если

$$f(\vec{x}) = \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_s, \\ \overline{m_\nu} \in M, \, (\nu=1,\ldots,s)}} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} = \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_s, \\ \overline{m_\nu} \in M, \, (\nu=1,\ldots,s)}} \frac{c(\vec{m})}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

то для погрешности приближенного интегрирования $R_q[f(\vec{x})]$ справедливо равенство

$$R_q[f(\vec{x})] = \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_s, \vec{m} \neq \vec{0}, \\ \overline{m_\nu} \in M, \, (\nu=1,\ldots,s)}} \frac{c(\vec{m})}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha} \delta_q(m_1 + a_1 m_2 + \ldots + a_{s-1} m_s),$$

где символ Коробова $\delta_q(m)$ задан равенствами

$$\delta_q(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 0 \pmod q, \\ 0, & \text{если } m \not\equiv 0 \pmod q. \end{cases}$$

Назовём набор коэффициентов $(a_1, \ldots, a_{s-1})$ допустимым по модулю q, если для любого набора $1 \leqslant \nu_1 < \ldots < \nu_k \leqslant s-1$ при $k = 1, \ldots, s-1$ выполнены соотношения

$$\pm a_{\nu_1} \pm \ldots \pm a_{\nu_k} \not\equiv 1 \pmod q, \quad \pm a_{\nu_1} \pm \ldots \pm a_{\nu_k} \not\equiv 0 \pmod q.$$

Теорема 3. *Для любого допустимого набора* $(a_1, \ldots, a_{s-1})$ *по модулю* q *квадратурная формула (15) точна на классе* M_s^α.

Доказательство. Действительно, так как $\overline{m_\nu} \in M$, то либо $m_\nu \equiv \pm 1 \pmod q$, либо $m_\nu = 0$. Обозначим набор $1 \leqslant \nu_1 < \ldots < \nu_k \leqslant s-1$ при $k = 1, \ldots, s-1$ таких значений ν, что $m_{\nu+1} \equiv \pm 1 \pmod q$, а для всех остальных $\nu > 0$ имеем $m_{\nu+1} = 0$.

Если $m_1 = 0$, то из равенства $\delta_q(m_1 + a_1 m_2 + \ldots + a_{s-1} m_s) = 1$ следует, что $\pm a_{\nu_1} \pm \ldots \pm a_{\nu_k} \equiv 0 \pmod q$. Если $m_1 \equiv \pm 1 \pmod q$, то $\pm a_{\nu_1} \pm \ldots \pm a_{\nu_k} \equiv \mp 1 \pmod q$. Но оба сравнения невозможны, так как набор $(a_1, \ldots, a_{s-1})$ допустимый. Следовательно, в сумме для погрешности приближенного интегрирования все слагаемые нулевые и теорема доказана. □

Доказанная теорема, а точнее метод её доказательства, позволяет получить утверждение для любой оптимальной параллелепипедальной сетки, для которой гиперболический параметр больше 1.

Пусть $\Lambda(a_1, \ldots, a_{s-1}; q)$ целочисленная решётка решений линейного сравнения:

$$\Lambda(a_1, \ldots, a_{s-1}; q) = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s |\, m_1 + a_1 m_2 + \ldots + a_{s-1} m_s \equiv 0 \pmod q\}$$

и $q(\Lambda(a_1, \ldots, a_{s-1}; q))$ — гиперболический параметр этой решётки, то есть

$$q(\Lambda(a_1, \ldots, a_{s-1}; q)) = \min_{\vec{m} \in \Lambda(a_1, \ldots, a_{s-1}; q),\, \vec{m} \neq \vec{0}} \overline{m_1} \ldots \overline{m_s}.$$

Теорема 4. *Для любого оптимального набора* $(a_1, \ldots, a_{s-1})$ *по модулю* q *с*

$$q(\Lambda(a_1, \ldots, a_{s-1}; q)) > 1$$

квадратурная формула (15) точна на классе M_s^α.

Доказательство. Действительно, если $q(\Lambda(a_1, \ldots, a_{s-1}; q)) > 1$, то ни один набор $(m_1, \ldots, m_s)$ с $\overline{m_\nu} \in M$, $(\nu = 1, \ldots, s)$ не будет принадлежать решётке $\Lambda(a_1, \ldots, a_{s-1}; q)$, что и доказывает утверждение теоремы. □

6. Заключение

Из рассмотренных материалов видно.

Во-первых, с каждым моноидом M натуральных чисел связывается класс периодических функций M_s^α, который вложен в хорошо известный класс E_s^α.

Оказалось, что класс периодических функций M_s^α замкнут относительно интегральных операторов Фредгольма и на нем разрешимо интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

Во-вторых, для моноида $M = M_{q,1}$ справедлив парадоксальный результат о точности квадратурной формулы с параллелепипедальной сеткой с допустимым набором коэффициентов для всего класса M_s^α.

Нетрудно видеть, что если через $M_{q,a}$ обозначить класс вычетов $m \equiv a \pmod q$ при $2 \leqslant a \leqslant q-1$, то можно определить класс функций $M_{q,a,s}^\alpha$ следующим образом. Этот класс периодических функций состоит из функций $f(\vec{x})$, которые задаются многомерным рядом Фурье вида

$$f(\vec{x}) = \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_s, \\ m_\nu \in M_{q,a},\, (\nu = 1, \ldots, s)}} C(\vec{m}) e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_s, \\ m_\nu \in M_{q,a},\, (\nu = 1, \ldots, s)}} \frac{c(\vec{m})}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha} e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})},$$

где коэффициенты Фурье удовлетворяют неравенствам

$$|C(\vec{m})| \leqslant \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha}$$

и

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = \sup_{\overline{m_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)} |C(\vec{m})|(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha = \sup_{\overline{m_\nu}\in M,\,(\nu=1,\ldots,s)} |c(\vec{m})| < \infty.$$

Если $\sigma_{M_{q,a}}$ — абсцисса абсолютной сходимости дзета-функции

$$\zeta(M_{q,a}|\alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|qm+a|^\alpha}$$

класса вычетов $M_{q,a}$, то для любого $\alpha > \sigma_{M_{q,a}}$ ряд Фурье для функции $f(\vec{x}) \in M^\alpha_{q,a,s}$ абсолютно и равномерно сходится для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$.

Если модуль q — простое число, то для квадратурной формулы (15) теоремы 3 и 4 остаются справедливыми и для класса $M^\alpha_{q,a,s}$. Так как функции $f(\vec{x})$ из класса $M^\alpha_{q,a,s}$ имеют нулевое значение для нулевого коэффициента Фурье $C(\vec{0})$, то отсюда следует, что

$$\sum_{k=0}^{q-1} f\left(\frac{k}{q}, \left\{\frac{a_1 k}{q}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{q}\right\}\right) = 0, \quad f(\vec{x}) \in M^\alpha_{q,a,s}$$

при этих условиях.

В-третьих, вопрос о решении дифференциального уравнения с частными производными с дифференциальным оператором $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$ в пространстве M_s^α зависит от арифметических свойств спектра этого оператора.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидов С. С., Морозова Е. А., Чубариков В. Н., Реброва И. Ю., Балаба И. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М., Добровольская Л. П., Родионов А. В., Пихтилькова О. А. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. — Т. 18, вып. 4. — С. 6–85.

2. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. — Т. 4, вып. 3. — Тула, 1998. — С. 56–67.

3. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Аккуратова С. В. О некоторых свойствах нормированных пространств и алгебр сеток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. — Т. 5, вып. 1. — Тула, 1999. — С. 100–113.

4. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. — Т. 18, вып. 4. — С. 187–207.

5. Добровольский Н. Н. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 79–105.

6. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 142–150.

7. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о ”заградительном ряде” для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.

8. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 123–141.

9. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 3. — С. 95–108.

10. Коробов Н. М. О приближенном решении интегральных уравнений // ДАН СССР. 1959. — Т. 128, № 2. — С. 235–238.

11. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. — М.: Физматгиз, 1963.

12. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. — 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2004. — 288 с.

13. Родионов А. В. О методе В. С. Рябенького — Н. М. Коробова приближенного решения уравнений с частными производными // Чебышевский сборник. 2009. — Т. 10, вып. 3. — С. 84–96.

14. Рябенький В. С. Об одном способе получения разностных схем и об использовании теоретикочисловых сеток для решения задачи Коши методом конечных разностей // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1961. — Т. 60. — С. 232–237.

15. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК»: Моногр.: В 2 ч. / Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Ребров Е. Д., Басалов Ю. А., Басалова А. Н., Лямин М. И., Родионов А. В.; Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. – Ч. II. – 161 с.

REFERENCES

1. Dobrovol'skaja L. P., Dobrovol'skij M. N., Dobrovol'skij N. M., Dobrovol'skij N. N., 2012, "Giperbolicheskie dzeta-funkcii setok i reshjotok i vychislenie optimal'nyh kojefficientov" *Chebyshevskii Sbornik* vol 13, №4(44) pp. 4–107.

2. Dobrovol'skij M. N., 2007, "Funkcional'noe uravnenie dlja giperbolicheskoj dzeta-funkcii celochislennyh reshetok" , *Doklady akademii nauk*, vol 412, № 3, pp. 302–304.

3. Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Soboleva V. N., Sobolev D. K., Dobrovol'skaya L. P., Bocharova O. E., 2016, "On hyperbolic Hurwitz zeta function" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol 17, № 3 pp. 72–105.

4. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices" , *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

Получено 4.12.2018 г.
Принято в печать 10.04.2019 г.