ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 1.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019–20-1-148-163

Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел[1]

Н. Н. Добровольский

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Аннотация

В работе исследуется дзета-функция $\zeta(M(p_1,p_2)|\alpha)$ моноида $M(p_1,p_2)$, порожденного простыми числами $p_1 < p_2$ вида $3n+2$. Далее, выделяется основной моноид $M_{3,1}(p_1,p_2) \subset M(p_1,p_2)$ и основное множество $A_{3,1}(p_1,p_2) = M(p_1,p_2) \setminus M_{3,1}(p_1,p_2)$. Для соответствующих дзета-функций найдены явные конечные формулы, задающие аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость, кроме счётного множества полюсов. Найдены обратные ряды для этих дзета-функций и функциональные уравнения.

В работе даны определения трём новым типам моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы: моноиды степеней, моноиды Эйлера по модулю q и единичные моноиды по модулю q. Указаны выражение их дзета-функций через эйлеровы произведения.

В работе рассмотрен эффект Дэвенпорта — Хейльбронна для дзета-функций моноидов натуральных чисел, связанный с появлением нулей у дзета-функций слагаемых, получающихся при разбиении на классы вычетов по модулю.

Для моноидов с экспоненциальной последовательностью простых чисел доказана гипотеза о заградительном ряде и показано, что областью голоморфности дзета-функции такого моноида является комплексная полуплоскость справа от мнимой оси.

В заключении рассмотрены актуальные задачи с дзета-функциями моноидов натуральных чисел, требующие дальнейшего исследования.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел, эйлерово произведение.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
Н. Н. Добровольский. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 148–163.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710005_р_а.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 1.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019–20-1-148-163

One model Zeta function of the monoid of natural numbers[2]

N. N. Dobrovol'skii

Dobrovol'sky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University; associate professorof the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Abstract

The paper studies the Zeta function $\zeta(M(p_1,p_2)|\alpha)$ of the monoid $M(p_1,p_2)$ generated by Prime numbers $p_1 < p_2$ of the form $3n+2$. Next,the main monoid $M_{3,1}(p_1,p_2) \subset M(p_1,p_2)$ and the main set $A_{3,1}(p_1,p_2) = M(p_1,p_2) \setminus M_{3,1}(p_1,p_2) are distinguished.$ For the corresponding Zeta functions, explicit finite formulas are found that give an analytic continuation on the entire complex plane except for the countable set of poles. Inverse series for these Zeta functions and functional equations are found.

The paper gives definitions of three new types of monoids of natural numbers with a unique decomposition into simple elements: monoids of degrees, Euler monoids modulo q and unit monoids modulo q. Provided the expression of the Zeta functions using the Euler product.

The paper discusses the effect Davenport — Heilbronn Zeta-functions of monoids of natural numbers that is associated with the appearance of zeros of the Zeta-functions of terms obtained by the classes of residues modulo.

For monoids with an exponential sequence of primes, the barrier series hypothesis is proved and it is shown that the holomorphic domain of the Zeta function of such a monoid is the complex half-plane to the right of the imaginary axis.

In conclusion, topical problems with zeta-functions of monoids of natural numbers that require further investigation are considered.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, zeta function of the monoid of natural numbers, Euler product.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
N. N. Dobrovol'skii, 2019, "One model Zeta function of the monoid of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 148–163.

[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710005_r_a.

Посвящается 70-летию академика Литовской АН,
профессора Антанаса Лауринчикаса

1. Введение

Пусть $p_1 < p_2$ — два простых числа вида $3n+2$. Например, $p_1 = 2$, $p_2 = 5$. Через $M(p_1, p_2)$ обозначаем, как обычно, моноид, порожденный простыми числами p_1 и p_2:

$$M(p_1,p_2) = \{n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \mid \beta_1, \beta_2 \geqslant 0\}, \quad \zeta(M(p_1,p_2)|\alpha) = \sum_{n \in M(p_1,p_2)} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \sigma > 0).$$

Ясно, что моноид $M(p_1, p_2)$ с однозначным разложением на простые множители, и поэтому его дзета-функция выражается через конечное эйлерово произведение:

$$\zeta(M(p_1,p_2)|\alpha) = P(M(p_1,p_2)|\alpha) = \left(1 - \frac{1}{p_1^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_2^\alpha}\right)^{-1}.$$

Рассмотрим моноид $M_{3,1}(p_1, p_2) \subset M(p_1, p_2)$, заданный равенством

$$M_{3,1}(p_1,p_2) = \{n = 3k+1 = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \mid \beta_1 + \beta_2 \equiv 0 \pmod 2\},$$

который для краткости будем называть основным моноидом, и основное множество

$$A_{3,1}(p_1,p_2) = M(p_1,p_2) \setminus M_{3,1}(p_1,p_2) = \{n = 3k+2 = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \mid \beta_1 + \beta_2 \equiv 1 \pmod 2\}.$$

Для моноида $M_{3,1}(p_1, p_2)$ нетрудно описать $P(M_{3,1}(p_1, p_2))$ — множество простых элементов: $P(M_{3,1}(p_1, p_2)) = \{q_1, q_2, q_3\}$ и состоит из псевдопростых чисел

$$q_1 = p_1^2 < q_2 = p_1 p_2 < q_3 = p_2^2.$$

Обозначим через $P(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$ эйлерово произведение:

$$P(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \prod_{q \in P(M_{3,1}(p_1,p_2))} \left(1 - \frac{1}{q^\alpha}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{q_1^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{q_2^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{q_3^\alpha}\right)^{-1}.$$

Будем называть каноническим разложением элемента n из мультипликативного моноида $M_{3,1}(p_1, p_2)$ натуральных чисел представление вида $n = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} q_3^{\beta_3}$. Через $k(n)$ будем обозначать количество различных канонических представлений числа n, тогда эйлерово произведение $P(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$ будет раскладываться в следующий ряд Дирихле

$$P(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \sum_{n \in M_{3,1}(p_1,p_2)} \frac{k(n)}{n^\alpha}.$$

Так как в моноиде $M_{3,1}(p_1, p_2)$ нет однозначности разложения на простые элементы, действительно, $q_1 q_3 = q_2^2$, то $\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) \neq P(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$.

Интересно, что моноид $M(q_1, q_2)$ имеет однозначное разложение на множители, так как $q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} = p_1^{2\beta_1+\beta_2} p_2^{\beta_2}$, что доказывает однозначность разложения на простые элементы. Поэтому

$$\zeta(M(q_1,q_2)|\alpha) = \sum_{n \in M(q_1,q_2)} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty} \frac{1}{\left(q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2}\right)^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{q_1^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{q_2^\alpha}\right)^{-1} = P(M(q_1,q_2)|\alpha).$$

И вообще, справедливо равенство $\zeta(M(q_\nu, q_\mu)|\alpha) = P(M(q_\nu, q_\mu)|\alpha) \quad 1 \leqslant \nu < \mu \leqslant 3$.

Цель данной работы — найти обратный ряд Дирихле для дзета-функции $\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$ и аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость. Кроме этого, в работе будет доказана гипотеза о заградительном ряде для дзета-функции моноида с экспоненциальной последовательностью простых чисел.

2. Вес, порядок и радиус в точке

Рассмотрим функцию $f(\alpha)$ от комплексного аргумента в окрестности точки α_0 и её разложение в ряд Лорана:

$$f(\alpha) = \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu (\alpha - \alpha_0)^\nu, \quad c_n \neq 0.$$

Назовём *порядком* и *весом в точке* α_0 величины n и c_n, соответственно. Эти два функционала будем обозначать следующим образом:

$$\operatorname{ord}_{\alpha_0} f(\alpha) = n, \quad \operatorname*{Wei}_{\alpha_0} f(\alpha) = c_n.$$

Нетрудно видеть, что если $n > 0$, то порядок функции $f(\alpha)$ в точке α_0 равен порядку нуля в этой точке. Если порядок нулевой, то вес в точке α_0 равен значению функции в этой точке. Наконец, если порядок отрицательный, то он со знаком минус равен порядку полюса в точке α_0.

Лемма 1. *Функционал порядка аддитивен:*

$$\operatorname{ord}_{\alpha_0} f(\alpha)g(\alpha) = \operatorname{ord}_{\alpha_0} f(\alpha) + \operatorname{ord}_{\alpha_0} g(\alpha).$$

Функционал веса мультипликативен:

$$\operatorname*{Wei}_{\alpha_0} f(\alpha)g(\alpha) = \operatorname*{Wei}_{\alpha_0} f(\alpha) \cdot \operatorname*{Wei}_{\alpha_0} g(\alpha).$$

Доказательство. Действительно, пусть функции $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ раскладываются в ряды Лорана:

$$f(\alpha) = \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu (\alpha - \alpha_0)^\nu, \quad c_n \neq 0, \qquad g(\alpha) = \sum_{\mu=m}^{\infty} d_\mu (\alpha - \alpha_0)^\mu, \quad d_m \neq 0,$$

тогда

$$f(\alpha)g(\alpha) = \sum_{\nu=n+m}^{\infty} \left(\sum_{\mu=m}^{\nu-n} c_{\nu-\mu} d_\mu \right) (\alpha - \alpha_0)^\nu, \quad c_n d_m \neq 0.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{ord}_{\alpha_0} f(\alpha)g(\alpha) = n + m = \operatorname{ord}_{\alpha_0} f(\alpha) + \operatorname{ord}_{\alpha_0} g(\alpha), \quad \operatorname*{Wei}_{\alpha_0} f(\alpha)g(\alpha) = c_n d_m = \operatorname*{Wei}_{\alpha_0} f(\alpha) \cdot \operatorname*{Wei}_{\alpha_0} g(\alpha).$$

□

Обозначим через $\operatorname{rad}_{\alpha_0} f(\alpha)$ радиус сходимости ряда Лорана для функции $f(\alpha)$ в точке α_0. Таким образом, если порядок функции $f(\alpha)$ в точке α_0 неотрицательный, то $\operatorname{rad}_{\alpha_0} f(\alpha)$ — радиус сходимости соответствующего степенного ряда в точке α_0, а если он отрицательный, то ряд Лорана сходится при $0 < |\alpha - \alpha_0| < \operatorname{rad}_{\alpha_0} f(\alpha)$ и расходится при $|\alpha - \alpha_0| > \operatorname{rad}_{\alpha_0} f(\alpha)$.

Из леммы 1 вытекают следствия.

Следствие 1. *Справедливы равенства*

$$\operatorname{ord}_{\alpha_0} \frac{1}{f(\alpha)} = -\operatorname{ord}_{\alpha_0} f(\alpha), \qquad \operatorname*{Wei}_{\alpha_0} \frac{1}{f(\alpha)} = \frac{1}{\operatorname{Wei}_{\alpha_0} f(\alpha)}.$$

Доказательство. Действительно, если положить в лемме 1 $g(\alpha) = \frac{1}{f(\alpha)}$ и воспользоваться очевидными равенствами $\operatorname{ord}_{\alpha_0} 1 = 0$, $\operatorname{Wei}_{\alpha_0} 1 = 1$, то утверждение следствия следует из леммы 1. □

Следствие 2. *Если* $\operatorname{ord}_{\alpha_0} f(\alpha) + \operatorname{ord}_{\alpha_0} g(\alpha) = 0$, *то*

$$f(\alpha_0)g(\alpha_0) = \operatorname*{Wei}_{\alpha_0} f(\alpha) \cdot \operatorname*{Wei}_{\alpha_0} g(\alpha).$$

Доказательство. Действительно, если порядки функций $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ в точке α_0 нулевые, то их значения в этой точке равны весам и утверждение леммы справедливо. Если один порядок положительный, то это порядок нуля, а вторая функция имеет полюс в этой точке того же порядка. Поэтому в произведении он гасится нулём, а произведение весов будет значением произведения в точке. □

3. Обращение дзета-функции для основного моноида

Обращение дзета-функций для основного моноида будем осуществлять по схеме из работы [7].

Рассмотрим дзета-функцию $\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$, заданную равенством

$$\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \sum_{n\in M_{3,1}(p_1,p_2)} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it,\ \sigma > \sigma_{M_{3,1}(p_1,p_2)}), \tag{1}$$

где $\sigma_{M_{3,1}(p_1,p_2)} \leqslant 1$ — абсцисса абсолютной сходимости дзета-ряда, и через $\zeta^*(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$ обозначается обратный ряд, то есть $\zeta^*(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \zeta^{-1}(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$.

Лемма 2. *Для произвольного числа* $n = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2} \in M_{3,1}(p_1,p_2)$ *и числа* $k(n)$ *канонических представлений* $n = q_1^{\lambda_1}q_2^{\lambda_2}q_3^{\lambda_3}$ *справедливо равенство*

$$k(n) = \begin{cases} \frac{\min(\beta_1,\beta_2)+1}{2}, & \text{при } \beta_1 \equiv \beta_2 \equiv 1 \pmod 2, \\ \frac{\min(\beta_1,\beta_2)+2}{2}, & \text{при } \beta_1 \equiv \beta_2 \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

Доказательство. Действительно, так как $n = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2} \in M_{3,1}(p_1,p_2)$, то

$$\beta_1 + \beta_2 \equiv 0 \pmod 2.$$

Рассмотрим два случая.

Пусть $\beta_1 \equiv \beta_2 \equiv 1 \pmod 2$, тогда $\lambda_2 = 1+\lambda$, $\beta_1 = 2\lambda_1+1+\lambda$, $\beta_2 = 2\lambda_3+1+\lambda$. Следовательно, $\lambda = 2\lambda'$, $0 \leqslant \lambda' \leqslant \frac{\min(\beta_1,\beta_2)-1}{2}$ и $k(n) = \frac{\min(\beta_1,\beta_2)+1}{2}$.

Пусть $\beta_1 \equiv \beta_2 \equiv 0 \pmod 2$, тогда $\lambda_2 = 2\lambda$, $\beta_1 = 2\lambda_1 + 2\lambda$, $\beta_2 = 2\lambda_3 + 2\lambda$. Следовательно, $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{\min(\beta_1,\beta_2)}{2}$ и $k(n) = \frac{\min(\beta_1,\beta_2)+2}{2}$. □

Ряд Дирихле для произведения Эйлера

$$P(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \sum_{\beta_1+\beta_2\equiv 0 \pmod 2} \frac{\left[\frac{\min(\beta_1,\beta_2)}{2}\right]+1}{\left(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\right)^\alpha}$$

абсолютно сходится при $\sigma > 0$ и является мажорирующим рядом для вещественных $\alpha > 0$ дзета-ряду $\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$. Поэтому абсцисса абсолютной сходимости дзета-ряда $\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$ будет $\sigma_{M_{3,1}(p_1,p_2)} = 0$. По теореме Ландау (см. [13], стр. 156) в точке $\alpha = \sigma_{M_{3,1}(p_1,p_2)} = 0$ будет особая точка дзета-функции $\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$, хотя это и так очевидно в силу бесконечности моноида $M_{3,1}(p_1,p_2)$.

Лемма 3. *При $\sigma > 0$ справедливо представление*

$$\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \left(1+\frac{1}{(p_1p_2)^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right)^{-1} = \\ = \left(1+\frac{1}{q_2^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{q_1^\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{q_3^\alpha}\right)^{-1}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \sum_{n\in M_{3,1}(p_1,p_2)}\frac{1}{n^\alpha} = \sum_{\beta_1+\beta_2\equiv 0 \pmod 2}\frac{1}{\left(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\right)^\alpha} = \\ = \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty}\frac{1}{\left(p_1^{2\beta_1}p_2^{2\beta_2}\right)^\alpha} + \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty}\frac{1}{\left(p_1^{2\beta_1+1}p_2^{2\beta_2+1}\right)^\alpha} = \\ = \left(1+\frac{1}{(p_1p_2)^\alpha}\right)\left(\sum_{\beta_1=0}^{\infty}\frac{1}{\left(p_1^{2\beta_1}\right)^\alpha}\right)\left(\sum_{\beta_2=0}^{\infty}\frac{1}{\left(p_2^{2\beta_2}\right)^\alpha}\right) = \\ = \left(1+\frac{1}{(p_1p_2)^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right)^{-1} = \left(1+\frac{1}{q_2^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{q_1^\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{q_3^\alpha}\right)^{-1}.$$

□

Лемма 4. *При $\sigma > 0$ справедливо представление*

$$\zeta(A_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \left(\frac{1}{p_1^\alpha}+\frac{1}{p_2^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right)^{-1} = \\ = \left(\frac{1}{p_1^\alpha}+\frac{1}{p_2^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{q_1^\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{q_3^\alpha}\right)^{-1}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\zeta(A_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \sum_{n\in A_{3,1}(p_1,p_2)}\frac{1}{n^\alpha} = \sum_{\beta_1+\beta_2\equiv 1 \pmod 2}\frac{1}{\left(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\right)^\alpha} = \\ = \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty}\frac{1}{\left(p_1^{2\beta_1+1}p_2^{2\beta_2}\right)^\alpha} + \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty}\frac{1}{\left(p_1^{2\beta_1}p_2^{2\beta_2+1}\right)^\alpha} = \\ = \left(\frac{1}{p_1^\alpha}+\frac{1}{p_2^\alpha}\right)\left(\sum_{\beta_1=0}^{\infty}\frac{1}{\left(p_1^{2\beta_1}\right)^\alpha}\right)\left(\sum_{\beta_2=0}^{\infty}\frac{1}{\left(p_2^{2\beta_2}\right)^\alpha}\right) = \\ = \left(\frac{1}{p_1^\alpha}+\frac{1}{p_2^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{p_1^\alpha}+\frac{1}{p_2^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{q_1^\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{q_3^\alpha}\right)^{-1}.$$

□

Лемма 5. *При $\sigma > 0$ справедливо представление*

$$\zeta^*(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \left(1+\frac{1}{(p_1p_2)^\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right) = \\ = \left(1+\frac{1}{q_2^\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{q_1^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{q_3^\alpha}\right) = 1-\frac{1}{q_2^\alpha}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k 2}{q_2^{k\alpha}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{q_1^\alpha q_2^{k\alpha}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{q_3^\alpha q_2^{k\alpha}}.$$

Доказательство. Действительно, из леммы 3 следует, что

$$\zeta^*(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \left(1+\frac{1}{(p_1p_2)^\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right) = \\ = \left(1+\frac{1}{q_2^\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{q_1^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{q_3^\alpha}\right).$$

Далее имеем:

$$\left(1+\frac{1}{q_2^\alpha}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{q_2^{k\alpha}}, \quad q_1q_3 = q_2^2.$$

Поэтому

$$\zeta^*(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{q_2^{k\alpha}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{q_1^\alpha q_2^{k\alpha}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{q_3^\alpha q_2^{k\alpha}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{q_2^{(k+2)\alpha}} = \\ = 1 - \frac{1}{q_2^\alpha} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k 2}{q_2^{k\alpha}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{q_1^\alpha q_2^{k\alpha}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{q_3^\alpha q_2^{k\alpha}}.$$

□

Обозначим через $\zeta(M(p_1,p_2),M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$ отношение двух дзета-функций:

$$\zeta(M(p_1,p_2),M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \zeta(M(p_1,p_2)|\alpha)\zeta^{-1}(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha).$$

Обозначим коэффициенты соответствующего ряда Дирихле через $y(n)$:

$$\zeta(M(p_1,p_2),M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{y(n)}{n^\alpha}, \quad y(1)=1. \tag{2}$$

Теорема 1. *При $\sigma > 0$ справедливо равенство*

$$\zeta(M(p_1,p_2),M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \left(1+\frac{1}{p_1^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{p_2^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{(p_1p_2)^\alpha}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y(n)}{n^\alpha},$$

где

$$y(1)=1, \quad y(n) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{при } n = p_1(p_1p_2)^k,\ k \geqslant 0, \\ (-1)^k, & \text{при } n = p_2(p_1p_2)^k,\ k \geqslant 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Действительно, из леммы 5 следует, что

$$\zeta(M(p_1,p_2),M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \left(1-\frac{1}{p_1^\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_2^\alpha}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{(p_1p_2)^\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right) = \\ = \left(1+\frac{1}{p_1^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{p_2^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{(p_1p_2)^\alpha}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(p_1p_2)^{k\alpha}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p_1^\alpha(p_1p_2)^{k\alpha}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p_2^\alpha(p_1p_2)^{k\alpha}} + \\ + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(p_1p_2)^{(k+1)\alpha}} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p_1^\alpha(p_1p_2)^{k\alpha}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p_2^\alpha(p_1p_2)^{k\alpha}}.$$

□

4. Аналитическое продолжение и функциональное уравнение

Хорошо известна производящая функция для чисел Бернулли (см. [3], стр. 254–257):

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$$

из которой несложно получить следующее разложение мероморфной функции $\frac{1}{e^x-1}$ в ряд Лорана

$$\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{x}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}x^n,$$

который абсолютно сходится при $0<|x|<2\pi$, и имеет полюс первого порядка при $x=0$ с вычетом равным 1. Кроме того, так как $e^x=e^{x+2k\pi i}$ для любого целого k, то в каждой точке $x=2k\pi i$ для любого целого k имеется полюс первого порядка с вычетом равным 1 и разложение в ряд Лорана

$$\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{x-2k\pi i}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}(x-2k\pi i)^n,$$

который абсолютно сходится при $0<|x-2k\pi i|<2\pi$.

Подставляя $x=-\alpha\ln p$, получим, что дзета-функция геометрической прогрессии $M(p)$ является мероморфной функцией на всей комплексной α-плоскости с рядом Лорана

$$\zeta(M(p)|\alpha)=\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}=\frac{1}{\alpha\ln p}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}(-\alpha\ln p)^n=\frac{1}{\alpha\ln p}+\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}(-\alpha\ln p)^n,$$

который абсолютно сходится при $0<|\alpha|<\frac{2\pi}{\ln p}$, и имеет полюс первого порядка при $\alpha=0$ с вычетом равным $\frac{1}{\ln p}$.

Другой способ получения ряда Лорана связан с подстановкой $x=\alpha\ln p$. Действительно,

$$\zeta(M(p)|\alpha)=1+\frac{1}{p^\alpha-1}=1+\frac{1}{\alpha\ln p}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}(\alpha\ln p)^n=\frac{1}{\alpha\ln p}+\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}(\alpha\ln p)^n.$$

Эти два ряда Лорана совпадают, так как все нечетные числа Бернулли начиная с третьего номера равны нулю, и поэтому

$$\zeta(M(p)|\alpha)=\frac{1}{\alpha\ln p}+\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}(\alpha\ln p)^{2n+1}.$$

Кроме того, так как $p^\alpha=p^{\alpha+\frac{2k\pi}{\ln p}i}$ для любого целого k, то в каждой точке $\alpha=\frac{2k\pi}{\ln p}i$ для любого целого k имеется полюс первого порядка с вычетом равным $\frac{1}{\ln p}$ и разложение в ряд Лорана

$$\zeta(M(p)|\alpha)=\frac{1}{\ln p\left(\alpha-\frac{2k\pi}{\ln p}i\right)}+\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n+2}(\ln p)^{2n+1}}{(2n+2)!}\left(\alpha-\frac{2k\pi}{\ln p}i\right)^{2n+1},$$

который абсолютно сходится при $0<\left|\alpha-\frac{2k\pi}{\ln p}i\right|<\frac{2\pi}{\ln p}$.

Конечное эйлерово произведение:

$$P(M(p_1,p_2)|\alpha)=\left(1-\frac{1}{p_1^\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_2^\alpha}\right)^{-1}=1+\frac{1}{p_1^\alpha-1}+\frac{1}{p_2^\alpha-1}+\frac{1}{(p_1^\alpha-1)(p_2^\alpha-1)}$$

является мероморфной функцией на всей комплексной α-плоскости кроме точки $\alpha=0$, в которой у неё полюс второго порядка, и точек $\alpha=\frac{2k\pi}{\ln p_1}i$, $\alpha=\frac{2k\pi}{\ln p_2}i$, $k\neq 0$, в которых полюса первого порядка.

Так как при $0<|\alpha|<\frac{2\pi}{\ln p_2}$ оба ряда Лорана

$$\left(1-\frac{1}{p_\nu^\alpha}\right)^{-1}=\frac{1}{\alpha\ln p_\nu}+\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}(\alpha\ln p_\nu)^n\quad \nu=1,2$$

абсолютно сходятся, то перемножая их, находим

$$P(M(p_1,p_2)|\alpha)=\left(1-\frac{1}{p_1^\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p_2^\alpha}\right)^{-1}=\frac{1}{\alpha^2\ln p_1\ln p_2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln p_1}+\frac{1}{\ln p_2}\right)\frac{1}{\alpha}+$$
$$+\frac{\ln p_2}{\ln p_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}(\alpha\ln p_2)^{n-1}+\frac{\ln p_1}{\ln p_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}(\alpha\ln p_1)^{n-1}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}\alpha^n\left((\ln p_1)^n+(\ln p_2)^n\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_{k+1}}{(k+1)!}(\ln p_1)^k\frac{B_{n-k+1}}{(n-k+1)!}(\ln p_2)^{n-k}\right)\alpha^n.$$

Отсюда следует что для вычета в точке $\alpha=0$ справедливо равенство

$$\mathrm{Res}_0 P(M(p_1,p_2)|\alpha)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln p_1}+\frac{1}{\ln p_2}\right).$$

Так как логарифмы двух простых чисел линейно независимы, то

$$\zeta\left(M(p_\nu)\left|\frac{2k\pi}{\ln p_\mu}i\right.\right)=\left(1-\frac{1}{p_\nu^{\frac{2k\pi}{\ln p_\mu}i}}\right)^{-1}$$

определено и отлично от 0 при $\nu\neq\mu$, $k\neq 0$. Таким образом, дзета-функция $\zeta(M(p_1)|\alpha)$ имеет в точке $\alpha=\frac{2k\pi}{\ln p_1}i$ порядок -1 с весом $\frac{1}{\ln p_1}$, а дзета-функция $\zeta(M(p_2)|\alpha)$ порядок 0 с весом $\left(1-\frac{1}{p_2^{\frac{2k\pi}{\ln p_1}i}}\right)^{-1}$. Поэтому по лемме 1 их произведение в этой точке имеет порядок -1 с весом $\frac{1}{\ln p_1}\left(1-\frac{1}{p_2^{\frac{2k\pi}{\ln p_1}i}}\right)^{-1}$. Аналогичное утверждение справедливо для точек $\alpha=\frac{2k\pi}{\ln p_2}i$ с $k\neq 0$. Поэтому для вычета дзета-функции $\zeta(M(p_1,p_2)|\alpha)$ в точке $\alpha=\frac{2k\pi}{\ln p_\nu}i$, $k\neq 0$, $\nu=1,2$ справедливо равенство

$$\mathrm{Res}_{\frac{2k\pi}{\ln p_\nu}i}\zeta(M(p_1,p_2)|\alpha)=\frac{1}{\ln p_\nu}\left(1-\frac{1}{p_\mu^{\frac{2k\pi}{\ln p_\nu}i}}\right)^{-1},\quad \mu=2-\left[\frac{\nu}{2}\right].$$

В работе [9] доказано функциональное уравнение для дзета-функции $\zeta(M(p_1,p_2)|\alpha)$, которое имеет вид

$$\zeta(M(p_1,p_2)|-\alpha)=\frac{\zeta(M(p_1,p_2)|\alpha)}{(p_1p_2)^\alpha}.$$

Из леммы 3 следует, что дзета-функция $\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$ — мероморфная функция на всей комплексной α-плоскости кроме точки $\alpha=0$, где у неё полюс второго порядка, и точек $\alpha=\frac{2k\pi}{\ln q_\nu}$, $k\neq 0$, $\nu=1,3$, где полюса первого порядка.

Также из леммы 3 несложно найти функциональное уравнение

$$\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|-\alpha)=\frac{q_2^\alpha}{(q_1q_3)^\alpha}\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)=\frac{\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)}{(p_1p_2)^\alpha}.$$

Из леммы 4 мы находим функциональное уравнение для дзета-функции основного множества:

$$\zeta(A_{3,1}(p_1,p_2)|-\alpha)=\frac{\zeta(A_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)}{(p_1p_2)^\alpha}.$$

Из теоремы 1 находим очень простое функциональное уравнение для дзета-функции $\zeta(M(p_1,p_2),M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$, из которого следует четность этой дзета-функции:

$$\zeta(M(p_1,p_2),M_{3,1}(p_1,p_2)|-\alpha)=\zeta(M(p_1,p_2),M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha).$$

5. Моноиды степеней, Эйлера и единичные моноиды по модулю

Наиболее простым по своей структуре можно считать моноид M_k — моноид k-х степеней:

$$M_k=\left\{n^k\,|n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Это моноид с однозначным разложением на простые элементы и множество простых элементов $P(M_k)$ состоит из псевдопростых чисел:

$$P(M_k)=\{p^k\,|\,p\in\mathbb{P}\}.$$

Поэтому для дзета-функции $\zeta(M_k|\alpha)$ справедливы равенства

$$\zeta(M_k|\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^k)^\alpha}=P(M_k|\alpha)=\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{(p^k)^\alpha}\right)^{-1}=\zeta(k\alpha),\quad \alpha=\sigma+it,\quad \sigma>\frac{1}{k}.$$

Пусть q — натуральное число больше 2. Для любого натурального числа n с каноническим разложением $n=p_1^{\beta_1}\dots p_k^{\beta_k}$, где простые $p_1<\ldots<p_k$, его эйлеровой компонентой по модулю q назовем число $E_q(n)$, а единичным делителем по модулю q — число $U_q(n)$, заданные равенствами

$$E_q(n)=\prod_{p_\nu\not\equiv 1\pmod q,\,(p_\nu,q)=1}p_\nu^{\varphi(q)\left[\frac{\beta_\nu}{\varphi(q)}\right]},\quad U_q(n)=\prod_{p_\nu\equiv 1\pmod q}p_\nu^{\beta_\nu}.$$

Через n_q^* будем обозначать мультипликативное дополнение эйлеровой компоненты до числа n: $n_q^*=\frac{n}{E_q(n)}$, а через n_q^{**} — мультипликативное дополнение произведения эйлеровой компоненты на единичный делитель до числа n: $n_q^{**}=\frac{n}{E_q(n)U_q(n)}$. Очевидно, что выполняются сравнения

$$E_q(n)\equiv U_q(n)\equiv 1\pmod q,\quad n\equiv n_q^*\equiv n_q^{**}\pmod q.$$

Назовём *моноидом Эйлера по модулю* q множество E_q, заданное равенством

$$E_q=\left\{n^{\varphi(q)}\,\middle|\,n=\prod_{p|n}p^{\beta_p},\ p\not\equiv 1\pmod q,\ (p,q)=1\right\}.$$

Назовём *единичным моноидом по модулю* q множество U_q, заданное равенством

$$U_q = \left\{ n \,\middle|\, n = \prod_{p|n} p^{\beta_p},\ p \equiv 1 \pmod q \right\}.$$

Моноиды E_q и U_q имеют однозначное разложение на простые элементы. Для единичного моноида по модулю q множество простых элементов $P(U_q)$ состоит из простых чисел:

$$P(U_q) = \{p \,|\, p \equiv 1 \pmod q\}.$$

Это бесконечное множество простых чисел согласно теоремы Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии. Поэтому

$$\zeta(U_q|\alpha) = P(U_q|\alpha) = \prod_{p\equiv 1 \pmod q} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1.$$

Для моноида Эйлера по модулю q множество простых элементов $P(E_q)$ состоит из псевдопростых чисел:

$$P(E_q) = \{p^{\varphi(q)} \,|\, p \not\equiv 1 \pmod q,\ (p,q) = 1\}.$$

Это бесконечное множество псевдопростых чисел согласно теоремы Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии. Поэтому

$$\zeta(E_q|\alpha) = P(E_q|\alpha) = \prod_{p\not\equiv 1 \pmod q,\,(p,q)=1} \left(1 - \frac{1}{p^{\varphi(q)\alpha}}\right)^{-1} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \frac{1}{\varphi(q)}.$$

6. Эффект Дэвенпорта — Хейльбронна

В знаменитой работе Г. Дэвенпорта и Г. Хейльброна [16] было установлено, что дзета-функция Гурвица $\zeta(s,a)$ для рациональных a, $0 < a < 1$, $a \neq \frac{1}{2}$ имеет бесконечно много нулей в полуплоскости абсолютной сходимости определяющего ряда Дирихле. Отсюда сразу следует, что если $a = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь и $q > 2$, то дзета-функция класса вычетов по модулю q

$$\zeta(p,q|\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(nq+p)^\alpha} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1$$

имеет бесконечно много нулей в полуплоскости абсолютной сходимости дзета-ряда.

Таким образом, суть эффекта Дэвенпорта — Хейльбронна состоит в том, что дзета-функция Римана разбивается на сумму слагаемых

$$\zeta(\alpha) = \sum_{p=1}^{q} \zeta(p,q|\alpha),$$

часть из которых имеет нули справа от абсциссы абсолютной сходимости $\sigma = 1$, а дзета-функция Римана в этой области не имеет нулей.

Как следует из конечного представления дзета-функции $\zeta(M(p_1,p_2)|\alpha)$ моноида $M(p_1,p_2)$ натуральных чисел в виде эйлерова произведения

$$\zeta(M(p_1,p_2)|\alpha) = \left(1 - \frac{1}{p_1^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_2^\alpha}\right)^{-1},$$

она не имеет нулей во всей комплексной α-плоскости.

Согласно определению справедливо равенство

$$\zeta(M(p_1,p_2)|\alpha) = \zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) + \zeta(A_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha).$$

Теорема 2. *Дзета-функция* $\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$ *обращается в ноль в точках* $\alpha = \frac{\pi(1+2k)}{\ln(p_1p_2)}$, *где* k *— любое целое число.*

Дзета-функция $\zeta(A_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$ *обращается в ноль в точках* $\alpha = \frac{\pi(1+2k)}{\ln p_2 - \ln p_1)}$, *где* k *— любое целое число.*

Доказательство. Действительно, согласно лемме 3 имеем:

$$\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \left(1 + \frac{1}{(p_1p_2)^\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right)^{-1}.$$

Второй и третий сомножители не обращаются в ноль во всей комплексной α-плоскости, а первый сомножитель обращается в ноль в точках $\alpha = \frac{\pi(1+2k)}{\ln(p_1p_2)}$, где k — любое целое число. Так как эти нули не совпадают с полюсами второго и третьего сомножителей, то они остаются и нулями дзета-функции $\zeta(M_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$.

Согласно лемме 4 имеем:

$$\zeta(A_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha) = \left(\frac{1}{p_1^\alpha} + \frac{1}{p_2^\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right)^{-1}.$$

Второй и третий сомножители не обращаются в ноль во всей комплексной α-плоскости, а первый сомножитель обращается в ноль в точках $\alpha = \frac{\pi(1+2k)}{\ln p_2 - \ln p_1)}$, где k — любое целое число. Так как эти нули не совпадают с полюсами второго и третьего сомножителей, то они остаются и нулями дзета-функции $\zeta(A_{3,1}(p_1,p_2)|\alpha)$. □

Из доказанной теоремы следует, что эффект Дэвенпорта — Хейльбронна имеет место и в этом случае, но его характер несколько изменился, так как нули слагаемых, выделяемых классами вычетов по модулю 3, появляются на абсциссе абсолютной сходимости дзета-функции основного моноида.

Другая ситуация возникает в случае моноида Эйлера E_q по модулю q и в случае единичного моноида U_q по модулю q. Дело в том, что все элементы этих моноидов принадлежат одному классу вычетов по модулю q, а наличие произведения Эйлера для дзета-функции этих моноидов исключает наличие нулей в области абсолютной сходимости.

Вопрос о наличии эффекта Дэвенпорта — Хейльбронна для моноида k-х степеней требует отдельного рассмотрения, так как здесь возможны разные постановки вопросов.

7. Область голоморфности дзета-функции моноида с экспоненциальной последовательностью простых

В работе [6] была введена экспоненциальная последовательность простых чисел PE. Дзета-функция моноида $M(PE)$ обладает эйлеровым произведением:

$$\zeta(M(PE)|\alpha) = \sum_{n\in M(PE)} \frac{1}{n^\alpha} = P(M(PE)|\alpha) = \prod_{p\in PE}\left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 0.$$

В работе [9] была высказана гипотеза, что дзета-функцию $\zeta(M(PE)|\alpha)$ нельзя продолжить в левую полуплоскость $\sigma \leqslant 0$. Другими словами, её область голоморфности совпадает с правой полуплоскостью $\sigma > 0$.

Лемма 6. *Пусть* $\alpha_0 = \sigma_0 + it_0$ *— произвольная точка в правой полуплоскости* $\sigma_0 > 0$, *тогда порядок* $\operatorname{ord}_{\alpha_0}\zeta(M(PE)|\alpha) = 0$ *и радиус в этой точке* $\operatorname{rad}_{\alpha_0}\zeta(M(PE)|\alpha) = \sigma_0$.

Доказательство. Из наличия эйлерова произведения следует, что справедливо равенство

$$\zeta(M(PE)|\alpha) = \prod_{p\in PE} \zeta(M(p)|\alpha), \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 0.$$

Очевидно, что для любого $p \in PE$ справедливы равенства

$$\operatorname{ord}_{\alpha_0} \zeta(M(p)|\alpha) = 0, \quad \operatorname*{Wei}_{\alpha_0} \zeta(M(p)|\alpha) = \zeta(M(p)|\alpha_0), \quad \operatorname{rad}_{\alpha_0} \zeta(M(p)|\alpha) = \sqrt{\sigma_0^2 + \tau_p^2},$$

где $\tau_p = \min_{k\in\mathbb{Z}} \left| t_0 - \frac{2k\pi}{\ln p} \right|$ задает расстояние до ближайшего полюса $\frac{2k\pi}{\ln p} i$ дзета-функции $\zeta(M(p)|\alpha)$.

Нетрудно видеть, что круг $K(\alpha_0, \sigma_0) = \{\alpha \,|\, |\alpha - \alpha_0| < \sigma_0\}$ является пересечением всех кругов $K\left(\alpha_0, \sqrt{\sigma_0^2 + \tau_p^2}\right) = \{\alpha \,|\, |\alpha - \alpha_0| < \sqrt{\sigma_0^2 + \tau_p^2}\}$, когда p пробегает всё множество PE:

$$K(\alpha_0, \sigma_0) = \bigcap_{p\in PE} K\left(\alpha_0, \sqrt{\sigma_0^2 + \tau_p^2}\right).$$

Как известно (см. [4], стр. 59), на окружности круга сходимости всегда есть по меньшей мере одна особая точка. Так как все точки окружности круга $K(\alpha_0, \sigma_0)$ кроме точки касания с мнимой осью принадлежат области абсолютной сходимости дзета-ряда $\zeta(M(PE)|\alpha)$, то особой точкой является точка касания $\alpha = it_0$. Лемма полностью доказана. □

Теорема 3. *Областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ является α-полуплоскость $\sigma > 0$.*

Доказательство. Из доказательства предыдущей леммы следует, что все точки мнимой оси являются особыми точками дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$. Отсюда следует, что мнимая ось целиком является особой линией для дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$. А это означает, что областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ является α-полуплоскость $\sigma > 0$. □

Доказанную теорему можно перенести на другой класс моноидов натуральных чисел.

Пусть Q — натуральное число и моноид $M = M(PE)$ для произвольной экспоненциальной последовательности простых чисел PE. Определим моноид M_{-Q} как множество натуральных чисел, не делящихся на простые p из $P(M)$ и больших Q. Если определить моноид M_{+Q} как множество натуральных чисел, имеющих в своём каноническом разложении только простые числа $p \in P(M)$, которые больше Q, то $\mathbb{N} = M_{-Q} \cdot M_{+Q}$ и $\zeta(\alpha) = \zeta(M_{-Q}|\alpha)\zeta(M_{+Q}|\alpha)$. Последнее равенство верно при $\sigma > 0$.

Лемма 7. *Пусть $\alpha_0 = \sigma_0 + it_0$ — произвольная точка в правой полуплоскости $\sigma_0 > 0$, тогда порядок $\operatorname{ord}_{\alpha_0} \zeta(M_{+Q}|\alpha) = 0$ и радиус в этой точке $\operatorname{rad}_{\alpha_0} \zeta(M_{+Q}|\alpha) = \sigma_0$.*

Доказательство. Дословно повторяя доказательство леммы 6, получим доказываемое утверждение, так как удаление конечного числа простых из экспоненциальной последовательности простых оставляет её экспоненциальной последовательностью. □

Теорема 4. *Областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M_{+Q}|\alpha)$ является α-полуплоскость $\sigma > 0$.*

Доказательство. Утверждение следует из предыдущей теоремы, так как для любой экспоненциальной последовательности простых PE моноид M_{+Q} задается той-же последовательность простых, из которой удалено конечное число начальных членов. □

Теорема 5. *Областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M_{-Q}|\alpha)$ является α-полуплоскость $\sigma > 0$.*

Доказательство. Из равенства

$$\zeta(M_{-Q}|\alpha) = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(M_{+Q}|\alpha)}$$

следует, что дзета-функция $\zeta(M_{-Q}|\alpha)$ — аналитическая функция в α-полуплоскости $\sigma > 0$, кроме точки $\alpha = 1$, где у неё полюс первого порядка. Если бы, её область голоморфности была шире чем данная полуплоскость, то из равенства

$$\zeta(M_{+Q}|\alpha) = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(M_{Q}|\alpha)}$$

вытекало бы противоречие с предыдущей теоремой. □

8. Заключение

Достаточно простые соображения из первого раздела позволили нам доказать гипотезу о заградительном ряде для дзета-функции моноида с экспоненциальной последовательностью простых.

Рассмотрение модельной дзета-функции основного моноида и основного множества позволяют по-новому рассматривать вопрос о поведении соответствующих рядов Дирихле.

В работе [8] было дано определение специальных видов последовательностей простых чисел. Будем говорить, что бесконечная последовательность $\mathbb{P}_1$ простых чисел

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$$

является σ_0-последовательностью третьего рода, если дзета-функция $\zeta(\mathbb{P}_1|\alpha)$ имеет абсциссу абсолютной сходимости $\sigma_{\mathbb{P}_1} = \sigma_0$.

Из работ [6], [8] следует, что σ_0-последовательности третьего рода существуют для любого σ_0 из отрезка $[0; 1]$.

Из доказательства последней теоремы следует, что для любой 0-последовательности третьего рода $\mathbb{P}_1$ областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_1)|\alpha)$ является полуплоскость $\sigma > 0$. Возникает вопрос об области голоморфности дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_1)|\alpha)$ для произвольного множества простых $\mathbb{P}_1$.

Следующий простой пример показывает, что полуплоскость $\sigma > 0$ без точки $\alpha = 1$ может быть областью голоморфности и для 1-последовательности простых чисел. Действительно, пусть $\mathbb{P}_1$ — произвольная 0-последовательность простых чисел, тогда $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}_1$ будет 1-последовательностью простых чисел. Очевидно, что

$$\zeta(M(\mathbb{P}_2)|\alpha) = \zeta(M(\mathbb{P})|\alpha)\zeta^{-1}(M(\mathbb{P}_1)|\alpha) = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(M(\mathbb{P}_1)|\alpha)}.$$

Отсюда следует утверждение об области голоморфности.

В заключении автор выражает свою признательность профессорам В. И. Иванову и В. Н. Чубарикову за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бомбьери Э., Гош А. Вокруг функции Дэвенпорта–Хейльбронна // УМН, 2011. Т. 66, вып. 2(398). С. 15–66.

2. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.

3. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. — М.: Наука, 1967. — 376 с.

4. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.

5. Демидов С. С., Морозова Е. А., Чубариков В. Н., Реброва И. Ю., Балаба И. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М., Добровольская Л. П., Родионов А. В., Пихтилькова О. А. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. — Т. 18, вып. 4. — С. 6–85.

6. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. — Т. 18, вып. 4. — С. 187–207.

7. Добровольский Н. Н. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 79–105.

8. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 142–150.

9. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.

10. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 123–141.

11. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 3. — С. 95–108.

12. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. — М.: И-Л, 1952. — 407 с.

13. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. — 188 с.

14. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L-функций Дирихле. — М. – Л.: ОГИЗ, 1947. — 204 с.

15. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1969. — 576 с.

16. Davenport H., Heilbronn H. On the zeros of certain Dirichlet series // J. London Math. Soc. 1936. — Vol. 11. — P. 181–185.

REFERENCES

1. Bombieria E., Ghoshb A., 2011, “Around the Davenport–Heilbronn function”, *Uspekhi Mat. Nauk*, 66:2(398) pp. 15–66.

2. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, *Dzeta-funkcija Rimana*, Izd-vo Fiz-matlit, Moskva, 376 p.

3. Gel’fond A. O., 1967, *Calculus of finite differences*, Izd-vo Nauka, Moskva, 376 p.

4. Gurvic A., Kurant R., 1968, *Teorija funkcij*, Izd-vo Nauka, Moskva, 618 p.

5. Dobrovol’skaja L. P., Dobrovol’skij M. N., Dobrovol’skij N. M., Dobrovol’skij N. N., 2012, "Giperbolicheskie dzeta-funkcii setok i reshjotok i vychislenie optimal’nyh kojefficientov" *Chebyshevskii Sbornik* vol 13, №4(44) pp. 4–107.

6. Dobrovol'skij M. N., 2007, "Funkcional'noe uravnenie dlja giperbolicheskoj dzeta-funkcii celochislennyh reshetok" , *Doklady akademii nauk*, vol 412, № 3, pp. 302–304.

7. Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Soboleva V. N., Sobolev D. K., Dobrovol'skaya L. P., Bocharova O. E., 2016, "On hyperbolic Hurwitz zeta function" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol 17, № 3, pp. 72–105.

8. Davenport H., 1971, *Mul'tiplikativnaja teorija chisel*, Izd-vo Nauka, Moskva, 200 p.

9. Prahar K., 1967, *Raspredelenie prostyh chisel, per. s nem*, Izd-vo Mir, Moskva, 511 p.

10. Privalov I. I., 1977, *Vvedenie v teoriju funkcij kompleksnogo peremennogo*, Izd-vo Nauka, Moskva, 444 p.

11. Stenli R., 1990, *Perechislitel'naja kombinatorika*, Izd-vo Mir, Moskva, 440 p.

12. Titchmarsh E. K., 1952, *Teorija dzeta-funkcii Rimana* Izd-vo I-L, Moskva, 407 p.

13. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.

14. Chandrasekharan K., 1975, *Arifmeticheskie funkcii, per. s angl*, Izd-vo Nauka, Moskva, 272 p.

15. Davenport H., Heilbronn H., 1936, "On the zeros of certain Dirichlet series" , *J. London Math. Soc.* Vol. 11. pp. 181–185.

16. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices" , *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

Получено 4.12.2018 г.
Принято в печать 10.04.2019 г.