ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 2.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-348-365

О неравенствах типа Колмогорова для периодических функций двух переменных в L_2

М. Ш. Шабозов, М. О. Акобиршоев

Шабозов Мирганд Шабозович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра функционального анализа и дифференциальных уравнений, Таджикский национальный университет (г. Душанбе).
e-mail: shabozov@mail.ru
Акобиршоев Мухиддин Отамшоевич — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра информационных систем и технологий, Технологический университет Таджикистана (г. Душанбе).
e-mail: —

Аннотация

Пусть $L_2 := L_2(Q)$, $Q := \{0 \le x, y \le 2\pi\}$ – гильбертово пространство суммируемых с квадратом функций $f(x,y)$ в области Q с конечной нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2(Q)} := \left\{\frac{1}{4\pi^2}\iint_{(Q)} |f(x,y)|^2 dxdy\right\}^{1/2} < \infty,$$

а $L_2^{(r,s)}(Q)$ – класс функций $f \in L_2$, у которых производные $f^{(k,l)} \in C(Q)$, а $f^{(r,l)}$, $f^{(k,s)}$ $(0 \le k \le r-1,\ 0 \le l \le s-1,\ r,s \ge 2, r,s \in \mathbb{N})$, $f^{(r,s)}$ – кусочно-непрерывны и $f^{(r,s)} \in L_2$. В работе доказано, что для произвольной $f \in L_2^{(r,s)}$ имеет место точное неравенство типа Колмогорова следующего вида

$$\|f^{(r-k,s-l)}\|_{L_2(Q)} \le \|f\|_{L_2(Q)}^{kl/rs} \cdot \|f^{(r,0)}\|_{L_2(Q)}^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}} \cdot \|f^{(0,s)}\|_{L_2(Q)}^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot \|f^{(r,s)}\|_{L_2(Q)}^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})}.$$

Найдено также точное неравенство типа Колмогорова для наилучших приближений $\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f^{(r-k,s-l)})_2$ промежуточных производных $f^{(r-k,s-l)}$ функций $f \in L_2^{(r,s)}$ тригонометрическими “углами”, имеющее вид

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f^{(r-k,s-l)})_2 \le$$

$$\le (\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2)^{kl/rs} \cdot \left(\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,0)}\right)_{L_2}\right)^{\left(1-\frac{k}{r}\right)\frac{l}{s}} \cdot$$

$$\cdot \left(\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(0,s)}\right)_2\right)^{\frac{k}{r}\left(1-\frac{l}{s}\right)} \cdot \left(\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_2\right)^{\left(1-\frac{k}{r}\right)\left(1-\frac{l}{s}\right)},$$

и дано приложение к задаче об одновременном приближении функции и ее промежуточных производных в L_2. Вычислены точные значения линейных и колмогоровских квазипоперечников некоторых классов функций.

Ключевые слова: неравенства типа Колмогорова, тригонометрические “углы”, квазиполином, наилучшее приближение, квазипоперечники.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:
М. Ш. Шабозов, М. О. Акобиршоев. О неравенствах типа Колмогорова для периодических функций двух переменных в L_2 // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 348–365.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 2.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-348-365

About Kolmogorov type of inequalities for periodic functions of two variables in L_2

M. Sh. Shabozov, M. O. Akobirshoev

Shabozov Mirgand Shabozovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Department of functional analysis and differential equations, Tajik national University (Dushanbe).
e-mail: shabozov@mail.ru
Akobirshoev Mukhiddin Otasevic — candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor, Department of information systems and technologies, Technological University of Tajikistan (Dushanbe).
e-mail: —

Abstract

Let $L_2 := L_2(Q)$, $Q := \{0 \le x, y \le 2\pi\}$ be the Hilbert space of summable with square of functions$f(x, y)$ in Q domain with norm

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2(Q)} := \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} |f(x,y)|^2 dxdy \right\}^{1/2} < \infty,$$

and $L_2^{(r,s)}(Q)$ is class of functions $f \in L_2$ whose derivatives $f^{(k,l)} \in C(Q)$, a $f^{(r,l)}$, $f^{(k,s)}$ $(0 \le k \le r-1,\ 0 \le l \le s-1,\ r, s \ge 2, r, s \in \mathbb{N})$, $f^{(r,s)}$ are sectionally continuous and $f^{(r,s)} \in L_2$. In this paper was proved that for arbitrary function $f \in L_2^{(r,s)}$ is hold the following sharp Kolmogorov type inequality

$$\|f^{(r-k,s-l)}\|_{L_2(Q)} \le \|f\|_{L_2(Q)}^{kl/rs} \cdot \|f^{(r,0)}\|_{L_2(Q)}^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}} \cdot \|f^{(0,s)}\|_{L_2(Q)}^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot \|f^{(r,s)}\|_{L_2(Q)}^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})}.$$

Also, the Kolmogorov type inequality was found for the best approximation $\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f^{(r-k,s-l)})_2$ of intermediate derivatives $f^{(r-k,s-l)}$ of functions $f \in L_2^{(r,s)}$ by trigonometric "angles" with form

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f^{(r-k,s-l)})_2 \le$$
$$\le \left(\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2\right)^{kl/rs} \cdot \left(\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,0)}\right)_{L_2}\right)^{\left(1-\frac{k}{r}\right)\frac{l}{s}} \cdot$$
$$\cdot \left(\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(0,s)}\right)_2\right)^{\frac{k}{r}\left(1-\frac{l}{s}\right)} \cdot \left(\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_2\right)^{\left(1-\frac{k}{r}\right)\left(1-\frac{l}{s}\right)},$$

This obtained inequality was applied for the problems of joint approximation and their application in L_2. The sharp values of linear and Kolmogorov widths for some classes of functions were calculated.

Keywords: Kolmogorov's type of inequalities, generalized polynomial, quasipolynomial, the best approximation, quasiwidth.

Bibliography: 25 titles.

For citation:
M. Sh. Shabozov, M. O. Akobirshoev, 2019, "About Kolmogorov type of inequalities for periodic functions of two variables in L_2", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 348–365.

1. Введение

Неравенства, в которых нормы промежуточных производных оцениваются через нормы самих функций и нормы производных более высокого порядка, называются неравенствами типа Колмогорова. Особенно важны неулучшаемые неравенства такого типа. Для функций одной переменной один из наиболее ярких результатов был получен А. Н. Колмогоровым [1, 2]. Именно в связи с этим неравенства для промежуточных производных часто называются неравенствами типа Колмогорова. В монографии [3] приведены и систематизированы результаты исследований по неравенствам для норм промежуточных производных функций как классических, так и полученных в последнее время. К настоящему времени известно значительное количество точных неравенств типа Колмогорова для функции одной переменной, обстоятельный обзор которых можно найти в [3, 4, 5]. Для производных же целого порядка функций двух и более переменных точных неравенств типа Колмогорова известно намного меньше (см., например, [6, 7, 8, 9, 10, 11]). Во многих вопросах анализа, наряду с производными целого порядка, рассматриваются и производные дробного порядка [12]. В последнее время получены некоторые точные неравенства типа Колмогорова для производных дробного порядка [13, 14, 15, 16, 17]. Хорошо известно, что задача о получении точных неравенств типа Колмогорова тесно связана с задачей Стечкина о приближении неограниченного оператора ограниченными (см., например, [3, 4, §7.1]).

В данной статье мы докажем новые точные неравенства для периодических функций двух переменных, оценивающие L_2-норму промежуточных частных производных через L_2-норму самой функций и L_2-норму старшей частной производной, а также обобщим этот результат на наилучшие приближения функции и её последовательности производных тригонометрическими “углами” [17] или обобщенными полиномами (квазиполиномами) [18].

Статья структурирована следующим образом. В пункте 1 мы приводим необходимые определения, постановки задач и упоминаем известные результаты, непосредственно примыкающие к теме данной статьи, доказываем неравенства типа Колмогорова для дифференцируемых периодических функций двух переменных. В пункте 2 изучаем вопрос наилучшего приближения функций тригонометрическими “углами” и докажем ряд точных неравенств для наилучшего приближения частных и смешанных промежуточных производных. В пункте 3 доказываем неравенство типа Колмогорова для наилучшего приближения промежуточных частных производных через наилучшего приближения самой функции, старших частных и смешанных производных и дадим её приложения к одной экстремальной задаче аппроксимации. Наконец, в пункте 4 вычисляем точные значения квазипоперечников некоторых классов функций.

2. Определения, вспомогательные факты. Неравенство Колмогорова для $L_2^{(r,s)}(Q)$

В этом пункте излагается неравенства типа Колмогорова для периодических дифференцируемых функций двух переменных в $L_2 := L_2(Q)$, $Q := \{0 \le x, y \le 2\pi\}$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L_2(Q)} := \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} |f(x,y)|^2 dxdy \right\}^{1/2} < \infty.$$

Отметим, что неравенство типа Колмогорова для функций двух переменных в различных нормах найдены В. Н. Коноваловым [6], О. А. Тимошиным [8], В. Ф. Бабенко [10], а для промежуточных производных в многомерном случае — А. П. Буслаевым, В. М. Тихомировым [7] и В. Г. Тимофеевым [9]. Затем эта тематика была развита в ряде работ С. Б. Вакарчука с учениками [11,19] как в действительной, так и в комплексных областях, а также многими другими авторами (см., например, цитированную литературу в [20]).

Через $C^{(r,s)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$ обозначим множество функций $f(x,y)$, имеющих в квадрате Q непрерывные частные производные $f^{(\mu,\nu)}(x,y) := \partial^{\mu+\nu} f/\partial x^{\mu}\partial y^{\nu}$, $\mu \le r$, $\nu \le s$, а через $L_2^{(r,s)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$ — множество функций $f(x,y) \in C^{(r-1,s-1)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$, у которых частные производные $f^{(r,\nu)}(x,y)$, $r \in \mathbb{N}$, $\nu = \overline{0, s-1}$, $f^{(\mu,s)}(x,y), \mu = \overline{0, r-1}, s \in \mathbb{N}$ существуют, кусочно-непрерывны, допускают перемену порядка дифференцирования и $f^{(r,s)}(x,y) \in L_2(Q)$.

Пусть $f \in L_2(Q)$ имеет формальное разложение в двойной ряд Фурье

$$f(x,y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{pq}(f) e^{i(px+qy)}, \tag{1}$$

где

$$c_{pq}(f) := \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f(x,y) e^{-i(px+qy)} dxdy.$$

Для функции $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$, её частных производных $f^{(r,0)}(x,y)$ $(r \in \mathbb{N})$, $f^{(0,s)}(x,y)$ $(s \in \mathbb{N})$, а также смешанных производных $f^{(r-k,s-l)}(x,y)$ $(k, l \in \mathbb{Z}_+,\ 0 \le k \le r,\ 0 \le l \le s)$, исходя из равенства (1), в силу тождества Парсеваля запишем:

$$\|f\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \rho_{p,q}^2(f), \tag{2}$$

$$\|f^{(r,0)}\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} p^{2r} \rho_{p,q}^2(f), \tag{3}$$

$$\|f^{(0,s)}\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} q^{2s} \rho_{p,q}^2(f), \tag{4}$$

$$\|f^{(r-k,s-l)}\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} p^{2(r-k)} q^{2(s-l)} \rho_{p,q}^2(f), \tag{5}$$

$$\|f^{(r,s)}\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} p^{2r} q^{2s} \rho_{p,q}^2(f), \tag{6}$$

где

$$\rho_{pq}^2(f) = |c_{-p,-q}(f)|^2 + |c_{-p,q}(f)|^2 + |c_{p,-q}(f)|^2 + |c_{p,q}(f)|^2. \tag{7}$$

В этих обозначениях имеет место следующая

Теорема 1. *Для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ $(r, s = 2, 3...)$ при всех $k = \overline{1, r-1}$ и $l = \overline{1, s-1}$ имеют место неравенства*

$$\|f^{(r-k,s-l)}\|_{L_2(Q)} \le \|f\|_{L_2(Q)}^{kl/rs} \cdot \|f^{(r,0)}\|_{L_2(Q)}^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}} \cdot \|f^{(0,s)}\|_{L_2(Q)}^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot \|f^{(r,s)}\|_{L_2(Q)}^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})}. \tag{8}$$

Знак равенства в (8) реализуется, например, функцией

$$f_0(x,y) = \gamma \cos m(x+\alpha) \cdot \cos n(y+\beta) \in L_2^{(r,s)}(Q),\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ m, n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Используя формулу (5), запишем

$$\|f^{(r-k,s-l)}\|^2_{L_2(Q)}=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}p^{2(r-k)}q^{2(s-l)}\rho^2_{pq}(f)=$$

$$=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\{\rho^2_{p,q}(f)\}^{kl/rs}\cdot\{p^{2k}\rho^2_{p,q}(f)\}^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}}\cdot$$

$$\cdot\{q^{2l}\rho^2_{pq}(f)\}^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})}\cdot\{p^{2k}q^{2l}\rho^2_{pq}(f)\}^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})}. \tag{9}$$

Воспользуемся далее обобщенным неравенством Гельдера для сумм двойных рядов, простое доказательство которого приведено в [20]:

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}a^{\alpha}_{p,q}b^{\beta}_{p,q}d^{\gamma}_{p,q}\delta^{c}_{p,q}\le$$

$$\le\left(\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}a_{pq}\right)^{\alpha}\left(\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}b_{pq}\right)^{\beta}\left(\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}d_{pq}\right)^{\gamma}\left(\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\delta_{pq}\right)^{c}, \tag{10}$$

где $a_{pq},b_{pq},d_{pq},\delta_{pq}$ – произвольные неотрицательные числа, $\alpha+\beta+\gamma+c=\ 1$ $(\alpha,\beta,\gamma,c\ge 0)$. Учитывая неравенство (10), из соотношения (9) в силу равенств (2)-(4) и (6) получаем

$$\|f^{(r-k,s-l)}\|_{L_2(Q)}\le\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\rho^2_{pq}(f)\right\}^{kl/rs}\cdot\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}p^{2r}\rho^2_{p,q}(f)\right\}^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}q^{2s}\rho^2_{p,q}(f)\right\}^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})}\cdot\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}p^{2r}q^{2s}\rho^2_{p,q}(f)\right\}^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})}=$$

$$=\|f\|^{2kl/rs}_{L_2(Q)}\cdot\|f^{(r,0)}\|^{2(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}}_{L_2(Q)}\cdot\|f^{(0,s)}\|^{2\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})}_{L_2(Q)}\cdot\|f^{(r,s)}\|^{2(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})}_{L_2(Q)},$$

откуда и следует требуемое неравенство (8). Покажем его неулучшаемость для функции $f_0(x,y)=\gamma\cos m(x+\alpha)\cdot\cos n(y+\beta)\in L_2^{(r,s)}(Q)$. Так как

$$f_0^{(r,0)}(x,y)=\gamma m^r\cos\left[m(x+\alpha)+\frac{r\pi}{2}\right]\cdot\cos n(y+\beta),$$

$$f_0^{(0,s)}(x,y)=\gamma n^s\cos m(x+\alpha)\cdot\cos\left[n(y+\beta)+\frac{s\pi}{2}\right],$$

$$f_0^{(r,s)}(x,y)=\gamma m^r n^s\cos\left[m(x+\alpha)+\frac{r\pi}{2}\right]\cdot\cos\left[n(y+\beta)+\frac{s\pi}{2}\right],$$

то, вычислив норму этих функций, имеем:

$$\|f_0\|_{L_2(Q)}\equiv\gamma,\ \|f_0^{(r,0)}\|_{L_2(Q)}\equiv\gamma m^r,\ \|f_0^{(0,s)}\|_{L_2(Q)}\equiv\gamma n^s,$$

$$\|f_0^{(r-k,s-l)}\|_{L_2(Q)}\equiv\gamma m^{r-k}n^{s-l},\ \|f_0^{(r,s)}\|_{L_2(Q)}\equiv\gamma m^r n^s.$$

Учитывая эти равенства, получаем

$$\|f_0^{(r-k,s-l)}\|_{L_2(Q)}\equiv\gamma m^{r-k}n^{s-l}=$$

$$=(\gamma)^{kl/rs}\cdot(\gamma m^r)^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})}(\gamma n^s)^{\frac{l}{s}(1-\frac{k}{r})}\cdot(\gamma m^r n^s)^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})}=$$

$$=\|f_0\|^{\frac{kl}{rs}}_{L_2(Q)}\cdot\|f_0^{(r,0)}\|^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})}_{L_2(Q)}\cdot\|f_0^{(0,s)}\|^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}}_{L_2(Q)}\cdot\|f_0^{(r,s)}\|^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})}_{L_2(Q)},$$

откуда и следует точность неравенства (8), что и завершает доказательство теоремы 1.

3. Приближение "углом" в L_2 и некоторые приложения

В этом пункте рассматривается экстремальная задача нахождения точных значений величины наилучшего приближения периодических функций двух переменных тригонометрическими "углами" [18] или обобщенными полиномами (квазиполиномами) [19] в гильбертовом пространстве $L_2(Q)$.

Напомним необходимые понятия и определения, нужные нам в дальнейшем (см., например [21, 22, 23, 24]). Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства функций одной переменной, а

$$U_m := span\,\{u_0(x), u_1(x), \dots u_m(x)\}\,,\;\; V_n := span\,\{v_0(y), v_1(y), \dots v_n(y)\}$$

их конечномерные подпространства, то есть $U_m \subset X,\; V_n \subset Y$.

Выражение вида

$$g_{m,n}(x,y) = \sum_{p=0}^{m} u_p(x)\psi_p(y) + \sum_{q=0}^{n} v_q(y)\phi_q(x),$$

где $\{\phi_q(x)\}_{q=0}^{n}$ и $\{\psi_p(y)\}_{p=0}^{m}$ — наборы произвольных функций, соответственно из пространств X и Y, назовем обобщенным полиномом (квазиполиномом), порожденным подпространствами U_m и V_n. Указанные обобщенные полиномы образуют подпространство пространств Z, которое обозначим

$$G(U_m, V_n) : U_m \otimes Y + V_n \otimes X,$$

где операции " $\otimes$ " и " $+$ " обозначают соответственно операции декартова произведения и прямой суммы множеств. Обозначим

$$\mathscr{E}_{m,n}(f)_Z; = \mathscr{E}(f; G(U_m, V_n))_Z = \inf\left\{\|f - g_{m,n}\|_Z : g_{m,n} \in G(U_m, V_n)\right\} \tag{11}$$

и если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций, принадлежащий пространству Z, то положим

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z := \sup\left\{\mathscr{E}(f; G(U_m, V_n))_Z : f \in \mathfrak{M}\right\}. \tag{12}$$

Величина (11) характеризует наилучшее приближение элемента $f \in \mathfrak{M}$ множеством $G(U_m, V_n)$, а (12) — отклонение множества $\mathfrak{M}$ от $G(U_m, V_n)$ в нормированном пространстве $(Z, \|\cdot\|_Z)$. Для центрально-симметричного множества $\mathfrak{M} \subset Z$ величину

$$d_{m,n}(\mathfrak{M}; Z) = \inf\left\{\mathscr{E}(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z : U_m \subset X, V_n \subset Y\right\} \tag{13}$$

называют квазипоперечником множества $\mathfrak{M}$ по Колмогорову [22, 23, 24].

Пусть Λ — линейный оператор, действующий на функцию $f \in \mathfrak{M}$, причем образ $\Lambda(\mathfrak{M}) := \{\Lambda(f) : f \in \mathfrak{M}\}$ принадлежит $G(U_m, V_n)$. Положим

$$e(\mathfrak{M}, \Lambda)_Z = \sup\left\{\|f - \Lambda(f)\|_Z : f \in \mathfrak{M}\right\},$$

$$e(\mathfrak{M}, G(U_m, V_n)_Z = \inf\left\{e(\mathfrak{M}, \Lambda)_Z : \Lambda(\mathfrak{M}) \subset G(U_m, V_n)\right\}.$$

Следуя [22, 23, 24], величину

$$d'_{m,n}(\mathfrak{M}; Z) = \inf\left\{e(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z : U_m \subset X, V_n \subset Y\right\} \tag{14}$$

назовем линейным квазипоперечником множества $\mathfrak{M}$ в пространстве Z. Непосредственно из приведенных определений следуют неравенства

$$e\left(\mathfrak{M}, G(U_m, V_n)\right)_Z \geq \mathscr{E}\left(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n)\right)_Z, \quad d'_{m,n}(\mathfrak{M}; Z) \geq d_{m,n}(\mathfrak{M}; Z).$$

Всюду далее полагаем $X = Y = L_2[0,2\pi]$ — пространства суммируемых с квадратам 2π-периодических функций f на отрезке $[0,2\pi]$, а $Z = L_2(Q)$.

Пусть теперь $U^*_{2m+1} \subset L_2[0,2\pi]$, $V^*_{2n+1} \subset L_2[0,2\pi]$ — два конечномерных подпространства тригонометрических полиномов порядка $2m+1$ по переменной x и $2n+1$ — по переменной y, то есть

$$U^*_{2m+1} := span\left\{e^{ipx}\right\}_{p=-m}^{m}, \ V^*_{2n+1} := span\left\{e^{iqx}\right\}_{q=-m}^{m}.$$

Очевидно, что каждый элемент $g_{m,n}(x,y) \in G(U^*_{2m+1}, V^*_{2n+1})$ представим в виде

$$g_{m,n}(x,y) = \sum_{|p|\le m} \psi_p(y)e^{ipx} + \sum_{|q|\le n} \phi_q(x)e^{iqy}, \ p,q \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

где последовательности $\{\psi_p(y)\}_{p=-m}^{m} \subset L_2[0,2\pi]$, $\{\phi_q(y)\}_{q=-n}^{n} \subset L_2[0,2\pi]$ — произвольные наборы функций. Функции вида (15) называют квазиполиномами [19] или тригонометрическими “углами” [18]. Всюду далее

$$Z = L_2(Q) := L_2[0,2\pi] \times L_2[0,2\pi]$$

— линейное нормированное пространство 2π-периодических по каждой из переменных x и y функций $f(x,y)$, суммируемых с квадратом в области Q, а $G(U^*_{2m+1}, V^*_{2n+1}) \subset L_2(Q)$. Для произвольной функции $f \in L_2(Q)$ равенством

$$\mathscr{E}_{m,n}(f)_{L_2(Q)}; = \mathscr{E}(f; G(U_{2m+1}, V_{2n+1}))_{L_2(Q)} =$$
$$= \inf\left\{\|f - g_{m,n}\|_{L_2(Q)} : g_{m,n} \in G(U_{2m+1}, V_{2n+1})\right\} \tag{16}$$

определим величину наилучшего приближения функции f элементами множества

$$G(U^*_{2m+1}, V^*_{2n+1}).$$

Для $f \in L_2(Q)$ с формальным разложением в двойной ряд Фурье (1) квазиполиномом Фурье порядка (m,n), $m,n \in \mathbb{N}$ называют выражение

$$\Phi_{m,n}(f;x,y) := \left(\sum_{|p|\le m}\sum_{q=-\infty}^{+\infty} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{|q|\le n} - \sum_{|p|\le m}\sum_{|q|\le n}\right) c_{pq}(f)e^{i(px+qy)}.$$

Очевидно, что функцию $\Phi_{m,n}(f)$ можно также записать в виде

$$\Phi_{m,n}(f;x,y) := \left(\sum_{|p|\le m}\sum_{|q|\le n} + \sum_{|p|\ge m+1}\sum_{|q|\le n} + \sum_{|p|\le m}\sum_{|q|\ge n+1}\right) c_{pq}(f)e^{i(px+qy)}. \tag{17}$$

Ряд Фурье (1) функции $f \in L_2(Q)$ с учетом (17) запишем в виде

$$f(x,y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{pq}(f)e^{i(px+qy)} =$$

$$= \left(\sum_{|p|\le m}\sum_{|q|\le n} + \sum_{|p|\ge m+1}\sum_{|q|\le n} + \sum_{|p|\le m}\sum_{|q|\ge n+1} + \sum_{|p|\ge m+1}\sum_{|q|\ge n+1}\right) c_{pq}(f)e^{i(px+qy)} =$$

$$= \Phi_{m,n}(f;x,y) + \sum_{|p|\ge m+1}\sum_{|q|\ge n+1} c_{pq}(f)e^{i(px+qy)}. \tag{18}$$

Откуда

$$f(x,y)-\Phi_{m,n}(f;x,y)=\sum_{|p|\geq m+1}\sum_{|q|\geq n+1}c_{pq}(f)e^{i(px+qy)}. \tag{19}$$

Применяя равенство Парсеваля, из (19) будем иметь

$$\|f-\Phi_{m,n}(f)\|^2_{L_2(Q)}=\sum_{|p|\geq m+1}\sum_{|q|\geq n+1}|c_{pq}(f)|^2. \tag{20}$$

Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Среди всех обобщенных полиномов вида* (15), *принадлежащих множеству* $G(U^*_{2m-1},V^*_{2n-1})$, *наилучшее приближение функции* $f\in L_2(Q)$ *доставляет ее квазиполином Фурье порядка* $(m-1,n-1)$. *При этом*

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)}=\inf\left\{\|f-g_{m-1,n-1}\|^2_{L_2(Q)}:g_{m-1,n-1}\in G(U_{2m-1},V_{2n-1})\right\}=$$

$$=\|f-\Phi_{m-1,n-1}(f)\|^2_{L_2(Q)}=\sum_{|p|\geq m}\sum_{|q|\geq n}|c_{pq}(f)|^2. \tag{21}$$

Доказательство. Отметим, что лемма 1 приведена без доказательства в [20]. Здесь приведем строгое доказательство леммы 1 опираясь на схему рассуждений, приведенную в работах [11, 21]. Рассмотрим произвольный элемент $g_{m-1,n-1}\in G(U^*_{2m-1},V^*_{2n-1})$. Поскольку последовательности $\{\psi_p(y)\}_{p=-(m-1)}^{m-1}\in L_2[0,2\pi]$, $\{\phi_q(y)\}_{q=-(n-1)}^{n-1}\in L_2[0,2\pi]$, то в смысле сходимости в метрике пространства $L_2[0,2\pi]$ имеют место следующие равенства

$$\psi_p(y)=\sum_{q=-\infty}^{+\infty}c_q(\psi_p)e^{iqy},\ p=\overline{-(m-1),m-1}, \tag{22}$$

$$\phi_q(x)=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}c_p(\phi_q)e^{ipx},\ q=\overline{-(n-1),n-1}. \tag{23}$$

Подставляя вместо $\psi_p(y)$ и $\phi_q(x)$ в равенство (15) их разложения в ряды Фурье, стоящие в правых частях соотношений (22) и (23), в смысле сходимости в метрике $L_2(Q)$ получим равенство

$$g_{m-1,n-1}(x,y)=\sum_{|p|\leq m-1}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}c_q(\psi_p)e^{i(px+qy)}+\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{|q|\leq n-1}c_p(\phi_q)e^{i(px+qy)},$$

которое, ради удобства, запишем также в виде

$$g_{m-1,n-1}(x,y)=\left(\sum_{|p|\leq m-1}\sum_{|q|\leq n-1}+\sum_{|p|\leq m-1}\sum_{|q|\geq n}\right)c_q(\psi_p)e^{i(px+qy)}+$$

$$+\left(\sum_{|p|\leq m-1}\sum_{|q|\leq n-1}+\sum_{|p|\geq m}\sum_{|q|\leq n-1}\right)c_p(\phi_q)e^{i(px+qy)}. \tag{24}$$

Пользуясь равенствами (18) и (24), запишем

$$f(x,y)-g_{m-1,n-1}(x,y)=\sum_{|p|\leq m-1}\sum_{|q|\leq n-1}\left(c_{pq}(f)-c_p(\phi_q)-c_q(\psi_p)\right)e^{i(px+qy)}+$$

$$+\sum_{|p|\le m-1}\sum_{|q|\ge n}\left(c_{pq}(f)-c_q(\psi_p)\right)e^{i(px+qy)}+\sum_{|p|\ge m}\sum_{|q|\le n-1}\left(c_{pq}(f)-c_p(\phi_q)\right)e^{i(px+qy)}+$$

$$+\sum_{|p|\ge m}\sum_{|q|\ge n}c_{pq}(f)e^{i(px+qy)}.$$

Выполнив простые выкладки с учетом ортогональности системы $\{e^{i(px+qy)}\}_{p,q=-\infty}^{+\infty}$ в квадрате $Q:=\{0\le x,y\le 2\pi\}$, получаем равенство

$$\|f-g_{m-1,n-1}\|_{L_2(q)}=$$

$$=\sum_{|p|\le m-1}\sum_{|q|\le n-1}\Big|c_{pq}(f)-c_p(\phi_q)-c_q(\psi_p)\Big|^2+\sum_{|p|\le m-1}\sum_{|q|\ge n}\Big|c_{pq}(f)-c_q(\psi_p)\Big|^2+$$

$$+\sum_{|p|\ge m}\sum_{|q|\le n-1}\Big|c_{pq}(f)-c_p(\phi_q)\Big|^2+\sum_{|p|\ge m}\sum_{|q|\ge n}\Big|c_{pq}(f)\Big|^2. \tag{25}$$

Из соотношения (25) сразу вытекает, что величина (16) принимает минимальное значение, равное правой части (21), тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} c_{pq}(f)=c_p(\phi_q)+c_q(\psi_p),\ |p|\le m-1,\ |q|\le n-1, m,n\in\mathbb{N},\\ c_{pq}(f)=c_q(\psi_p),\ |p|\le m-1,\ |q|\ge n, m,n\in\mathbb{N},\\ c_{pq}(f)=c_p(\phi_q),\ |p|\ge m,\ |q|\le n-1, m,n\in\mathbb{N}.\end{cases} \tag{26}$$

Подставляя в правую часть (24) вместо коэффициентов $c_q(\psi_p)$ и $c_p(\phi_q)$ их значение через коэффициенты $c_{pq}(f)$ из системы (26), мы получим общий вид квазиполинома Фурье порядка $(m-1,n-1)$ в виде равенства (17), и следовательно, имеет место равенство (21). Лемма 1 доказана.

Замечание 1. В силу обозначения (7) равенство (21) запишем в более удобном для приложения виде

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)}=\sum_{|p|\ge m}\sum_{|q|\ge n}|c_{pq}(f)|^2=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho^2_{pq}(f). \tag{27}$$

В частности, из (27) следует, что если $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$, то

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)}:=\mathscr{E}^2\left(f;G(U^*_{2m-1},V^*_{2n-1})\right)_{L_2(Q)}=$$

$$=\mathscr{E}^2\left(f_1;U^*_{2m-1}\right)_{L_2[0,2\pi]}\cdot\mathscr{E}^2\left(f_2;V^*_{2n-1}\right)_{L_2[0,2\pi]}=\mathscr{E}^2_{m-1}\left(f_1\right)_{L_2[0,2\pi]}\cdot\mathscr{E}^2_{n-1}\left(f_2\right)_{L_2[0,2\pi]}, \tag{28}$$

где

$$\mathscr{E}\left(g;G_{2\nu-1}\right)_{L_2[0,2\pi]}:=\inf\{\|g-T_{\nu-1}(q)\|_{L_2[0,2\pi]}:T_{\nu-1}\in G_{2\nu-1}\}$$

— величина наилучшего среднеквадратического приближения периодической функции $g(x)$ тригонометрическими полиномами $G_{2\nu-1}:=span\{e^{ijx}\}_{j=-(\nu-1)}^{\nu-1}$ порядка $2\nu-1$ в пространстве $L_2[0,2\pi]$.

Лемма 2. *Для произвольной функции $f\in L_2^{(r,s)}(Q)$ имеет место неравенство*

$$\mathscr{E}\left(f;G(U^*_{2m-1},V^*_{2n-1})\right)_{L_2(Q)}\le m^{-r}n^{-s}\mathscr{E}\left(f^{(r,s)};G(U^*_{2m-1},V^*_{2n-1})\right)_{L_2(Q)}, \tag{29}$$

которое является точным в том смысле, что для функции

$$f_0(x,y)=\cos mx\cos ny\in L_2^{(r,s)}(Q)$$

обращается в равенство.

Доказательство. В самом деле, из принадлежности функции $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ следует, что $f \in L_2(Q)$. Простыми вычислениями легко доказать, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ справедливо равенство

$$\mathscr{E}^2(f^{(r,s)})_{L_2(Q)} = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} p^{2r} q^{2s} \rho_{pq}^2(f). \tag{30}$$

Из равенства (27), учитывая (30), запишем

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}^2(f)_{L_2(Q)} := \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} \rho_{pq}^2(f) = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} \frac{1}{p^{2r}} \cdot \frac{1}{q^{2s}} \cdot p^{2r} q^{2s} \cdot \rho_{pq}^2(f) \leq$$

$$\leq \frac{1}{m^{2r}} \cdot \frac{1}{n^{2s}} \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} p^{2r} q^{2s} \rho_{p,q}^2(f) = m^{-2r} n^{-2s} \mathscr{E}_{m-1,n-1}^2(f^{(r,s)})_{L_2(Q)},$$

откуда и вытекает неравенство (29). Для функции $f_0(x,y) = \cos mx \cos ny$ имеем: $\rho_{pq}(f_0) \equiv 0$, для $p \neq m, q \neq n$, $\rho_{mn}(f_0) \equiv 1$,

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f_0)_{L_2(Q)} \equiv 1, \ \mathscr{E}_{m-1,n-1}(f_0^{(r,s)})_{L_2(Q)} \equiv m^r n^s, \tag{31}$$

а потому имеем:

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f_0)_{L_2(Q)} \equiv 1 = m^{-r} n^{-s} \cdot m^r n^s = m^{-r} n^{-s} \cdot \mathscr{E}_{m-1,n-1}(f_0^{(r,s)})_{L_2(Q)},$$

откуда и следует утверждение леммы 2.

Следствие 2. *В условиях леммы 2 справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)}}{\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,s)})_{L_2(Q)}} = \frac{1}{m^r n^s}. \tag{32}$$

В самом деле, из неравенства (29) следует, что

$$\sup_{f \in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{\mathscr{E}_{2m-1,2n-1}(f)_{L_2(Q)}}{\mathscr{E}_{2m-1,2n-1}(f^{(r,s)})_{L_2(Q)}} \leq \frac{1}{m^r n^s}. \tag{33}$$

Учитывая равенства (31), получим противоположное неравенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{\mathscr{E}_{2m-1,2n-1}(f)_{L_2(Q)}}{\mathscr{E}_{2m-1,2n-1}(f^{(r,s)})_{L_2(Q)}} \geq \frac{\mathscr{E}_{2m-1,2n-1}(f_0)_{L_2(Q)}}{\mathscr{E}_{2m-1,2n-1}(f_0^{(r,s)})_{L_2(Q)}} = \frac{1}{m^r n^s}. \tag{34}$$

Равенство (32) следует из сопоставления неравенств (33) и (34).

4. Основной результат и некоторые следствия

Пользуясь результатом теоремы 1, докажем следующее утверждение

Теорема 2. *Пусть* $m > r \geq k \geq 1, \ n > s \geq l \geq 1, \ m, n, r, s, k, l \in \mathbb{N}$. *Тогда для произвольной функции* $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ *имеет место неравенство*

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f^{(r-k,s-l)})_{L_2(Q)} \leq$$

$$\leq \left(\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f\right)_{L_2(Q)}\right)^{kl/rs} \cdot \left(\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,0)}\right)_{L_2(Q)}\right)^{\left(1-\frac{k}{r}\right)\frac{l}{s}} \cdot$$

$$\cdot \left(\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(0,s)}\right)_{L_2(Q)}\right)^{\frac{k}{r}\left(1-\frac{l}{s}\right)} \cdot \left(\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)}\right)^{\left(1-\frac{k}{r}\right)\left(1-\frac{l}{s}\right)}, \tag{35}$$

которое является точным в вышеуказанном смысле.

Доказательство. Будем следовать схеме рассуждений, приведенной при доказательстве теоремы 5 из работы [21]. Для произвольной функции

$$f(x,y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{pq}(f)e^{i(px+qy)},$$

принадлежащей классу $L_2^{(r,s)}(Q)$, в силу (19) запишем

$$R_{m,n}(f;x,y) = f(x,y) - \Phi_{m-1,n-1}(f;x,y) = \sum_{|p|\geq m}\sum_{|q|\geq n} c_{pq}(f)e^{i(px+qy)}. \tag{36}$$

Очевидно, что если $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$, то и $R_{m,n}(f) \in L_2^{(r,s)}(Q)$, причём легко проверить, что при любых $m,n \in \mathbb{N}, k,l \in \mathbb{Z}_+$ имеют место равенства

$$\Phi^{(k,0)}_{m-1,n-1}(f;x,y) = \Phi_{m-1,n-1}\left(f^{(k,0)};x,y\right), \tag{37}$$

$$\Phi^{(0,l)}_{m-1,n-1}(f;x,y) = \Phi_{m-1,n-1}\left(f^{(0,l)};x,y\right), \tag{38}$$

$$\Phi^{(k,l)}_{m-1,n-1}(f;x,y) = \Phi_{m-1,n-1}\left(f^{(k,l)};x,y\right), \tag{39}$$

а потому из соотношений (36)-(39) при любых значениях $m,n,r \in \mathbb{N}$ имеем

$$R^{(r,0)}_{m,n}(f;x,y) = f^{(r,0)}(x,y) - \Phi^{(r,0)}_{m-1,n-1}(f;x,y) =$$

$$= \sum_{|p|\geq m}\sum_{|q|\geq n}(ip)^r c_{pq}(f)e^{i(px+qy)} = R_{m-1,n-1}\left(f^{(r,0)};x,y\right). \tag{40}$$

Аналогичным образом получаем

$$R^{(0,s)}_{m,n}(f;x,y) = R_{m,n}\left(f^{(0,s)};x,y\right), \tag{41}$$

$$R^{(r,s)}_{m,n}(f;x,y) = R_{m,n}\left(f^{(r,s)};x,y\right), \tag{42}$$

$$R^{(r-k,s-l)}_{m,n}(f;x,y) = R_{m,n}\left(f^{(r-k,s-l)};x,y\right). \tag{43}$$

Используя замечание 1, из равенств (36), (41)-(43) имеем

$$\|R_{m,n}(f)\|^2_{L_2(Q)} = \sum_{|p|\geq m}\sum_{|q|\geq n}|c_{pq}|^2 = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho^2_{pq}(f) = \mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)}, \tag{44}$$

$$\|R^{(r,0)}_{m,n}(f)\|^2_{L_2(Q)} = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}p^{2r}\rho^2_{pq}(f) = \mathscr{E}^2_{m-1,n-1}\left(f^{(r,0)}\right)_{L_2(Q)}, \tag{45}$$

$$\|R^{(0,s)}_{m,n}(f)\|^2_{L_2(Q)} = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}q^{2s}\rho^2_{pq}(f) = \mathscr{E}^2_{m-1,n-1}\left(f^{(0,s)}\right)_{L_2(Q)}, \tag{46}$$

$$\|R_{m,n}^{(r,s)}(f)\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} p^{2r}p^{2s}\rho_{pq}^2(f) = \mathscr{E}_{m-1,n-1}^2\big(f^{(r,s)}\big)_{L_2(Q)}, \tag{47}$$

$$\|R_{m,n}^{(r-k,s-l)}(f)\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} p^{2(r-k)}p^{2(s-l)}\rho_{pq}^2(f) = \mathscr{E}_{m-1,n-1}^2\big(f^{(r-k,s-l)}\big)_{L_2(Q)}. \tag{48}$$

Применяя теорему 1 к функции $R_{m,n}(f) \in L_2^{(r,s)}(Q)$ и учитывая равенства (44)-(48), запишем

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}^2\big(f^{(r-k,s-l)}\big)_{L_2(Q)} = \|R_{m,n}^{(r-k,s-l)}(f)\|_{L_2(Q)}^2 \leq$$

$$\leq \big\|R_{m,n}(f)\big\|_{L_2(Q)}^{kl/(rs)} \cdot \big\|R_{m,n}^{(r,0)}(f)\big\|_{L_2(Q)}^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}} \cdot \big\|R_{m,n}^{(0,s)}(f)\big\|_{L_2(Q)}^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot \big\|R_{m,n}^{(r,s)}(f)\big\|_{L_2(Q)}^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})} =$$

$$= \Big(\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f\big)_{L_2(Q)}\Big)^{kl/(rs)} \cdot \Big(\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(r,0)}\big)_{L_2(Q)}\Big)^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}} \cdot$$

$$\cdot \Big(\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(0,s)}\big)_{L_2(Q)}\Big)^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot \Big(\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(r,s)}\big)_{L_2(Q)}\Big)^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})}.$$

Этим неравенство (35) доказано. Неулучшаемость неравенства (35) для функции $f_0 \in L_2^{(r,s)}(Q)$, рассмотренной в теореме 1, проверяется непосредственным вычислением. В самом деле, для $f_0(x,y) = \gamma \cos m(x+\alpha)\cos n(y+\beta)$ коэффициент $\rho_{m,n} \equiv \gamma$, и из (44)–(48) вытекает, что

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f_0\big)_{L_2(Q)} \equiv \gamma, \quad \mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(r,0)}\big)_{L_2(Q)} \equiv \gamma m^r,$$

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f_0^{(0,s)}\big)_{L_2(Q)} \equiv \gamma n^s, \quad \mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(r,s)}\big)_{L_2(Q)} \equiv \gamma m^r n^s,$$

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f_0^{(r-k,s-l)}\big)_{L_2(Q)} = \gamma m^{r-k}n^{s-l}.$$

Используя эти равенства, получаем

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f_0^{(r-k,s-l)}\big)_{L_2(Q)} = \gamma m^{r-k}n^{s-l} = (\gamma)^{\frac{kl}{rs}+(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}+\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})+(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})}.$$

$$\cdot\big(m^r\big)^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}+(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})} \cdot \big(n^s\big)^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})+(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})} =$$

$$= (\gamma)^{\frac{kl}{rs}} \cdot (\gamma m^r)^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}} \cdot (\gamma n^s)^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot (\gamma m^r n^s)^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})} =$$

$$= \Big(\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f_0\big)_{L_2(Q)}\Big)^{kl/(rs)} \cdot \Big(\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f_0^{(r,0)}\big)_{L_2(Q)}\Big)^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}} \cdot$$

$$\cdot \Big(\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f_0^{(0,s)}\big)_{L_2(Q)}\Big)^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot \Big(\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f_0^{(r,s)}\big)_{L_2(Q)}\Big)^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})},$$

откуда и следует неулучшаемость неравенства (35). Теорема 2 доказана.

Обозначим через $W^{(r,s)}L_2(Q)$ класс функций $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$, удовлетворяющих условию $\|f^{(r,s)}\|_{L_2(Q)} \leq 1$. Справедлива следующая

Лемма 3. *При любых $m,n,r,s \in \mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$\sup\Big\{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f\big)_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)}L_2(Q)\Big\} = \frac{1}{m^r n^s}, \tag{49}$$

$$\sup\Big\{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(r,0)}\big)_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)}L_2(Q)\Big\} = \frac{1}{m^r}, \tag{50}$$

$$\sup\Big\{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(0,s)}\big)_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)}L_2(Q)\Big\} = \frac{1}{n^s}. \tag{51}$$

Доказательство. Не умаляя общности, приводим доказательство равенства (49). Заметим, что для любой функции $f \in W^{(r,s)}L_2(Q)$ выполняется неравенство

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(r,s)}\big)_{L_2(Q)} \le \|f^{(r,s)}\|_{L_2(Q)} \le 1, \tag{52}$$

а потому из утверждения леммы 2 для произвольной функции $f \in W^{(r,s)}L_2(Q)$ следует, что

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f\big)_{L_2(Q)} \le \frac{1}{m^r n^s} \cdot \mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(r,s)}\big)_{L_2(Q)} \le \frac{1}{m^r n^s}. \tag{53}$$

Теперь покажем, что неравенство (53) на множестве функций $W^{(r,s)}L_2(Q)$ является точным. Функция

$$f_1(x,y) = \frac{1}{m^r n^s}\cos mx \cos ny$$

очевидно принадлежит классу $W^{(r,s)}L_2(Q)$. В самом деле, для этой функции

$$f_1^{(r,s)}(x,y) = \cos\left(mx + \frac{r\pi}{2}\right)\cos\left(ny + \frac{s\pi}{2}\right),$$

и так как $\|f_1^{(r,s)}\|_{L_2(Q)} = 1$, то $f \in W^{(r,s)}L_2(Q)$. С другой стороны, как следует из равенства (27),

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f_1\big)_{L_2(Q)} = \frac{1}{m^r n^s},$$

а потому

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f\big)_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)}L_2(Q)\right\} \ge \mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f_1\big)_{L_2(Q)} = \frac{1}{m^r n^s}. \tag{54}$$

Требуемое равенство (49) вытекает из сопоставления неравенств (53) и (54). Аналогичным образом доказываются два других равенства (50) и (51), чем и завершаем доказательство леммы 3.

Утверждение леммы 3 в сочетании с результатом теоремы 2 позволяет решить следующую экстремальную задачу об одновременном приближении функций, её частных и смешанных производных квазиполиномами: требуется найти точное значение величины

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(r-k,s-l)}\big)_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)}L_2(Q)\right\}.$$

Теорема 3. *Пусть $m,n,r,s,k,l \in \mathbb{N}$ удовлетворяет ограничениям $r \ge k \ge 1$, $s \ge l \ge 1$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(r-k,s-l)}\big)_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)}L_2(Q)\right\} = \frac{1}{m^k n^l}. \tag{55}$$

Доказательство. Так как для произвольной функции $f \in W^{(r,s)}L_2(Q)$ имеют место оценки (49)-(52), то, пользуясь указанными оценками, из неравенства (35) получаем

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r-k,s-l)}\right)_{L_2(Q)} \le \left(\frac{1}{m^r n^s}\right)^{kl/rs} \cdot \left(\frac{1}{m^r}\right)^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot \left(\frac{1}{n^s}\right)^{\frac{l}{s}(1-\frac{k}{r})} = \frac{1}{m^k n^l}. \tag{56}$$

Для получения оценки снизу рассмотрим ту же функцию $f_1(x,y)$, рассмотренную нами в конце леммы 3, для которой

$$f_1^{(r-k,s-l)}(x,y) = \frac{1}{m^k} \cdot \frac{1}{n^l}\cos\left(mx + \frac{(m-k)\pi}{2}\right)\cos\left(nx + \frac{(n-l)\pi}{2}\right),$$

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f_1^{(r-k,s-l)}\right)_{L_2(Q)} = \frac{1}{m^k n^l}.$$

Следовательно,

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(r-k,s-l)}\big)_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)}L_2(Q)\right\} \geq$$
$$\geq \mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f_1^{(r-k,s-l)}\right)_{L_2(Q)} = \frac{1}{m^k n^l}. \tag{57}$$

Требуемое равенство (55) вытекает из неравенств (56) и (57). Теорема 3 доказана.

5. Точные значения квазипоперечников

В этом пункте вычислим точные значения квазипоперечников (13) и (14) класса функции $W^{(r,s)}L_2(Q)$. Имеет место

Теорема 4. *Для любых чисел $m, n, r, s \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$d_{2m-1,2n-1}\left(W^{(r,s)}L_2(Q), L_2(Q)\right) = d'_{2m-1,2n-1}\left(W^{(r,s)}L_2(Q), L_2(Q)\right) = \frac{1}{m^r n^s}. \tag{58}$$

Доказательство. Оценку сверху для линейного квазипоперечника получим из равенства (49):

$$d'_{2m-1,2n-1}\left(W^{(r,s)}L_2(Q), L_2(Q)\right) \leq \mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(W^{(r,s)}L_2(Q)\right)_{L_2(Q)} = \frac{1}{m^r n^s}. \tag{59}$$

Для получения обратного неравенства используем метод оценки снизу квазипоперечников на базе одномерных колмогоровских поперечников [22, 23]. С этой целью для $m, n, r, s \in \mathbb{N}$ вводим в рассмотрение одномерных классов функции

$$W^{(r)}L_2[0, 2\pi] := \left\{\phi \in L_2^{(r)}[0, 2\pi] : \|\phi^{(r)}\|_{L_2[0,2\pi]} \leq 1\right\},$$

$$W^{(s)}L_2[0, 2\pi] := \left\{\psi \in L_2^{(s)}[0, 2\pi] : \|\psi^{(s)}\|_{L_2[0,2\pi]} \leq 1\right\},$$

на основе которых определим класс функций

$$\widetilde{W}^{(r,s)}L_2(Q) := W^{(r)}L_2[0, 2\pi] \otimes W^{(s)}L_2[0, 2\pi].$$

Из равенства (28) следует, что для введенного класса функций

$$d_{2m-1,2n-1}\left(\widetilde{W}^{(r,s)}L_2(Q), L_2(Q)\right) :=$$
$$:= d_{2m-1}\left(W^{(r)}L_2[0, 2\pi], L_2[0, 2\pi]\right) \cdot d_{2n-1}\left(W^{(s)}L_2[0, 2\pi], L_2[0, 2\pi]\right), \tag{60}$$

где $d_\rho(\mathfrak{N}, L_2[0, 2\pi])$ - обычный колмогоровский ρ-поперечник. Учитывая равенство (60), включение $\widetilde{W}^{(r,s)}L_2(Q) \subset W^{(r,s)}L_2(Q)$, а также одномерный результат [24, с.343, теорема 8.1.3]:

$$d_{2\mu-1}\left(W^{(\nu)}L_2[0, 2\pi], L_2[0, 2\pi]\right) = \frac{1}{\mu^\nu}, \quad \mu, \nu \in \mathbb{N},$$

приходим к следующей оценке снизу

$$d_{2m-1,2n-1}\left(W^{(r,s)}L_2(Q), L_2(Q)\right) \geq d_{2m-1,2n-1}\left(\widetilde{W}^{(r,s)}L_2(Q), L_2(Q)\right) =$$
$$= d_{2m-1}\left(W^{(r)}L_2[0, 2\pi], L_2[0, 2\pi]\right) \cdot d_{2n-1}\left(W^{(s)}L_2[0, 2\pi], L_2[0, 2\pi]\right) = \frac{1}{m^r n^s}. \tag{61}$$

Сопоставляя неравенства (59) и (61), получаем требуемое равенство (58). Теорема 4 доказана.

6. Заключение

В данной работе доказано неравенство типа Колмогорова для периодических дифференцируемых функций двух переменных в метрике $L_2 := L_2(Q)$, $Q := \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ и даны некоторые его приложения в задачах наилучшего приближения функций $f \in L_2(Q)$ тригонометрическими "углами". Решена задача об одновременном приближении функций, ее частных и смешанных производных тригонометрическими "углами" на классе функций $W^{(r,s)}L_2(Q)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Учен. записки МГУ. Математика. 1939. Т.30, № 3. С. 3–16.

2. Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Избр. тр.: Математика, механика. М.: Наука, 1985. С. 252–263.

3. Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А. Неравенства для производных и их приложения. Киев: Наукова думка, 2003. 590 с.

4. Арестов В. В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 6. С. 89–124.

5. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомирова В. М. Выпуклый анализ и его приложения. Эдиториал УРСС. М. 2000.

6. Коновалов В. Н. Точные неравенства для норм функций, третьих частных, вторых смешанных или косых производных // Матем. заметки. 1978. Т. 23, № 1. С. 67–78.

7. Буслаев А. П., Тихомиров В. М. О неравенствах для производных в многомерном случае // Матем. заметки. 1979. Т. 25, № 1. С. 59–74.

8. Тимошин О. А. Точные неравенства между нормами частных производных второго и третьего порядка // ДАН. 1995. Т. 344, № 1. С. 20–22.

9. Тимофеев В. Г. Неравенство типа Ландау для функций нескольких переменных // Матем. заметки. 1985. Т. 37, № 5. С. 676–689.

10. Бабенко В. Ф. О точных неравенствах типа Колмогорова для функций двух переменных // Докл. НАН Укараины. 2000. № 5. С. 7–11.

11. Вакарчук С. Б., Швачко А. В. Неравенства Колмогоровского типа для прозводных функций двух переменных и их приложение к аппроксимации "углом" // Известия вузов. Математика. 2015. № 11. С. 3–22.

12. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричув О. И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск, 1987. 650 с.

13. Arestov V. V. Inequalities for fractional derivatives on the half-line // Approximation theory: proc. conf. Warsaw: PWN-Pol. Sci. Publ. 1979. P. 19–34.

14. Magaril-Il'jaev G. G., Tikhomirov V. M. On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line // Anal. Math. 1981. Vol. 7, no. 1. P. 37–47.

15. Бабенко В. Ф., Чурилова М. С. О неравенствах типа Колмогорова для производных дробного порядка // Вестн. Днепропетровского ун-та. Математика. 2001. Т. 6. С. 16–20.

16. Бабенко В. Ф., Пичугов С. А. Точные оценки для норм дробных производных функций многих переменных, удовлетворяющих условию Гельдера // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 1. С. 26–34.

17. Babenko V. F., Parfinovich N. V., Pichugov S. A. Sharp Kolmogorov-type inequalities for norms of fractional derivatives of multivariate functions // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62, № 3. С. 301–314.

18. Потапов М. К. Изучение некоторых классов функций при помощи приближения “углами” // Труды Матем. ин-та. АН СССР. 1972. Т. 117. С. 256–300.

19. Брудный Ю. А. Приближение функций n переменных квазимногочленами // Изв. АН СССР, серия Математика. 1970. Т. 34, № 3. С. 564–583.

20. Вакарчук С. Б., Вакарчук М. Б. Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации // Укр. матем. журнал. 2011. Т. 63, № 12. С. 1579–1601.

21. Шабозов М. Ш., Сайнаков В. Д. О неравенствах типа Колмогорова в пространстве Бергмана для функций двух переменных // Труды ИММ УрО РАН. 2018. Т. 23, № 4. С. 295–309.

22. Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш. О точных значениях квазипоперечников некоторых функциональных классов // Укр. матем. журнал. 1996. Т. 48, № 3, С. 301–308.

23. Шабозов М. Ш., Акобиршоев М. О. Квазипоперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных // Доклады РАН. 2005. Т. 404, № 4. С. 406–464.

24. Шабозов М. Ш., Акобиршоев М. О. О точных значениях квазипоперечников некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных // Укр. матем. журнал. 2009. Т.61, № 6. С. 855–864.

25. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука. 1987. 424 с.

REFERENCES

1. Kolmogorov A. N. 1939, “On inequalities between the upper bounds of the successive derivatives of an arbitrary function on the infinite interval” *Uch. Zap. MGU*, vol. 3. pp. 3–16.

2. Kolmogorov A. N. 1985, “On inequalities between the upper bounds of the successive derivatives of an arbitrary function on the infinite interval” *Selected Works: Mathematics and Mechanics*, pp. 252–263.

3. Babenko V. F., Korneichuk N. P., Kofanov V. A., Pichugov S. A. 2003, “Inequalities for Derivatives and Theory of Application”, *Naukova Dumka, Kiev*, 252 p.

4. Arestov V. V. 1996, “Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems,” *Russ. Math. Surv*, vol. 51. no 6. pp. 1093–1126.

5. Magaril-Iljaev G. G., Tikhomirov V. M. 2000, “Convex Analysis and Application” *Editorial, URSS.*

6. Konovalov V. N. 1978, “Precise inequalities for norms of functions, third partial, second mixed, or directional derivatives”, *Math. Notes of Acad. Sci. of the USSR*, vol. 23. no 1. pp. 38–44.

7. Buslaev A. P., Tikhomirov V. M. 1979, “Inequalities of derivatives in the multidimensional case”, *Math. Notes of Acad. Sci. of the USSR*, vol. 25. no 1. pp. 32–40.

8. Timoshin O. A. 1995, “Precise inequalities between the norms of partial derivatives or second and third order”, *DAN*, vol. 344. no 1. pp. 20–22.

9. Timofeev V. G. 1985, “Landau inequality for function of several variables”, *Math. Notes of Acad. Sci. of the USSR*, vol. 37. no 5. pp. 369–377.

10. Babenko V. F. 2000, “The exact inequalities of the Kolmogorov type for functions of two variables”, *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki*, no 5. pp. 7–11.

11. Vakarchuk S. B., Shvachko A. V. 2015, “Kolmogorov-type inequalities of derived functions of two variables with application for approximation by an “Angle””, *Russian Mathematics*, vol. 59. no 11. pp. 1–18.

12. Samko S. G., Kilbas A. A., Marychev O. I. 1987, “Fractional and Derivatives. Theory and Applications”, *Nauka i Tekhnika. Minsk*, 650 p.

13. Arestov V. V. 1979, “Inequalities for fractional derivatives on the half-line” *Approximation theory: proc. conf. Warsaw: PWN-Pol. Sci. Publ.*, pp. 19–34.

14. Magaril-Il’jaev G. G., Tikhomirov V. M. 1981, “On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line” *Anal. Math.*, vol. 7, no. 1, pp. 37–47.

15. Babenko V. F., Churilova M. S. 2001, “On Kolmogorov-type inequality for fractional order derivatives” *Researches in Mathematics*, vol. 6, pp. 16–20.

16. Babenko V. F., Pichugov S. A. 2010, “Sharp estimates for the norms of fractional derivatives of functions of several variables satisfying the Hölder donditions” *Math. Notes*, vol. 87, no. 1-2, pp. 23–30.

17. Babenko V.F., Parfinovich N.V., Pichugov S.A. 2010, “Sharp Kolmogorov-type inequalities for norms of fractional derivatives of multivariate functions” *Ukrainian Math. Journal*, vol. 62, no 3, pp. 301–314.

18. Potapov M. K. 1972, “The study of certain classes of functions by means of “angular” approximation” *Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 117, pp. 301–342.

19. Brudnyĭ Ju. A. 1970, “Approximation of functions of n variables by quasi-polynomials” *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 34, pp. 568–586.

20. Vakarchuk S. B., Vakarchuk M. B. 2011, “The Kolmogorov-type inequality for analytic functions of one and two complex variables and their applications in theory of approximation” *Ukr. Mat. Zh.*, vol. 63, no. 12, pp. 1579–1601.

21. Shabozov M. Sh., Saynakov V. D. 2018, “On Kolmogorov type inequality in the Bergman space for functions of two variables” *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 24, no. 4, pp. 270–282.

22. Vakarchuk S. B., Shabozov M. Sh. 1996, “On exact values of quasiwidths of some classes of functions” *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 48, no. 3, pp. 338–346.

23. Shabozov M. Sh., Akobirshoev M. O. 2005, “Quasiwidths of some classes of differentiable periodic functions of two variables” *Dokl. Akad. Nauk*, vol. 404, no. 4, pp. 460–464.

24. Shabozov M. Sh., Akobirshoev M. O. 2009, “On exact values of quasiwidths of some classes of differentiable functions of two variables” *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 61, no. 6, pp. 1013–1024.

25. Korneichuk N. P. 1987, “Exact constant in the theory of approximation”, *Moscow. Nauka*, 424 p.

Получено 18.04.2019 г.
Принято в печать 12.07.2019 г.