ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-336-347

Среднее значение произведений символов Лежандра по простым [1]

В. Н. Чубариков

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, декан механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su; chubarik2009@live.ru

Аннотация

В статье найдена асимптотическая формула при $N \to \infty$ для количества простых чисел $p \leq N$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\left(\frac{p+k_s}{q_s}\right) = \vartheta_s, s = 1, \ldots, r,$$

где $q_1, \ldots, q_r$ — различные простые числа, ϑ_s может принимать лишь два значения $+1$ или -1, а натуральные числа k_s принимают значения несравнимые между собой по модулям $q_s, s = 1, \ldots, r$, т.е. $k_s \not\equiv k_t \pmod{q_s}, t = 1, \ldots, r$.

Найденная асимптотика является нетривиальной при $q = q_1 \ldots q_r \gg N^{1+\varepsilon}$, причём количество r может расти как $o(\ln N)$. Здесь $\varepsilon > 0$ — произвольная постоянная.

Ключевые слова: Символ Лежандра, метод Виноградова оценок сумм по простым, характер Дирихле, комбинаторное решето Виноградова, метод двойных сумм.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:
В. Н. Чубариков, Среднее значение произведений символов Лежандра по простым // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 336–347.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 2.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-336-347

The mean value of products of Legendre symbol over primes [2]

V. N. Chubarikov

[1] Работа выполнена на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова.
[2] The work was performed at the faculty of Mechanics and mathematics of Lomonosov Moscow state University.

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematical and Computer Methods of Analysis, Dean of the Mechanics and Mathematics Faculty, Moscow State University named after M. V. Lomonosov (Moscow).
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su; chubarik2009@live.ru

Abstract

In the paper the asymptotical formula as $N \to \infty$ for the number of primes $p \leq N$, satisfying to the system of equations

$$\left(\frac{p+k_s}{q_s}\right) = \vartheta_s, s = 1, \ldots, r,$$

where $q_1, \ldots, q_r$ — different primes, ϑ_s may be take only two values $+1$ or -1, but natural numbers k_s take noncongruent values on modulus $q_s, s = 1, \ldots, r$, i.e. $k_s \not\equiv k_t \pmod{q_s}, t = 1, \ldots, r$, is found.

The finding asymptotics is nontrivial as $q = q_1 \ldots q_r \gg N^{1+\varepsilon}$, moreover the number of r may grow up as $o(\ln N)$. Here $\varepsilon > 0$ is an arbitrary constant.

Keywords: The Legendre symbol, the Vinogradov method of estimating on sums over primes, the Dirichlet's character, the Vinogradov's combinatorial sieve, the method of double sums.

Bibliography: 14 titles.

For citation:
V. N. Chubarikov, 2019, The mean value of products of Legendre symbol over primes , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 336–347.

Введение. Формулировка основных результатов

В настоящей работе дано ещё одно применение метода И. М. Виноградова оценок арифметических сумм с простыми числами, касающегося проблемы распределения значений неглавного характера Дирихле на последовательности "сдвинутых простых чисел", т.е. последовательности вида $p + k$ по модулю нечётного простого числа q при $q \to \infty$, причём p пробегает последовательные простые числа, k — фиксированное целое число с условием $(k, q) = 1$.

Здесь мы рассматриваем последовательность p последовательных значений простых чисел, $q_1, \ldots, q_r$ — различные нечётные простые числа, $q = q_1 \ldots q_r, (k_s, q_s) = 1, 1 \leq k_s \leq q_s, k_s \not\equiv k_t \pmod{q_t}, s \neq t, s, t = 1, \ldots, r$, $\left(\frac{n}{q_s}\right)$ — символ Лежандра вычета n по модулю q, и $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_r$ — постоянные, принимающие всего два значения $+1$ и -1.

При $q, N \to \infty$ требуется найти асимптотику $T = T(N, q)$ — числа решений системы уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{p+k_1}{q_1}\right) = \vartheta_1, \\ \ldots \quad \ldots \\ \left(\frac{p+k_r}{q_r}\right) = \vartheta_r. \end{cases}$$

Нами доказано (теорема 2), что при $N \gg q^{1+\varepsilon}$ величина T асимптотически равна $\pi(N)/2^r$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная. Заметим, что асимптотика имеет место при $r = o(\ln N)$.

В основе нашего исследования лежит метод двойных сумм И. М. Виноградова (леммы 1 – 3) и его метод комбинаторного решета (леммы 4 – 6).

Теорема 1. *Пусть p пробегает последовательные значения простых чисел, $q_1, \ldots, q_r$ — различные нечётные простые числа, $q = q_1 \ldots q_r, (k_s, q_s) = 1, 1 \leq k_s \leq q_s, k_s \not\equiv k_t \pmod{q_t}, s \neq t, s, t = 1, \ldots, r$, и*

$$T = \sum_{p \leq N} \left(\frac{p+k_1}{q_1}\right) \ldots \left(\frac{p+k_r}{q_r}\right).$$

Тогда имеем

$$T \ll 2^{r/2}N^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}+N^{-1/6}\right),$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит только от ε.

Теорема 2. *Пусть p пробегает последовательные значения простых чисел, $q_1,\dots,q_r$ — различные нечётные простые числа, $q = q_1\dots q_r, (k_s,q_s) = 1, 1 \le k_s \le q_s, k_s \not\equiv k_t \pmod{q_s}, s \ne t, s,t = 1,\dots,r$, и $S(N)$ — число решений в простых числах $p \le N$ следующей системы уравнений*

$$\left(\frac{p+k_s}{q_s}\right) = \vartheta_s, s = 1,\dots,r,$$

где ϑ_s может принимать лишь два значения $+1$ или -1.

Тогда имеем

$$S(N) = 2^{-r}\pi(N) + R(N), \quad R(N) \ll 2^{r/2}N^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}+N^{-1/6}\right),$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит только от ε.

Доказательство. Имеем

$$S(N) = \sum_{p\le N} 2^{-r}\prod_{s=1}^{r}\vartheta_s\left(\left(\frac{p+k_s}{q_s}\right)+\vartheta_s\right).$$

Раскрывая скобки и используя результат теоремы 1, находим искомое утверждение теоремы 2. □

1. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть q_0 — нечётное простое число и*

$$S_{q_0}(y_1,y_2) = \sum_{x=0}^{q_0-1}\left(\frac{(xy_1+k)(xy_2+k)}{q_0}\right).$$

Тогда

$$S_q(y_1,y_2) = \begin{cases} q_0, & \text{если} \quad y_1 \equiv y_2 \equiv 0 \pmod{q_0},\\ 0, & \text{если} \quad y_1y_2 \equiv 0 \pmod{q_0}, y_1+y_2 \not\equiv 0 \pmod{q_0},\\ q_0-1, & \text{если} \quad y_1 \equiv y_2 \not\equiv 0 \pmod{q_0},\\ -\left(\frac{y_1y_2}{q_0}\right) & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Доказательство. (см.[2], вопросы к гл. V, 8 a,c). □

Лемма 2. *Пусть $q_1,\dots,q_r$ — различные нечётные простые числа, $q = q_1\dots q_r$, $(k_s,q_s) = 1$, $1 \le k_s \le q_s$, $k_s \not\equiv k_t \pmod{q_s}, s \ne t, s,t = 1,\dots,r, \xi(x) \ge 0, \eta \ge 0$, и*

$$S = \sum_{x=0}^{q-1}\sum_{y=0}^{q-1}\xi(x)\eta(y)\left(\frac{xy+k_1}{q_1}\right)\dots\left(\frac{xy+k_r}{q_r}\right),$$

$$\sum_{x=0}^{q-1}(\xi(x))^2 \le X_0, \sum_{y=0}^{q-1}(\eta(y))^2 \le Y_0$$

Тогда имеем

$$|S| \le \sqrt{2^r X_0 Y_0 q}.$$

Доказательство. Используя неравенство Коши, имеем

$$|S|^2 \le X_0 \sum_{y_1,y_2=0}^{q-1} \eta(y_1)\eta(y_2)S_q(y_1,y_2) = X_0\Sigma,$$

$$S_q(y_1,y_2) = \sum_{x=0}^{q-1}\prod_{s=1}^{r}\left(\frac{(xy_1+k_s)(xy_2+k_s)}{q_s}\right).$$

Далее воспользовавшись китайской теоремой об остатках ([1],гл. IV, §3, с. 57-58), найдём

$$S_q(y_1,y_2) = \prod_{s=1}^{r} S_{q_s}(Q_sQ'_sy_{1,s}, Q_sQ'_sy_{2,s}),$$

$$q = Q_sq_s, Q_sQ'_s \equiv 1 \pmod{q_s}, y_t = \sum_{s=1}^{r} Q_sQ'_sy_{t,s}, t = 1,2,$$

где $y_{t,s}$ принимают значения из полной системы вычетов по модулю q_s.

Из леммы 1 следует, что часть суммы Σ, отвечающая $y_1 \equiv y_2 \pmod q$, не превосходит Y_0q. Пусть теперь $y_{1,l_t} \equiv y_{2,l_t} \pmod{q_{l_t}}, t = 1,\dots,s \le r$, а для остальных номеров l_t сравнения не имеют места. Это множество наборов (y_1,y_2) обозначим $K = K(l_1,\dots,l_s)$. Тогда часть суммы Σ, отвечающую таким наборам $(y_1,y_2)\in K$, обозначим $\Sigma(l_1,\dots,l_s)$. Далее получим

$$\Sigma = \sum_{s=0}^{r}\sum_{l_1,\dots,l_s}\Sigma(l_1,\dots,l_s).$$

По лемме 1 имеем

$$|\Sigma(l_1,\dots,l_s)| \le \sum_{(y_1,y_2)\in K(l_1,\dots,l_s)} |\prod_{s=1}^{r} S_{q_s}(Q_sQ'_sy_{1,s}, Q_sQ'_sy_{2,s})| \le$$

$$\le q\sum_{y_1=0}^{Q-1}\eta(y_1)\frac{1}{q_{l_{s+1}}\cdots q_{l_r}}\sum_{y_{2,l_{s+1}}=0}^{q_{l_{s+1}}}\cdots\sum_{y_{2,l_r}=0}^{q_{l_r}}\eta(y_2) = q\Sigma_s,$$

где набор $(l_1,\dots,l_s,l_{s+1},\dots,l_r)$ является перестановкой набора чисел $(1,\dots,r)$.

Из неравенства Коши находим

$$\Sigma_s^2 \le Y_0\sum_{y_{l_1}=0}^{q_{l_1}-1}\cdots\sum_{y_{l_s}=0}^{q_{l_s}-1}\left(\frac{1}{q_{l_{s+1}}\cdots q_{l_r}}\sum_{y_{2,l_{s+1}}=0}^{q_{l_{s+1}}}\cdots\sum_{y_{2,l_r}=0}^{q_{l_r}}\eta(y_2)\right)^2 = Y_0\Sigma_{s,0},$$

где $y_2 = \sum_{s=1}^{r} Q_sQ'_sy_{2,s}, 0 \le y_{2,s} < q_s$.

Вновь воспользуемся неравенством Коши. Получим

$$\Sigma_{s,0} \le Y_0.$$

Поскольку количество всевозможных наборов $(l_1,\dots,l_s), 1 \le l_1,\dots,l_s \le r$, равно $\binom{r}{s}$, имеем искомое неравенство.

Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Пусть $q_1,\ldots,q_r$ — различные нечётные простые числа, $q = q_1\ldots q_r$, $(k_s,q_s)=1$, $1\le k_s\le q_s$, $k_s\not\equiv k_t \pmod{q_s}, s\ne t, s,t=1,\ldots,r, \xi(x)\ge 0, \eta(y)\ge 0$, и*

$$S=\sum_{x=M+1}^{M+X}\sum_{y=N+1}^{N+Y}\xi(x)\eta(y)\left(\frac{xy+k_1}{q_1}\right)\ldots\left(\frac{xy+k_r}{q_r}\right),$$

$$\xi(x)\le\alpha, \eta(y)\le\beta.$$

Тогда имеем

$$|S|\le 5\alpha\beta 2^{r/2}XYF,\quad F=\sqrt{\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{q}+\frac{q}{XY}}.$$

Доказательство. Воспользуемся результатом леммы 2. Имеем

$$X_0\le\begin{cases}\alpha^2X, & \text{если } X\le q,\\ 4\alpha^2X^2q^{-1}, & \text{если } X>q,\end{cases}\qquad Y_0\le\begin{cases}\alpha^2Y, & \text{если } Y\le q,\\ 4\alpha^2Y^2q^{-1}, & \text{если } Y>q.\end{cases}$$

Поэтому

$$|S|\le 2^{r/2}\alpha\beta((XYq)^{1/2}+4XYq^{-1/2}+2XY^{1/2}+2X^{1/2}Y)\le 5\cdot 2^{r/2}\alpha\beta XYF.$$

Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Пусть $\varepsilon_0<0,001, N^{0,2}\le H\le N^{0,5}, F$ — произведение простых с условием $p\le H$. Тогда, полагая*

$$D=r^{\frac{\ln r-1}{\ln(1+\varepsilon_0)}}; r=\ln N,$$

делители d числа F, не превосходящие N, можно распределить среди $<D$ совокупностей со следующими свойствами:

а). Числа d, принадлежащие одной и той же совокупности, обладают одним и тем же числом β простых сомножителей, а следовательно, одним и тем же значением $\mu(d)=(-1)^\beta$.

б). Одна из совокупностей, которую мы будем называть простейшей, состоит из единственного числа $d=1$. Для этой совокупности полагаем $\varphi=1$ и, следовательно, имеем $\varphi=d=1$. Каждой из оставшихся совокупностей отвечает своё φ такое, что все числа этой совокупности удовлетворяют условию

$$\varphi<d\le\varphi^{1+\varepsilon_0}.$$

в). При этом при любом U с условием $0\le U<\varphi$ существуют две такие совокупности чисел d : числа d' и числа d'' (совокупность чисел d'' может оказаться и простейшей) с соответствующими φ' и φ'', удовлетворяющими условиям $\varphi'\varphi''=\varphi, U\le\varphi'<UH$, что при некотором натуральном B все числа d выбранной совокупности, каждое B раз получим, если из всех произведений $d'd''$ выберем лишь удовлетворяющие условию $(d',d'')=1$.

Доказательство. (см.[1], лемма 4, с.71). □

Лемма 5. *Пусть при $x\le N$ функция $\Phi(x)$ подчинена условию $|\Phi(x)|\le\Phi_0$. Пусть p пробегает простые числа, Q обозначает произведение простых чисел с условием $N^{0,2}<p\le N$, наконец,*

$$S=\sum_{p\le N}\Phi(p),\quad W_s=\sum_{\substack{y_1|Q\\ y_1\ldots y_s\le N}}\cdots\sum_{y_s|Q}\Phi(y_1\ldots y_s).$$

Тогда при некоторых постоянных $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ будем иметь

$$S=\lambda_1W_1+\lambda_2W_2+\lambda_3W_3+\lambda_4W_4+O(N^{0,8}\Phi_0).$$

Доказательство. (см.[1], лемма 5, с.73). □

Лемма 6. *Пусть при $x \le N$ функция $\Phi(x)$ подчинена условию $|\Phi(x)| \le \Phi_0$. Пусть p пробегает простые числа, Q обозначает произведение простых чисел с условием $N^{0,2} < p \le N$, наконец, при натуральном $s \le 4$, имеем*

$$W_s = \sum_{\substack{y_1|Q \\ y_1\ldots y_s \le N}} \cdots \sum_{y_s|Q} \Phi(y_1 \ldots y_s).$$

Тогда

$$W_s \ll \sum |T| + N^{0,8+\varepsilon}\Phi_0,$$

где суммирование распространяется на $\ll N^\varepsilon$ слагаемых двух видов.

Слагаемое $|T|$ первого вида удовлетворяет неравенству

$$|T| \le \sum_{\delta} |T_\delta|,$$

где δ пробегает возрастающую последовательность натуральных чисел. Иногда последовательность сводится к единственному числу $\delta = 1$ и тогда слагаемое называется простейшим,

$$T_\delta = \sum_{\substack{X \le \delta x < X^{1+\varepsilon_0} \\ \delta^2 xy \le N}} \sum_{Y \le \delta y < Y^{1+\varepsilon_0}} \Phi(\delta^2 xy);$$

$$N^{0,4} \le X \ll N^{0,6}, \quad N^{0,6} \le XY \le N, X \ge Y.$$

При этом x и y пробегают неубывающие последовательности натуральных чисел с условием, что $x = x_0$ при заданном x_0 имеет $\ll N^\varepsilon$ решений, а $y = y_0$ при заданном y_0 имеет $\ll N^\varepsilon$ решений.

Слагаемое $|T|$ второго вида представляется равенством

$$T = \sum_{\substack{X \le x < X^{1+\varepsilon_0} \\ xm \le N}} \sum_{M \le m < M'} \Phi(xm), \quad X < N^{0,8}, M > N^{0,2}.$$

При этом x пробегает неубывающую последовательность натуральных чисел с условием, что $x = x_0$ при заданном x_0 имеет $\ll N^\varepsilon$ решений, а m пробегает последовательные натуральные числа.

Кроме описанного "основного"подразделения слагаемых $|T|$ на два вида, иногда будем применять "особое"подразделение на два вида, причём первый особый вид отличается от первого основного вида лишь условием

$$N^{1/3} < X \ll N^{2/3} \quad (\textit{вместо} \quad N^{0,4} < X \ll N^{0,6}).$$

А второй особый вид отличается от второго основного вида лишь условием

$$X < N^{1/3}, M > N^{2/3} \quad (\textit{вместо} \quad X < N^{0,8}, M > N^{0,2}).$$

Доказательство. см.[1], лемма 6, с.74-78. □

2. Доказательство теоремы 1.

Положим
$$\Phi(p)=\left(\frac{p+k_1}{q_1}\right)\dots\left(\frac{p+k_r}{q_r}\right), S=\sum_{p\le N}\Phi(p).$$
По лемме 4 при некоторых постоянных $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$, получим
$$S=\lambda_1W_1+\lambda_2W_2+\lambda_3W_3+\lambda_4W_4,$$
где при $Q=\prod\limits_{N^{0,2}<p\le N}p$ и при $s=1,2,3,4$, имеем
$$W_s=\sum_{\substack{y_1|Q\\ y_1\dots y_s\le N}}\dots\sum_{y_s|Q}\Phi(y_1\dots y_s).$$

Далее, по лемме 5, рассматривая особое подразделение сумм на два вида, находим
$$W_s\ll\sum|T|+N^{0,8}\Phi_0,$$
причём для слагаемого $|T|$ первого вида имеем
$$|T|\le\sum_\delta|T_\delta|,\quad T_\delta=\sum_{\substack{X\le\delta x\ll X^{1+\varepsilon_0}\\ \delta^2xy\le N}}\sum_{Y\le\delta y\ll Y^{1+\varepsilon_0}}\Phi(\delta^2xy);$$
$$N^{1/3}<X\ll N^{2/3}, N^{0,8}\le XY\le N, X\ge Y;$$
а слагаемое $|T|$ второго вида имеет форму
$$T=\sum_{\substack{X\le x<X^{1+\varepsilon_0}\\ xm\le N}}\sum_{M\le m<M'}\Phi(xm),\quad X<N^{1/3}, M>N^{2/3}.$$

Лемма 7. *Пусть $q_1,\dots,q_r$ — различные нечётные простые числа, $q=q_1\dots q_r$, $(k_s,q_s)=1$, $1\le k_s\le q_s, k_s\not\equiv k_t \pmod{q_s}, s\ne t, s,t=1,\dots,r$; u — натуральное число, δ пробегает некоторую последовательность натуральных чисел, и T_δ — сумма вида*
$$T_\delta=\sum_{\substack{X\le\delta x\ll Xg\\ \delta^2xy\le N}}\sum_{Y\le\delta y\ll Yh}\Phi(\delta^2xy); g\ll X^{\varepsilon_0}, h\ll Y^{\varepsilon_0},$$
где X и Y — числа с условиями $N^{1/3}<X<N^{2/3}, XY>N^{2/3}$, причём при заданном x_0 уравнение $x=x_0$ имеет $\ll N^{\varepsilon_0}$ решений, а при заданном y_0 уравнение $y=y_0$ имеет $\ll Y^{\varepsilon_0}$ решений.

Для любого фиксированного целого δ представим q в виде $q=q'q''$, где $q'\mid\delta, (q'',\delta)=1$. Тогда имеем $q''>q^{2/3}$ и
$$T_\delta\ll 2^{r/2}N^{1+\varepsilon_1}\delta^{-1}\Delta, \Delta=\sqrt{\frac{1}{X}+\frac{X}{N}+\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}+N^{-1/6}.$$

Доказательство. Ограничимся значениями $Y > N^{1/6}$, так как в противном случае ($Y \le N^{1/6}$) тривиальная оценка

$$T \ll XY \le N^{5/6} \ll N\Delta$$

является достаточной для утверждения леммы.

Далее можно считать, что $\delta < \Delta^{-1}$, поскольку при $\delta \ge \Delta^{-1}$ тривиальная оценка

$$|T_\delta| \ll N^{1+\varepsilon'}\delta^{-2}\ln N \ll N^{1+\varepsilon'}\delta^{-1}\Delta$$

даёт искомую в утверждении леммы оценку.

Отсюда, поскольку

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{X} + \frac{q''}{N} + \frac{1}{q''} + \frac{q''}{N}} + N^{-1/6} > \sqrt{\frac{1}{q''}},$$

выполняется неравенство

$$\delta < \Delta^{-1} < \sqrt{q''}.$$

Следовательно, $q' = (\delta, q) < \sqrt{q''}$ и $q'' > q^{2/3}$.

Положим $X_1 = X\delta^{-1}, Y_1 = Y\delta^{-1}, N_1 = N\delta^{-2}$. Находим

$$|T_\delta| = \left| \sum_{\substack{X_1 \le x \ll X_1 g \\ xy \le N_1}} \sum_{Y_1 \le y \ll Y_1 h} \Phi_1(xy) \right|,$$

где

$$\Phi_1(u) = \prod_{q_s | q''} \left(\frac{u + k_s'}{q_s} \right), \delta^2 k_s' \equiv k_s \pmod{q_s},$$

и q_s пробегает все простые делители числа q''.

Далее разбиваем промежуток $X_1 \le x \le X_1 g$ на промежутки вида $X_1' \le x < X_1''$, $2X_1' \le X_1'' < 4X_1'$, в количестве, не превосходящем $\ln N$. Имеем

$$T_\delta \ll |T_\delta'| \ln N, T_\delta' = \sum_{\substack{X_1' \le x \ll X_1'' \\ xy \le N_1}} \sum_{Y_1 \le y \ll Y_1 h} \Phi_1(xy).$$

Затем область суммирования в сумме T_δ' разбиваем на две: область Ω_1, определяемую неравенствами

$$X_1' \le x < X_1'', \quad 0 < y \le N_1/X_1'',$$

и область Ω_2, определяемую неравенствами

$$X_1' \le x < X_1'', \quad N_1/X_1'' < y \le N_1/x.$$

В соответствии с разбиением области Ω на области Ω_1 и Ω_2 положим

$$T_\delta' = T_{\delta,1} + T_{\delta,2},$$

где

$$T_{\delta,1} = \sum_{(x,y)\in\Omega_1} \Phi_1(xy), T_{\delta,2} = \sum_{(x,y)\in\Omega_2} \Phi_1(xy).$$

По лемме 3 имеем

$$T_{\delta,1} \ll 2^{r/2} N^{1+\varepsilon_1} \sqrt{\frac{1}{X_1'} + \frac{X_1'}{N_1} + \frac{1}{q''} + \frac{q''}{N_1}}.$$

Область Ω_2 разобьем на прямоугольные области $\Omega_{2,t,s}, 1 \leq t \leq 2^{s-1}$, с основанием

$$X_{t,s}' = X_1' + \frac{(t-1)(X_1''-X_1')}{2^{s-1}} \leq x < X_1' + \frac{(2t-1)(X_1''-X_1')}{2^s} = X_{t,s}'',$$

и высотой

$$Y_{t,s}' = \frac{N_1}{X_1' + 2t\Delta_s} < Y_{t,s}'' = y \leq \frac{N_1}{X_1' + (2t-1)\Delta_s}, \Delta_s = \frac{X_1''-X_1'}{2^s},$$

и область Ω_2', площадь которой не превосходит

$$\frac{X_1'}{2^s}\frac{N_1}{X_1'} = \frac{N_1}{2^s}.$$

Положим $s_0 = [-\log_2 \Delta] + 1$. Тогда

$$T_{\delta,2} = \sum_{s=1}^{s_0} \sum_{t=1}^{2^s-1} T_{\delta,2,t,s} + T_{\delta,2}', T_{\delta,2,t,s} = \sum_{(x,y)\in\Omega_{2,t,s}} \Phi_1(x,y), T_{\delta,2}' = \sum_{(x,y)\in\Omega_2'} \Phi_1(x,y).$$

Следовательно, при $s = s_0$ из тривиальной оценки имеем

$$T_{\delta,2}' = \sum_{(x,y)\in\Omega_2'} \Phi_1(x,y) \leq \frac{N_1}{2^{s_0}} \leq N_1\Delta$$

Далее при $1 \leq t \leq 2^s, s \leq s_0$, по лемме 3 находим

$$T_{\delta,2,t,s} \ll 2^{r/2} 2^{-2s} N_1^{1+\varepsilon_2} \sqrt{\frac{2^s}{X_1'} + \frac{X_1'}{2^s N_1} + \frac{1}{q''} + \frac{q''}{N_1 2^{2s}}} \ll$$

$$\ll \frac{N_1^{1+\varepsilon}}{2^s} \cdot 2^{r/2} \sqrt{\frac{1}{X_1''} + \frac{X_1''}{N_1} + \frac{1}{q''} + \frac{q''}{N_1}}.$$

Отсюда имеем

$$T_{2,\delta} \ll \frac{N^{1+\varepsilon}}{\delta} 2^{r/2} \sqrt{\frac{1}{X} + \frac{X}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N}}.$$

Лемма 7 доказана. $\square$

Лемма 8. *Пусть $q_1, \ldots, q_r$ — различные нечётные простые числа, $q = q_1 \ldots q_r$, $(k_s, q_s) = 1$, $1 \leq k_s \leq q_s, k_s \not\equiv k_t \pmod{q_s}, s \neq t, s, t = 1, \ldots, r, \Phi(u) = \left(\frac{u+k_1}{q_1}\right) \ldots \left(\frac{u+k_r}{q_r}\right)$, и*

$$T = \sum_{\substack{X<x\leq Xg \\ xm\leq N}} \sum_{M\leq m<M'} \Phi(xm), g \ll N^{\varepsilon_0}, M > N^{2/3}, M < M' \leq 2M,$$

где $1 \leq X < N^{1/3}, x$ пробегает неубывающую последовательность целых чисел с условием, что при заданном x_0 уравнение $x = x_0$ имеет $\ll N^{\varepsilon_0}$ решений, а переменная m пробегает последовательные натуральные числа.

Тогда имеем

$$T \ll 2^{r/2} N^{1+\varepsilon_1} \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}}.$$

Доказательство. При $xm \le N$ оценим сверху модуль внутренней суммы T_x. Имеем

$$T_x = \sum_{M \le m < M'} \Phi(xm), M > N^{2/3}, M < M' \le 2M.$$

Пусть $(x,q) = q', q'' = q/q'$. Тогда, поскольку при $q' < q$ полная сумма

$$\sum_{m=M_0+1}^{m=M_0+q} \Phi(mx) = 0,$$

находим

$$T_x \ll \sqrt{q''} \ln q''.$$

Следовательно,

$$T = \sum_{X < x \le Xg} T_x = \sum_{\substack{q'|q \\ q'<q}} \sum_{\substack{X<x\le Xg \\ (x,q)=q'}} T_x + N^{\varepsilon_0} M \left(\frac{X}{q} + 1\right) \ll$$

$$\ll N^{\varepsilon_0} \left(\sum_{\substack{q'|q \\ q'<q}} X\sqrt{q''} \ln q'' + M\left(\frac{X}{q}+1\right)\right) \ll$$

$$\ll N^{\varepsilon_0} \left(\frac{N}{M} \sqrt{q} \ln q \prod_{s=1}^{r} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{q_s}}\right) + \frac{N}{q}\right) \ll$$

$$\ll N^{\varepsilon_0} \left(\frac{N}{M} 2^{2\sqrt{r}} \sqrt{q} \ln q + \frac{N}{q}\right) \ll N^{1+\varepsilon_1} 2^{r/2} \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}}.$$

Лемма доказана. □

Далее теорема 1 прямо следует из лемм 4 – 7.

Заключение

Теорема 2 является следствием теоремы 1 и показывает "асимптотическую независимость" символов Лежандра по различным простым модулям на последовательности простых, сдвинутых на различные фиксированные вычеты, при условии, что промежуток осреднения больше, чем произведение модулей. В доказательстве мы следуем схеме рассуждений И. М. Виноградова для оценки сумм неглавного характера Дирихле по сдвинутым простым [1], с. 88–93. В дальнейшем мы предполагаем доказать это утверждение при условии, что промежуток осреднения будет больше квадратного корня из этого произведения. Путь этого улучшения указан И. М. Виноградовым [2]–[5] и А. А. Карацубой [6, 7]. Отметим также, что количество модулей может расти вместе с ростом промежутка осреднения. В настоящей работе использовались идеи и методы работ [1]–[14].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1976, 119 с.

2. Виноградов И. М. Распределение квадратичных вычетов и невычетов вида $p + k$ по простому модулю// Матем.сб., 1938, **3(45)**, 311–320.

3. Виноградов И. М. Уточнение метода оценок с простыми числами// Изв. АН СССР. Серия матем., 1943, **7**, 17–34.

4. Виноградов И. М. Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p+k)$// Изв. АН СССР. Серия матем., 1952, **16**, 197–210.

5. Виноградов И. М. Улучшение оценки для суммы значений $\chi(p+k)$// Изв. АН СССР. Серия матем., 1953, **17**, 285–290.

6. Карацуба А. А. Суммы характеров с простыми числами// Изв. АН СССР. Серия матем., 1970, **34**, 299–321.

7. Карацуба А. А. Суммы характеров с простыми числами, принадлежащими арифметической прогрессии// Изв. АН СССР. Серия матем., 1971, **35**, 469–484.

8. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Наука, 1980.

9. Виноградов И. М. Основы теории чисел. Изд. 10-е. — СПб.: Изд-во "Лань 2004, 176 с.

10. Hua L.-K. Selected Papers. — New York Inc.: Springer Verlag, 1983, pp. 888.

11. Хуа Л.-Г. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. — М.: Мир, 1964, с. 188.

12. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1987.

13. Архипов Г. И. Избранные труды. — Орёл: Изд-во Орловского государственного университета, 2013. 464 с.

14. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. — Berlin–New York: Walter de Gruyter (de Gruyter Expositions in Mathematics 39). 2004.

REFERENCES

1. Vinogradov I. M. Special Variants of the Method of Trigonometric Sums. Moscow: Nauka, 1976, pp. 119.

2. Vinogradov I. M. Distribution of quadratic residues and non-residues of the type $p+k$ with the respect to prime modulus// Matem.sb., 1938, **3(45)**, 311–320 (abstract in English).

3. Vinogradov I. M. An improvement of the method of estimating sums of primes// Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Matem., 1943, **7**, 17–34 (abstract in English).

4. Vinogradov I. M. A new approach to estimating the values of $\chi(p+k)$// Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Matem., 1952, **16**, 17–34 (abstract in English).

5. Vinogradov I. M. An improved estimate of the sums of $\chi(p+k)$// Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Matem., 1953, **17**, 17–34 (abstract in English).

6. Karatsuba A. A. Character sums over primes// Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Matem., 1970, **34**, 299–321. (abstract in English).

7. Karatsuba A. A. Character sums over primes belonging to the arithmetic progression// Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Matem., 1971, **35**, 469–484 (abstract in English).

8. Vinogradov I. M. The method of trigonometric sums in number theory. 2-nd edition, revised and enlarged, Moscow, Nauka, 1980, pp. 144.

9. Vinogradov I. M. Elements of Number Theory. 10-th Edition. Sankt-Petersburg.: Publ. house "Lan' 2004, pp. 176.

10. Hua L.-K. Selected Papers. New York Inc.: Springer Verlag, 1983, pp. 888.

11. Hua L.-K. The method of trigonometric sums in number theory. Moscow: Mir, 1964, pp. 188.

12. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. The theory of multiple trigonometric sums. Moscow: Nauka. 1987, pp. 368.

13. Arkhipov G. I. Selected Papers. Orjol: Izd-vo Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta. 2013, pp. 464.

14. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. — Berlin–New York: Walter de Gruyter (de Gruyter Expositions in Mathematics 39). 2004.

Получено 19.05.2019 г.
Принято в печать 12.07.2019 г.