ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 539.374

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-325-335

**Анализ пространственных полей напряжений и скоростей
в процессах пластического течения**

Н. Д. Тутышкин, В. Ю. Травин

Тутышкин Николай Дмитриевич — доктор технических наук, профессор, кафедра строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: nikolai.tutyshkin@mail.ru

Травин Вадим Юрьевич — кандидат технических наук, старший научный сотрудник, АО НПО "Сплав" имени А. Н. Ганичева (г. Тула).

*e-mail: travin.vu@mail.ru***Аннотация**

Приводится метод анализа пространственных полей напряжений и скоростей в процессах пластического течения, основанный на отображении зон текучести в девиаторном пространстве напряжений. В качестве поверхности нагружения принимается обобщенная функция текучести Мизеса, соответствующая многочисленным экспериментальным данным. Показано, что обобщенная модель Мизеса является удобной для анализа процессов пространственной деформации с помощью специального изображающего параметрического пространства. Численная реализация метода иллюстрируется на примере пластического сжатия материала в условиях трехмерной деформации. Показано, что распределение напряжений и скоростей течения зависит от текущего соотношения размеров слоя при осаживании.

Ключевые слова: пластичность, пластическое течение, напряжение, скорость течения, деформация, основные уравнения, определяющие соотношения, моделирование, пластическое сжатие.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:

Н. Д. Тутышкин, В. Ю. Травин. Анализ пространственных полей напряжений и скоростей в процессах пластического течения // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 325–335.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 539.374

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-325-335

**Analysis of spatial stress and velocity fields
in plastic flow processes**

N. D. Tutyshkin, V. Yu. Travin

Tutyshkin Nikolai Dmitrievich — Doctor of technical sciences, Professor, Department of Construction, Building Materials and Structures, Tula State University (Tula).

e-mail: nikolai.tutyshkin@mail.ru

Travin Vadim Yurievich — Candidate of technical sciences, Senior Researcher, Joint Stock Company "Scientific and Production Association "SPLAV" named after A. N. Ganichev" (Tula).

e-mail: travin.vu@mail.ru

Abstract

The method of analysis of spatial fields of stresses and velocities in processes of plastic flow is given, based on mapping of flow zones in deviator space of stresses. A generalized Mises flow function corresponding to numerous experimental data is taken as the loading surface. It is shown that the generalized Mises model is convenient for analysis of spatial deformation processes with the power of a special depicting parametric space. The numerical implementation of the method is illustrated by the example of plastic compression of a material under three-dimensional deformation conditions. It is shown that the distribution of stresses and flow rates depends on the current ratio of layer sizes during settling.

Keywords: plasticity, plastic flow, stress, flow rate, deformation, basic equations defining ratios, modeling, plastic compression.

Bibliography: 10 titles.

For citation:

N. D. Tutyshkin, V. Yu. Travin, 2019, "Analysis of spatial stress and velocity fields in plastic flow processes", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 325–335.

1. Введение

Многие сложные вопросы анализа, проектирования и разработки технологических процессов пластического формообразования изделий связаны с их математическим моделированием и остаются недостаточно изученными. Особенно трудными для анализа и математического моделирования являются процессы пластического формоизменения, в которых обрабатываемый материал находится в условиях трехмерной деформации и испытывает сложное нагружение с сильным изменением напряженного состояния (фазы напряжений) [1, 2]. Анализ технологических возможностей и прогнозирование свойств готовых изделий в нестационарных процессах пластического формоизменения в условиях пространственной деформации с применением вычислительной техники требует использования надежных, с точки зрения быстрой сходимости и высокой точности, методов расчета пространственных полей напряжений и деформаций. Многие вопросы проектирования технологии: обоснованного выбора типа и числа формоизменяющих и сопутствующих операций, режима обработки, обеспечения надежной прочности рабочего инструмента, — связаны с распределением напряжений, скоростей течения и деформаций в обрабатываемых изделиях.

2. Основные уравнения и определяющие соотношения

Пластическое формоизменение материалов в интенсивных и скоростных технологических процессах описывается в ортогональной системе координат x^i ($i = 1, 2, 3$) следующими уравнениями

$$\Delta_j \sigma^{ij} = \rho(a^i - F^i), \quad (1)$$

$$\Delta_i v^i = 0, \quad (2)$$

$$f(s^{ij}, e_{ij}, \chi_s) = 0, \quad (3)$$

$$\dot{e}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial s^{ij}}, \quad (4)$$

где σ^{ij} — контравариантные компоненты тензора напряжений; ν^i , a^i , F^i — компоненты векторов скорости, ускорения и плотности внешних сил; e_{ij} — ковариантные компоненты тензора деформации; ρ — плотность материала; χ_s — параметры, связанные с деформациями неголомными соотношениями; Δ_j — символ, означающий ковариантное дифференцирование; $\dot{\lambda}$ — скалярная величина, пропорциональная мощности пластической деформации; s^{ij} — девиаторные компоненты напряжений; $\dot{e}_{ij}$ — компоненты тензора скорости деформации.

В системе уравнений (1)–(4)

$$\Delta_j \sigma^{ij} = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + \sigma^{kj} \Gamma_{kj}^i + \sigma^{ik} \Gamma_{kj}^j, \quad (5)$$

$$\Delta_i \nu^i = \frac{\partial \nu^i}{\partial x^i} + \nu^k \Gamma_{ik}^i, \quad (6)$$

$$a^i = \frac{\partial \nu^i}{\partial t} + \nu^j \left(\frac{\partial \nu^i}{\partial x^j} + \nu^k \Gamma_{kj}^i \right), \quad (7)$$

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \nu_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \nu_j}{\partial x^i} - 2\nu_k \Gamma_{ij}^k \right), \quad (8)$$

где t — время; Γ_{kj}^i — символы Кристоффеля.

Условия градиентности скоростей деформации (4) сводятся к уравнениям соосности

$$\frac{\dot{e}_{ij}}{e_{ij}} = \frac{\dot{e}_{ii} - \dot{e}_{jj}}{e_{ii} - e_{jj}} \quad (i, j = 1, 2, 3, i \neq j) \quad (9)$$

и условию подобия

$$\omega_{\dot{e}} = \omega_{\sigma} \quad (10)$$

девиаторов скорости деформации $D_{\dot{e}}$ и напряжения D_{σ} ($\omega_{\dot{e}}$, ω_{σ} — фазовые углы девиаторов).

В качестве поверхности нагружения $f = 0$ принимается обобщенная функция текучести Мизеса [3]

$$f(s^{ij}, e_{ij}, \chi_s) = \frac{1}{2} \left(s^{i\cdot} s^{j\cdot}_{\cdot i} - s^{i\cdot} s^{j\cdot}_{\cdot j} \right) - \tau_s^2(e_{ij}, \chi_s), \quad (11)$$

где τ_s — предел текучести материала при сдвиге; $s^{i\cdot} s^{j\cdot}_{\cdot i}$ — смешанные компоненты девиатора напряжений.

Как показали многочисленные эксперименты [4, 5], обобщенная функция текучести (3) вполне удовлетворительно описывает поведение металлических конструкционных материалов при больших конечных деформациях, характерных для технологических процессов обработки давлением.

В качестве параметров χ_s , связанных с деформациями e_{ij} , принимается степень деформации сдвига (параметр Одквиста)

$$\Lambda = \int_s \sqrt{2 \left(ds^{i\cdot} ds^{j\cdot}_{\cdot i} - ds^{i\cdot} ds^{j\cdot}_{\cdot j} \right)}, \quad (12)$$

где $ds^{i\cdot} s^{j\cdot}_{\cdot i}$ — компоненты девиатора приращения деформации D_{de} и интенсивность скоростей деформации сдвига $H = \frac{d\Lambda}{dt}$. Значения параметра определяются интегрированием соотношения (12) по известному пути деформации s .

Сложность анализа процессов пластического формоизменения материалов с пространственными полями напряжений и деформаций связана с большим числом искомых параметров σ_{ij} , ν^i , независимых переменных x^i , t и локальной статической неопределенностью системы уравнений (1)–(4). Распространенными приемами преодоления этих трудностей является

уменьшение числа искомых компонент напряжений и скоростей и независимых переменных (условие плоской деформации, предположение о том, что некоторые компоненты напряжений или скоростей являются известными). Методы анализа, основанные на сильном упрощении основных уравнений, могут приводить к потере качественных свойств решений.

Компоненты напряжений σ^{ij} можно выразить с помощью условий градиентности скоростей деформации (4) через производные от компонент скорости ν^i по координатам x^i . Этот прием позволяет представить уравнения (1), (2) как систему четырех нелинейных дифференциальных уравнений относительно четырех искомых функций σ , ν^i . Решение подобных систем уравнений [6] сопряжено с огромными математическими трудностями, так как при всем многообразии оригинальных методов решения отдельных систем нелинейных уравнений [7, 8] нет универсального метода и общих теорем существования и единственности их решения. Для анализа и математического моделирования пространственных процессов пластического формоизменения с сильным изменением фазы напряжений предлагается метод, основанный на построении опорного решения в напряжениях и скоростях и направленного к точному решению итерационного процесса. Для построения опорного решения целесообразно временно придать системе уравнений (1)–(4) свойство локальной определенности в напряжениях, например, использованием дополнительных условий в напряжениях. Использование для построения опорного решения "жестких" дополнительных условий, фиксирующих фазу напряжений и скоростей деформации, может приводить при анализе процессов пластического формоизменения к большим затруднениям при обеспечении условия подобия (10) девиаторов скорости деформации и напряжения. Поэтому более эффективным является использование "гибких" дополнительных условий, не накладывающих ограничений на фазу напряжений и скоростей деформаций в опорном решении. Дополнительные условия должны быть универсальными, инвариантными относительно среднего напряжения и позволять использовать известные решения и экспериментальную информацию для анализа технологических задач. Подобные дополнительные условия можно составить для параметров, определяющих дифференциальную геометрию траекторий максимальных касательных напряжений в характерных сечениях пластической области.

В каждой точке сечения пластической области некоторой плоскостью с нормалью $\vec{n}^k$ существуют два взаимно ортогональных направления α_k , β_k , вдоль которых касательное напряжение в этой плоскости достигает экстремальной величины $\tau_{\alpha_k\beta_k}$, а нормальные напряжения $\sigma_{\alpha_k} = \sigma_{\beta_k}$ (рис. 1). Направления α_k , β_k образуют в заданной плоскости два семейства взаимно ортогональных линий. Если векторы $\vec{n}^k$ совпадают с векторами базиса декартовой системы координат x_k , то траектории α_k , β_k описываются в сечениях $x_k = \text{const}$ дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_j}{dx_i} = \text{tg } \delta_k(\text{линии } \alpha_k), \quad \frac{dx_j}{dx_i} = -\text{ctg } \delta_k(\text{линии } \beta_k) \quad (i, j, k = 1, 2, 3, \quad i \neq j \neq k), \quad (13)$$

где δ_k — угол, отсчитываемый от направления оси x_i до направления линии α_k .

Параметры δ_k связаны с компонентами напряжений правилом их преобразования при плоском повороте вокруг оси x_k на угол δ_k

$$\text{tg } 2\delta_k = -\frac{\sigma_{\cdot i}^{j\cdot} - \sigma_{\cdot j}^{i\cdot}}{2\sqrt{\sigma_{\cdot k}^{j\cdot}\sigma_{\cdot j}^{k\cdot}}} \quad (i \neq j, \text{ но } i \text{ и } j \text{ не суммировать}). \quad (14)$$

Два дополнительных условия к (14)

$$\frac{\sigma_{\cdot j}^{j\cdot} - \sigma_{\cdot k}^{k\cdot}}{2\sqrt{\sigma_{\cdot k}^{j\cdot}\sigma_{\cdot j}^{k\cdot}}} = -\text{tg } 2\delta_i, \quad \frac{\sigma_{\cdot k}^{k\cdot} - \sigma_{\cdot i}^{i\cdot}}{2\sqrt{\sigma_{\cdot i}^{k\cdot}\sigma_{\cdot k}^{i\cdot}}} = -\text{tg } 2\delta_j \quad (15)$$

Рис. 1. Траектория α_k, β_k в сечении пластической области с нормалью $\vec{n}^k$

Рис. 2. Отображение решения для компонент σ, ν^i в пространстве главных напряжений

в физических плоскостях пластической области с нормальными x_i и x_j определяют для каждой точки пластической области ребро на поверхности текучести $f = 0$ в пространстве напряжений σ^{ij} .

Уравнения (1), (3) и дополнительные условия (15) образуют локально определимую систему уравнений относительно шести искомых компонент σ^{ij} . Если рассматривается инерционное пластическое течение, то входящие в правые части уравнений движения (1) компоненты скорости ν^i могут быть определены в опорном решении из условия подобия полей скоростей квазистатического и инерционного решений. Условие (2) и два соотношения (из трех) (9) образуют замкнутую систему относительно трех искомых компонент ν^i . Решение этих подсистем уравнений позволяет отобразить для каждой узловой точки пластической области два ребра (M_1N_1 и M_2N_2) на поверхности текучести в пространстве главных напряжений (рис.2), одно из которых соответствует допустимым напряжениям, а другое — допустимым скоростям. Соответствующее точному решению ребро MN находится между ребрами M_1N_1 и M_2N_2 . Поэтому направленный к точному решению итерационный процесс можно интерпретировать как встречное вращение образующих M_1N_1 и M_2N_2 вокруг гидростатической оси $p = -\sigma$ до тех пор, пока третье соотношение соосности (9) в плоскостях $x_k = \text{const}$ и условие подобия (10) девиаторов D_e и D_σ не будут удовлетворяться с заданной точностью.

Обобщенная модель Мизеса (11) пластического материала является удобной для анализа процессов пространственной деформации с помощью специального изображающего пространства параметров ($i = 1, 2, 3$), связанных с компонентами напряжений соотношениями [9]

$$\begin{aligned}\sigma_{\cdot k}^k &= \frac{1}{3}I_1(T_\sigma) + \sqrt{\frac{2}{3}I_2(D_\sigma)}(m_i \sin 2\varphi_i - m_j \sin 2\varphi_j), \\ \sqrt{\sigma_{\cdot i}^i \sigma_{\cdot j}^j} &= \sqrt{I_2(D_\sigma)}m_k \cos 2\varphi_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3, i \neq j \neq k),\end{aligned}\tag{16}$$

где $I_1(T_\sigma)$ — линейный инвариант тензора напряжений.

Параметры φ_i связаны с углами δ_i зависимостью $\text{tg } 2\delta_i = \sqrt{3/2} \text{tg } 2\varphi_i$ и определяют ориентацию октаэдрической площадки. Параметры m_i определяют направление вектора касательного октаэдрического напряжения.

3. Пластическое сжатие материала в условиях трехмерной деформации (пример)

Рассмотрим процесс пластического сжатия материала в условиях трехмерной деформации (рис.3а) при следующих данных: исходные ширина, высота и длина слоя материала в форме параллелепипеда $a_{\text{заг}} = 2a_0 = 80$ мм, $h_{\text{заг}} = 2h_0 = 35,8$ мм, $l_{\text{заг}} = 2l_0 = 95$ мм; высота после деформации $2h_k = 28,6$ мм, материал — сталь 40X, температура рекомендуемого температурного интервала штамповки для стали 40X $T = 1450$ K (1180°C), скорость и время деформации $e_{\cdot i} = 10 \dots 20 \cdot 10^2 \text{ c}^{-1}$, $\tau = 0,2 \cdot 10^{-2} \text{ c}$, контактное касательное напряжение $\tau_K = \tau_s$.

Распределение напряжений и скоростей течения зависит от текущего соотношения размеров поковки при осаживании. Поэтому при анализе рассматриваем четыре этапа:

$$\Delta h_1 = \Delta h_2 = \Delta h_3 = \Delta h_4 = 1,8 \text{ мм}.$$

Поля напряжений и скоростей находим по отношению к середине этапов. Для удобства выбираем систему декартовых координат $x y z$, центр O которой совпадает с центром тяжести поковки (рис.3а). В силу симметрии достаточно найти решение для 1/8 части заготовки, ограниченной координатными плоскостями с положительными направлениями осей координат.

В связи с численным решением основных уравнений пластического течения делим объем заготовки плоскостями $\Delta x = \text{const}$ и $\Delta y = \text{const}$ с шагом между ними $\Delta x = a/8 =$ и $\Delta y = l/8$.

Рис. 3. Пластическое осаживание коротких элементов:
 а – пластическая область; б – поле напряжений
 в сечениях $x_0 = 0,75a_0$ и $y_0 = 0,875l_0$

Для повышения точности опорного решения и быстрой сходимости итерационного процесса необходимо выбирать сечения, в которых действуют наибольшие по модулю касательные напряжения. Для рассматриваемого процесса осаживания $\sigma_x, \sigma_y > \sigma_z$ и $|\tau_{zx}|, |\tau_{yz}| > |\tau_{xy}|$. Поэтому в сечениях $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ действуют значительно большие по модулю касательные напряжения, чем в сечениях $z = \text{const}$.

Опорное поле напряжений находится из квазистатического решения системы уравнений (1), (3) с учетом параметрической формы (16) и дополнительных условий (17) в форме

$$\begin{aligned} \sigma_y - \sigma_z + 2\tau_{yz} \operatorname{tg} 2\delta_x &= 0 \quad (\text{сечения к } x = \text{const}), \\ \sigma_z - \sigma_x + 2\tau_{zx} \operatorname{tg} 2\delta_y &= 0 \quad (\text{сечения к } y = \text{const}). \end{aligned} \quad (17)$$

Значения углов $\delta_x^{(0)}(y, z)$, $\delta_y^{(0)}(y, z)$ в нулевом приближении, входящие в дополнительные условия (17), выбираются из известных решений задач пластического сжатия в предположении плоской деформации в сечении $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ [10], т.е. траектории наибольших по модулю касательных напряжений (α_x, β_x и α_y, β_y) в нулевом приближении принимаются совпадающими с траекториями максимальных касательных напряжений при плоской деформации в этих сечениях пластической области (рис.3б, тонкие линии).

Поля траекторий α_x, β_x и α_y, β_y определяют направляющий девиатор напряжений во всех узловых точках. К контактной поверхности СЕНQ, в силу симметрии тензора напряжений, должна примыкать жесткая зона материала (рис.3а). Чтобы вычислить тензор напряжений, необходимо сначала установить среднее напряжение хотя бы в одной точке пластической области. Рассмотрим условие равновесия области ADKH, свободной от действия внешних сил (рис.3а). Так как образующими поверхности АКН являются прямые линии α_y , расположенные под углом $\delta_y = \frac{\pi}{4}$ к оси x , то уравнение равновесия области ADKH можно представить в виде

$$\int_{AK}^{AH} \int_A^{KH} (\sigma_{\delta_y} + \tau_{\beta_y} \alpha_y) ds_{\alpha_y} ds = 0, \quad (18)$$

где s — дуга линий на поверхности АКН, ортогональных к α_y . Среднее напряжение в произвольной точке на поверхности АКН можно выразить через среднее напряжение в другой точке, принадлежащей этой поверхности, например, точке К. Численным интегрированием уравнения (18) установлено, что среднее напряжение в точке К $\sigma_K = -0,886\tau_s$.

Рис. 4. Поле скоростей в характерных сечениях при осаживании коротких элементов, первый этап:
а — сечение $x/a = 0,75$; б — сечение $x/l = 0,875$

Решение двух уравнений (9) для $x_i = x, y$ и условия несжимаемости (2) позволяет найти вектор скорости $\vec{v}$ пластического течения. Эта задача эквивалентна определению компонент $\nu_{\alpha_x}^*, \nu_{\beta_x}^*, \nu_x$ и $\nu_{\alpha_y}^*, \nu_{\beta_y}^*, \nu_y$, в системах координат α_x^*, β_x^*, x и α_y^*, β_y^*, y . Поле скоростей (рис.4) удовлетворяет краевым условиям

$$\nu_x|_{x=0} = \nu_y|_{y=0} = \nu_z|_{z=0} = 0, \quad \nu_x|_{x=a} = \frac{al^2U}{(a^2 + l^2)h},$$

$$\nu_y|_{y=1} = \frac{a^2lU}{(a^2 + l^2)h}, \quad \nu_z|_{z=h} = -U,$$

где U — скорость сближения плит.

Степень соответствия между полями напряжений и скоростей опорного решения в узловых точках пластической области оценивалась с помощью параметров

$$\Delta\delta_z = \delta_z^e - \delta_z^\sigma \leq [\Delta\delta_z], \quad \Delta\omega = \omega_e - \omega_\sigma \leq [\omega_\sigma] \quad (19)$$

для направляющих девиаторов $\bar{D}_e$ и $\bar{D}_\sigma$. Направленный к точному решению итерационный процесс сводился к обеспечению неравенств (19) путем коррекции параметров m_x, m_y, m_z .

Удельная сила осадки (рис.5) находится из условия равновесия жесткой зоны, примыкающей к верхней плите

$$p = \frac{1}{al} \int_{OB}^{AH} \int_{OA}^{KH} (\sigma_{\delta_y} + \tau_{\beta_y \alpha_y}) ds_{\alpha_y} ds = 119 \text{ МПа},$$

где s — дуга линий, образованных от пересечения плоскостей $x = \text{const}$ с поверхностью ОАНВ. Удельная сила в предположении плоской деформации в сечениях $y = \text{const}$ при $a/h = 2,28$, $p = 129 \text{ МПа}$, т.е. больше на 8,7 %.

Рис. 5. Зависимость удельной силы штамповки тонкослойных элементов от соотношения их размеров в плане

4. Заключение

Рассмотрим результаты решения. Вид напряженного состояния изменяется от одноосного сжатия на оси симметрии до сжатия, граничащего со сдвигом, в пределах пластической области.

Использование условия плоской деформации приводит к погрешности в определении удельных и технологических усилий порядка 10 %. При определении локальных характеристик напряжений и деформаций эта погрешность заметно увеличивается до 20...25 %, так как "жестко" фиксируется состояние чистого сдвига во всей пластической области, что не соответствует трехмерному решению.

Таким образом можно заключить, что более эффективным является использование "гибких" дополнительных условий, не накладывающих ограничений на фазу напряжений и скоростей деформаций в опорном решении. Дополнительные условия должны быть универсальными, инвариантными относительно среднего напряжения и позволять использовать известные решения и экспериментальную информацию для анализа технологических задач. Подобные дополнительные условия можно составить для параметров, определяющих дифференциальную геометрию траекторий максимальных касательных напряжений в характерных сечениях пластической области.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А. А. Пластичность: Основы общей математической теории. М.: АН СССР, 1963. 271 с.
2. Ивлев Д. Д. Механика пластических сред: в 2 т. Т.1.: Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001. 232 с.
3. Тутышкин Н. Д., Трегубов В. И. Связанные задачи теории пластичности и повреждаемости деформируемых материалов. Тула: ТулГУ, 2016. 248 с.

4. Tutyshkin N. D., Lofink P., Müller W. H., Wille R., Stahn O. Constitutive equations of a tensorial model for strain-induced damage of metals based on three invariants // *International Journal Continuum mechanics and thermo-dynamics*. 2017. Vol. 29. P. 251–269.
5. Tutyshkin N. D., Müller W. H., Wille R., Zapara M. A. Strain-induced damage of metals under large plastic deformation: Theoretical framework and experiments // *International Journal of Plasticity*. 2014. Vol. 59. P. 133–151.
6. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.
7. Бригаднов И. А. Математическая корректность и численные методы решения начально-краевых задач пластичности // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 1996. № 4. С. 62–74.
8. Яненко Н. Н., Бояринцев Ю. И. Теория и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных // *Труды IV Всесоюзного матем. съезда*. М., 1964. Т. 2. С. 613–621.
9. Tutyshkin N. D. Metal plastic straining processes with predictable mechanical and constitutive properties modeling // *IASME Transactions*. 2005. Vol. 2. № 9. P. 1819–1825.
10. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.

REFERENCES

1. Ilyushin A. A., 1963, “Plasticity: Fundamentals of General Mathematical Theory”, *M.: AN SSSR*, 271 p. (In Russian)
2. Ivlev D. D., 2001, “Mechanics of Plastic Environments: in 2 vol. Vol.1.: Theory of Perfect Plasticity”, *M.: Fizmatlit*, 232 p. (In Russian)
3. Tutyshkin N. D., Tregubov V. I., 2016, “Related problems of the theory of plasticity and damage to deformable materials”, *Tula: TulGU*, 248 p. (In Russian)
4. Tutyshkin N. D., Lofink P., Müller W. H., Wille R., Stahn O., 2017, “Constitutive equations of a tensorial model for strain-induced damage of metals based on three invariants”, *International Journal Continuum mechanics and thermo-dynamics*, vol. 29, pp. 251–269.
5. Tutyshkin N. D., Müller W. H., Wille R., Zapara M. A., 2014, “Strain-induced damage of metals under large plastic deformation: Theoretical framework and experiments”, *International Journal of Plasticity*, vol. 59, pp. 133–151.
6. Rozhdestvenskiy B. L., Yanenko N. N., 1978, “Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics”, *M.: Science*, 687 p. (In Russian)
7. Brigadnov I. A., 1996, “Mathematical correctness and numerical methods for solving initial-boundary problems of plasticity”, *Izvestiya RAN. Solid mechanics*, № 4, pp. 62–74. (In Russian)
8. Yanenko N. N., Boyarintsev Yu. I., 1964, “Theory and methods of integration of systems of nonlinear partial differential equations”, *Trudy IV Vsesoyuznogo math. s'ezda*, *M.*, vol. 2., pp. 613–621. (In Russian)
9. Tutyshkin N. D., 2005, “Metal plastic straining processes with predictable mechanical and constitutive properties modeling”, *IASME Transactions*, vol. 2, № 9, pp. 1819–1825.

-
10. Sokolovskiy V. V., 1969, "Plasticity theory", *M.: Higher School*, 608 p. (In Russian)

Получено 15.02.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.