ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-311-324

Прохождение звука через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями¹

Л. А. Толоконников, Т. Ш. Нгуен

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Нгуен Тхи Шанг — аспирант кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: nguyensangnb@gmail.com***Аннотация**

В статье рассматривается задача об отражении и прохождении плоской звуковой волны через однородную упругую пластину с непрерывно-неоднородным упругим покрытием, граничащую с вязкими жидкостями. Полагается, что законы неоднородности покрытия пластины описываются дифференцируемыми функциями.

Распространение малых возмущений в вязкой жидкости в случае установившихся колебаний описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца. Распространение упругих волн в однородной изотропной упругой пластине описывается двумя волновыми уравнениями для продольных и поперечных волн. Колебания неоднородного изотропного упругого покрытия описываются общими уравнениями движения сплошной среды.

Для нахождения поля смещений в неоднородном покрытии построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Получено аналитическое описание отраженного и прошедшего через пластину акустических полей.

Представлены результаты численных расчетов зависимостей коэффициентов отражения и прохождения продольных волн от угла падения плоской волны.

Ключевые слова: отражение и прохождение звуковых волн, однородная упругая пластина, непрерывно-неоднородное покрытие.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников, Т. Ш. Нгуен. Прохождение звука через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 311–324.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-311-324

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

The transmission of sound through an elastic plate with an inhomogeneous coating adjoining viscous liquids²

L. A. Tolokonnikov, T. S. Nguyen

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Tula).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Nguyen Thi Sang — undergraduate department of of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Tula).

e-mail: nguyensangnb@gmail.com

Abstract

In paper the problem of the reflection and transmission of a plane sound wave through a homogeneous elastic plate with an continuously inhomogeneous plate elastic coating adjoining viscous liquids is considered. It is believed that heterogeneity laws of a coating are described by differentiable functions.

The propagation of small perturbations in a viscous fluid in the case of steady state oscillations is described by scalar and vector Helmholtz's equations. The propagation of elastic waves in a uniform isotropic elastic plate is described by two wave equations for longitudinal and transverse waves. Oscillations of an inhomogeneous isotropic elastic coating are described by general motion equations of the continuous medium.

The boundary-value problem for the system of ordinary second order differential equations is constructed for determination of the displacement field in inhomogeneous coating.

An analytical description of the reflected and transmitted through the plate acoustic fields is obtained.

The results of numerical calculations of dependences of coefficients of reflection and transmission of longitudinal waves from the angle of incidence of plane wave are presented.

Keywords: reflection and transmission of sound waves, homogeneous elastic plate, continuously inhomogeneous coating.

Bibliography: 25 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, T. S. Nguyen, 2019, "The transmission of sound through an elastic plate with an inhomogeneous coating adjoining viscous liquids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 311–324.

1. Введение

Существует большое количество работ по изучению прохождения звуковых волн через плоский однородный изотропный упругий слой, граничащий с идеальными жидкостями, например, [1, 2]. Отражение звука анизотропными однородными упругими пластинами рассматривалось в [3, 4]. Прохождение звука через однородный изотропный термоупругий плоский слой исследовалось в [5, 6]. Прохождение звуковых волн через плоский неоднородный изотропный упругий слой изучалось в [7], а через трансверсально-изотропный неоднородный упругий слой — в [8, 9]. В [10] рассматривалась задача об отражении и преломлении плоской звуковой волны неоднородным упругим плоским слоем, материал которого обладает анизотропией общего вида. В [11] решена обратная задача об определении линейных законов неоднородности плоского упругого слоя, имеющего наименьшее отражение при заданном угле падения плоской звуковой волны. Задача об определении законов неоднородности трансверсально-изотропного

²The study was carried out for by the grant of Russian scientific Foundation (project 18-11-00199).

плоского упругого слоя по коэффициенту прохождения плоской звуковой волны решена в [12]. В указанных выше работах полагалось, что упругий слой граничит с идеальными жидкостями.

При распространении звука в реальной жидкости часть звуковой энергии превращается в тепловую. Причиной диссипации энергии является наличие вязкости и теплопроводности. Однако, если для газов указанные причины поглощения вносят примерно одинаковый вклад, то для капельных жидкостей основную роль в поглощении звука играет вязкость и влиянием теплопроводности можно пренебречь. Вопрос о поглощении звука при распространении звуковых волн вблизи твердых границ представляет значительный интерес для различных областей физической и технической акустики.

Прохождение плоской звуковой волны через неоднородный анизотропный плоский слой, граничащий с вязкими жидкостями, изучалось в [13]. Прохождение звука через непрерывно-неоднородный и дискретно-неоднородный термоупругие плоские слои, граничащие с невязкими теплопроводными жидкостями, рассматривалось в [14, 15].

Ряд работ посвящен исследованию отражения и прохождения звуковых волн на однородных изотропных упругих пластинах с неоднородными покрытиями, находящимися в невязкой жидкости. С помощью неоднородных покрытий можно изменять характер отражения и прохождения звука, добиваясь требуемых акустических характеристик путем выбора соответствующих законов неоднородности для механических параметров покрытия пластины. Задача об отражении и преломлении плоской звуковой волны упругим плоским слоем с неоднородным по толщине покрытием решена в [16]. Моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами проведено в [17]. Задача определения толщины и вида зависимостей материальных параметров неоднородного покрытия конечной упругой пластины со сферической полостью, обеспечивающих требуемые характеристики отражения плоской звуковой волны, рассмотрена в [18]. Прямая и обратная задачи о прохождении плоской звуковой волны через однородную термоупругую пластину с непрерывно-неоднородным покрытием решены в [19]. В [20] исследуется влияние непрерывно-неоднородного покрытия однородной упругой пластины на отражение и прохождение плоской звуковой волны при расположении покрытия на разных поверхностях пластины и разных законах неоднородности механических параметров материала покрытия.

В настоящей работе рассматривается задача об отражении и прохождении плоской звуковой волны через однородную упругую пластину с непрерывно-неоднородным упругим покрытием, граничащую с вязкими жидкостями.

2. Постановка задачи

Рассмотрим однородную изотропную упругую пластину толщиной H , материал которой характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Пластина имеет покрытие в виде неоднородного по толщине изотропного упругого слоя толщиной h . Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного покрытия описываются дифференцируемыми функциями координаты z , а плотность ρ — непрерывной функцией координаты z : $\rho = \rho(z)$, $\lambda = \lambda(z)$, $\mu = \mu(z)$. При этом система прямоугольных координат x, y, z выбрана так, что ось x лежит в плоскости, разделяющей однородную пластину и ее неоднородное покрытие, а ось z направлена вниз по нормали к поверхности пластины (рис.1). Пластина с покрытием граничит с вязкими однородными жидкостями, которые имеют плотности ρ_1, ρ_2 , скорости звука c_1, c_2 , кинематические коэффициенты вязкости (первый и второй) ν_1, ν_2 и ξ_1, ξ_2 соответственно.

Рис. 1: Геометрия задачи

Пусть из полупространства $z < -h$ на пластину с покрытием падает под произвольным углом плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой равен

$$\Psi_0 = A_0 \exp\{i[k_{1x}^{(1)}x + k_{1z}^{(1)}(z + h) - \omega t]\}, \quad (1)$$

где A_0 — амплитуда волны; $k_{1x}^{(1)} = k_1^{(1)} \sin \theta_0$, $k_{1z}^{(1)} = \sqrt{k_1^{(1)2} - k_{1x}^{(1)2}} = k_1^{(1)} \cos \theta_0$ — проекции волнового вектора $\mathbf{k}_1^{(1)}$ на оси координат x и z соответственно; $k_1^{(1)}$ — волновое число в полупространстве $z < -h$; ω — круговая частота; θ_0 — угол падения плоской волны, составляемый вектором $\mathbf{k}_1^{(1)}$ и осью z . Считаем, что волновой вектор $\mathbf{k}_1^{(1)}$ лежит в плоскости xz . Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ в дальнейшем опускаем.

Определим отраженную от пластины с покрытием и прошедшую через пластину волны.

3. Аналитическое решение задачи

Поскольку волновой вектор падающей волны $\mathbf{k}_1^{(1)}$ лежит в плоскости x, z и, следовательно, возбуждающее поле не зависит от координаты y , а неоднородность материала покрытия проявляется лишь по оси z , то от координаты y не будут зависеть ни отраженное от пластины, ни прошедшее через пластину, ни возбужденные в упругой однородной пластине и в ее неоднородном покрытии волновые поля.

Распространение малых возмущений в вязкой жидкости в случае установившихся колебаний в области описывается системой, состоящей из скалярного и векторного уравнений Гельмгольца [21]

$$\Delta \Psi_j + k_1^{(j)2} \Psi_j = 0, \quad (2)$$

$$\Delta \Phi_j + k_2^{(j)2} \Phi_j = 0, \quad (3)$$

где Ψ_j и Φ_j — потенциалы скорости продольных и вязких волн соответственно в областях $z < -h$ ($j = 1$) и $z > H$ ($j = 2$); $k_1^{(j)}$ и $k_2^{(j)}$ — волновые числа продольных звуковых и вязких

волн в j -ой среде соответственно;

$$k_1^{(j)2} = \frac{\omega^2}{c_j^2 - i\omega(\xi_j + \frac{4}{3}\nu_j)}, \quad k_2^{(j)2} = i\frac{\omega}{\nu_j}.$$

При этом

$$\Psi_1 = \Psi_0 + \Psi_s, \quad (4)$$

где Ψ_s — потенциал скорости отраженной звуковой волны, удовлетворяющий уравнению Гельмгольца

$$\Delta\Psi_s + k_1^{(1)2}\Psi_s = 0, \quad (5)$$

Так как рассматриваемая задача является двумерной, то $\Phi = \Phi(x, z)\mathbf{e}_y$, где $\mathbf{e}_y$ — единичный вектор оси y . Тогда векторное уравнение (3) сведется к одному скалярному уравнению Гельмгольца относительно функции $\Phi(x, z)$

$$\Delta\Phi_j + k_2^{(j)2}\Phi_j = 0, \quad (6)$$

Вектор скорости частиц и акустическое давление в j -ой вязкой жидкости определяются по формулам

$$\mathbf{v}^{(j)} = \text{grad}\Psi_j + \text{rot}\Phi_j, \quad (7)$$

$$p_j = i\rho_j\omega \left[1 + i\frac{k_1^{(j)2}}{\omega} \left(\xi_j + \frac{4}{3}\nu_j \right) \right] \Psi_j. \quad (8)$$

Компоненты тензора напряжений в j -ой вязкой жидкости $\sigma_{zz}^{(j)}$ и $\sigma_{xz}^{(j)}$ определяются по формулам [22]

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(j)} &= -p_j + \rho_j \left(\xi_j - \frac{2}{3}\nu_j \right) \text{div}\mathbf{v}^{(j)} + 2\nu_j \frac{\partial v_z^{(j)}}{\partial z}, \\ \sigma_{xz}^{(j)} &= \rho_j\nu_j \left(\frac{\partial v_x^{(j)}}{\partial z} + \frac{\partial v_z^{(j)}}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где $v_x^{(j)}$ и $v_z^{(j)}$ — компоненты вектора скорости $\mathbf{v}^{(j)}$;

$$v_x^{(j)} = \frac{\partial\Psi_j}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_j}{\partial z}, \quad v_z^{(j)} = \frac{\partial\Psi_j}{\partial z} + \frac{\partial\Phi_j}{\partial x}. \quad (10)$$

Решения уравнений (5), (2) (при $j = 2$) и (6) будем искать в виде

$$\Psi_s = A_1 \exp\{i[k_{1x}^{(1)}x - k_{1z}^{(1)}(z + h)]\}, \quad \Psi_2 = A_2 \exp\{i[k_{1x}^{(2)}x + k_{1z}^{(2)}(z - H)]\}, \quad (11)$$

$$\Phi_1 = B_1 \exp\{i[k_{2x}^{(1)}x - k_{2z}^{(1)}(z + h)]\}, \quad \Phi_2 = B_2 \exp\{i[k_{2x}^{(2)}x + k_{2z}^{(2)}(z - H)]\}, \quad (12)$$

где $k_{1x}^{(2)}, k_{1z}^{(2)}$ — проекции волнового вектора прошедшей продольной волны $\mathbf{k}_1^{(2)}$ на оси x и z ; $k_{1x}^{(2)} = \sqrt{k_1^{(2)2} - k_{1z}^{(2)2}}$; $k_{2x}^{(j)}, k_{2z}^{(j)}$ — проекции волнового вектора $\mathbf{k}_2^{(j)}$ на оси x и z в j -ой жидкости; $k_{2z}^{(j)} = \sqrt{k_2^{(j)2} - k_{2x}^{(j)2}}$. При этом согласно закону Снеллиуса [1] $k_{1x}^{(2)} = k_{2x}^{(1)} = k_{2x}^{(2)} = k_{1x}^{(1)}$.

Если выполняются соотношения

$$\frac{\omega\nu}{c_j^2} \ll 1, \quad \frac{\omega\xi}{c_j^2} \ll 1,$$

то

$$k_1^{(j)} \approx \frac{\omega}{c_j}, \quad p_j \approx i\rho_j\omega\Psi_j \quad (j = 1, 2).$$

Распространение малых возмущений в однородном изотропном упругом слое описывается двумя волновыми уравнениями для продольных и поперечных волн, которые в случае установившихся колебаний переходят в уравнения Гельмгольца [2]

$$\Delta\varphi + k_l^2\varphi = 0, \quad (13)$$

$$\Delta\mathbf{\Pi} + k_\tau^2\mathbf{\Pi} = 0, \quad (14)$$

где φ и $\mathbf{\Pi}$ — скалярный и векторный потенциалы смещения; $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн соответственно. При этом вектор смещения частиц упругого однородного слоя

$$\mathbf{u}^{(0)} = \text{grad}\varphi + \text{rot}\mathbf{\Pi}. \quad (15)$$

Так как $\mathbf{\Pi} = \Pi(x, z)\mathbf{e}_y$, то векторное уравнение (14) сведется к одному скалярному уравнению Гельмгольца относительно функции $\Pi(x, z)$

$$\Pi + k_\tau^2\Pi = 0. \quad (16)$$

Компоненты вектора $\mathbf{u}^{(0)}$ записываются через функции φ и Π следующим образом:

$$u_x^{(0)} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\Pi}{\partial z}, \quad u_z^{(0)} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\Pi}{\partial x}. \quad (17)$$

Связь между компонентами тензора напряжений и компонентами вектора смещения в однородной упругой пластине имеет вид [23]

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(0)} &= \lambda_0 \text{div}\mathbf{u}^{(0)} + 2\mu_0 \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial x}, & \sigma_{zz}^{(0)} &= \lambda_0 \text{div}\mathbf{u}^{(0)} + 2\mu_0 \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}, \\ \sigma_{xz}^{(0)} &= \mu_0 \left(\frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Решения уравнений (13) и (16) будем искать в виде

$$\varphi = C_1 \exp[i(k_{lx}x + k_{lz}z)] + C_2 \exp[i(k_{lx}x - k_{lz}z)], \quad (19)$$

$$\Pi = D_1 \exp[i(k_{\tau x}x + k_{\tau z}z)] + D_2 \exp[i(k_{\tau x}x - k_{\tau z}z)], \quad (20)$$

где $k_{lz} = \sqrt{k_l^2 - k_{lx}^2}$, $k_{\tau z} = \sqrt{k_\tau^2 - k_{\tau x}^2}$. Согласно закону Снеллиуса $k_{lx} = k_{\tau x} = k_{lx}^{(1)}$.

Распространение упругих волн в неоднородном покрытии описывается общими уравнениями движения сплошной среды [23], которые при отсутствии массовых сил для установившегося режима движения имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} = -\omega^2\rho(z)u_x, \quad \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} = -\omega^2\rho(z)u_z. \quad (21)$$

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} связаны с составляющими вектора смещения $\mathbf{u}$ в неоднородном упругом покрытии следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda(z)\text{div}\mathbf{u} + 2\mu(z)\frac{\partial u_x}{\partial x}, & \sigma_{zz} &= \lambda(z)\text{div}\mathbf{u} + 2\mu(z)\frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \sigma_{xz} &= \mu(z)\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Согласно закону Снеллиуса зависимость составляющих вектора смещения $\mathbf{u}$ от координаты x будет иметь вид $\exp(ik_{1x}x)$. Поэтому компоненты вектора $\mathbf{u}$ будем искать в виде

$$u_x = U_1(z) \exp(ik_{1x}x), \quad u_z = U_3(z) \exp(ik_{1x}x). \quad (23)$$

Подставляя выражения (23) в уравнения (21) с учетом (22), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_i(z)$ ($i = 1, 3$):

$$AU'' + BU' + CU = 0, \quad (24)$$

где $\mathbf{U} = (U_1, U_3)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mu' & ik_{1x}(\lambda + \mu) \\ ik_{1x}(\lambda + \mu) & \lambda' + 2\mu' \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -k_{1x}^2(\lambda + 2\mu) + \omega^2\rho & ik_{1x}\mu' \\ ik_{1x}\lambda' & -k_{1x}^2\mu + \omega^2\rho \end{pmatrix}.$$

Здесь штрихи обозначают производные по координате z .

Коэффициенты A_i , B_i , C_i , D_i ($i = 1, 2$) в выражениях (11), (12), (19) и (20) подлежат определению из граничных условий.

На поверхностях, соприкасающихся с вязкими жидкостями, граничные условия заключаются в равенстве скоростей частиц упругой среды и жидкости, непрерывности нормальных и тангенциальных напряжений:

$$\begin{aligned} \text{при } z = -h \quad & -i\omega u_x = v_x^{(1)}, \quad -i\omega u_z = v_z^{(1)}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(1)}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^{(1)}, \\ \text{при } z = H \quad & -i\omega u_x^{(0)} = v_x^{(2)}, \quad -i\omega u_z^{(0)} = v_z^{(2)}, \quad \sigma_{zz}^{(0)} = \sigma_{zz}^{(2)}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^{(2)}. \end{aligned} \quad (25)$$

На поверхности $z = 0$, разделяющей однородный слой и неоднородное покрытие, должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения:

$$\text{при } z = 0 \quad u_x = u_x^{(0)}, \quad u_z = u_z^{(0)}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(0)}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^{(0)}. \quad (26)$$

Подставим выражения (1), (11), (12), (19) и (20) в граничные условия (25) и (26) с учетом (4), (8)-(10), (17), (18) и (22).

Из первых двух условий (25) получаем систему двух уравнений, из которой находим коэффициенты A_1 и B_1 , выраженные через значения функций $U_1(z)$ и $U_3(z)$ на поверхности неоднородного покрытия $z = -h$:

$$A_1 = [A_0(k_{1z}^{(1)}k_{2z}^{(1)} - k_{1x}^{(1)2}) - \omega k_{1x}^{(1)}U_1(-h) + \omega k_{2z}^{(1)}U_3(-h)]\Delta_1^{-1},$$

$$B_1 = -[2A_0k_{1x}^{(1)}k_{1z}^{(1)} + \omega k_{1x}^{(1)}U_1(-h) + \omega k_{1x}^{(1)}U_3(-h)]\Delta_1^{-1}.$$

Из четырех граничных условий при $z = H$ и первых двух условий (26) получаем систему уравнений, из которых определяем коэффициенты A_2 , B_2 , C_j , D_j ($j = 1, 2$), выраженные через значения функций $U_1(z)$ и $U_3(z)$ на поверхности неоднородного покрытия $z = 0$:

$$\begin{aligned} A_2 &= -i\omega (C_1a_1e_{1l} + C_2a_2e_{2l} + D_1b_1e_{1\tau} + D_2b_2e_{2\tau}) \Delta_2^{-1}, \\ B_2 &= -i\omega (C_1c_1e_{1l} - C_2c_2e_{2l} + D_1d_1e_{1\tau} + D_2d_2e_{2\tau}) \Delta_2^{-1}, \\ C_1 &= \beta_{12}U_1(0) + \beta_{22}U_3(0), \quad C_2 = \beta_{11}U_1(0) + \beta_{21}U_3(0), \\ D_1 &= \gamma_{12}U_1(0) + \gamma_{22}U_3(0), \quad D_2 = \gamma_{11}U_1(0) + \gamma_{21}U_3(0). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
e_{1l} &= e^{ik_{lz}H}, \quad e_{2l} = e^{-ik_{lz}H}, \quad e_{1\tau} = e^{ik_{\tau z}H}, \quad e_{2\tau} = e^{-ik_{\tau z}H}, \\
\Delta_j &= k_{1z}^{(j)}k_{2z}^{(j)} + k_{1x}^{(j)2}, \quad a_j = k_{1x}^{(1)2} + (-1)^{j+1}k_{2z}^{(2)}k_{lz}, \quad b_j = k_{1x}^{(1)}[k_{2z}^{(2)} + (-1)^j k_{\tau z}], \\
c_j &= k_{1x}^{(1)}[k_{lz} + (-1)^j k_{1z}^{(2)}], \quad d_j = k_{1x}^{(1)2} + (-1)^{j+1}k_{1z}^{(2)}k_{\tau z}, \\
\beta_{1j} &= (-1)^j [t_j k_{1x}^{(1)}(w_2 - w_1) + k_{lz}(r_2 w_1 - r_1 w_2) + h_j k_{1x}^{(1)}(r_1 - r_2)] \Delta_3^{-1}, \\
\beta_{2j} &= -i[t_j k_{\tau z}(w_2 + w_1) + k_{1x}^{(1)}(r_1 w_2 - r_2 w_1) + (-1)^j h_j k_{\tau z}(r_1 + r_2)] \Delta_3^{-1}, \\
\gamma_{1j} &= -i[w_j k_{lz}(t_1 + t_2) + k_{1x}^{(1)}(t_1 h_2 - t_2 h_1) - r_j k_{lz}(h_1 + h_2)] \Delta_3^{-1}, \\
\gamma_{2j} &= (-1)^{j+1} i[w_j k_{1x}^{(1)}(t_2 - t_1) + (-1)^j k_{\tau z}(t_1 h_2 - t_2 h_1) + r_j k_{1x}^{(1)}(h_1 - h_2)] \Delta_3^{-1}, \\
t_j &= e_{jl}[s_1 - i\omega(m_2 a_j + n_2 c_j)] \Delta_2^{-1}, \quad r_j = e_{j\tau}[(-1)^{j+1} s_2 - i\omega(m_2 b_j + n_2 d_j)] \Delta_2^{-1}, \\
w_j &= e_{j\tau}[s_4 - i\omega(q_2 b_j + p_2 d_j)] \Delta_2^{-1}, \quad h_j = e_{jl}[(-1)^{j+1} s_3 - i\omega(q_2 a_j + p_2 c_j)] \Delta_2^{-1}, \\
m_j &= (-1)^{j+1} \left\{ i\omega \rho_j \left[1 + i \frac{k_{1x}^{(j)2}}{\omega} \left(\xi_j + \frac{4}{3} \nu_j \right) \right] + (k_{1x}^{(j)2} + k_{1z}^{(j)2}) \rho_j \left(\xi_j - \frac{2}{3} \nu_j \right) + 2\nu_j k_{1z}^{(j)2} \right\}, \\
n_j &= -2\nu_j k_{1x}^{(j)} k_{2z}^{(j)}, \quad q_j = -2\rho_j \nu_j k_{1x}^{(j)} k_{1z}^{(j)}, \quad p_j = (-1)^{j+1} \rho_j \nu_j (k_{1x}^{(j)2} - k_{2z}^{(j)2}), \\
&\quad (j = 1, 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_1 &= \lambda_0 k_{1x}^{(1)2} + (\lambda_0 + 2\mu_0) k_{lz}^2, \quad s_2 = 2\mu_0 k_{1x}^{(1)} k_{\tau z}, \quad s_3 = 2\mu_0 k_{1x}^{(1)} k_{lz}, \quad s_4 = \mu_0 (k_{1x}^{(1)2} - k_{\tau z}^2), \\
\Delta_3 &= k_{1x}^{(1)} [(t_1 - t_2)(w_1 - w_2) + (h_1 - h_2)(r_2 - r_1)] + k_{lz} k_{\tau z} [(t_1 + t_2)(w_1 + w_2) - (h_1 + h_2)(r_1 + r_2)] + \\
&\quad + 2k_{1x}^{(1)} [k_{lz}(r_1 w_2 - r_2 w_1) + k_{\tau z}(t_1 h_2 - t_2 h_1)].
\end{aligned}$$

Таким образом, чтобы вычислить коэффициенты A_j, B_j, C_j, D_j ($j = 1, 2$) необходимо найти величины $U_1(-h)$, $U_3(-h)$, $U_1(0)$ и $U_3(0)$. Эти величины подлежат определению из решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (24).

Краевые условия, получаемые из оставшихся неиспользованными граничных условий, имеют вид

$$\begin{aligned}
(AU' + EU)_{z=-h} &= G, \\
(AU' + FU)_{z=0} &= 0,
\end{aligned} \tag{27}$$

где

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & ik_{1x}^{(1)}\mu + e_{12} \\ ik_{1x}^{(1)}\lambda + e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_{11} & ik_{1x}^{(1)}\mu + f_{12} \\ ik_{1x}^{(1)}\lambda + f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}, \quad G = (g_1, g_2)^T,$$

$$\begin{aligned}
e_{11} &= -i\omega(q_1 k_{1x}^{(1)} + p_1 k_{1z}^{(1)}) \Delta_1^{-1}, \quad e_{12} = -i\omega(p_1 k_{1x}^{(1)} - q_1 k_{2z}^{(1)}) \Delta_1^{-1}, \\
e_{21} &= -i\omega(m_1 k_{1x}^{(1)} + n_1 k_{1z}^{(1)}) \Delta_1^{-1}, \quad e_{22} = -i\omega(n_1 k_{1x}^{(1)} - m_1 k_{2z}^{(1)}) \Delta_1^{-1}, \\
f_{1j} &= s_4(\beta_{j2} - \beta_{j1}) + s_3(\gamma_{j2} + \gamma_{j1}), \quad f_{2j} = s_1(\beta_{j2} + \beta_{j1}) + s_2(\gamma_{j2} - \gamma_{j1}), \\
g_1 &= q_1 + [q_1 k_{1x}^{(1)2} + (2p_1 - q_1) k_{1z}^{(1)} k_{2z}^{(1)}] \Delta_1^{-1}, \quad g_2 = -m_1 + [m_1 k_{1x}^{(1)2} + (2n_1 - m_1) k_{1z}^{(1)} k_{2z}^{(1)}] \Delta_1^{-1}.
\end{aligned}$$

После решения линейной краевой задачи (24), (27), получаем аналитическое описание акустических полей в жидкостях, а также полей смещений в однородной части пластины и неоднородном покрытии.

Для оценки влияния вязкости жидкостей, граничащих с пластиной, покрытой неоднородным упругим слоем, на процесс отражения и прохождения звука, воспользуемся коэффициентом поглощения α , характеризующим потерю энергии падающей звуковой волны вследствие вязкости жидкостей. При этом будем учитывать, что вязкие волны являются быстрозатухающими и существенны лишь в тонком пограничном слое вблизи твердой поверхности. Поэтому коэффициент поглощения будем определять следующим образом:

$$\alpha = I_0 - I_1 - I_2,$$

где I_0 , I_1 и I_2 — интенсивности в направлении, нормальном к пластине, падающей, продольной отраженной и продольной прошедшей плоских волн.

Интенсивность гармонической плоской волны в направлении, нормальном к пластине, определяется формулой [24, 25]

$$I = \frac{1}{2} |p| |v_z| \cos(\varphi_p - \varphi_v), \quad (28)$$

где $|p|$, φ_p и $|v_z|$, φ_v — модули и фазы давления и нормальной скорости частиц в акустическом поле.

Согласно (28) получаем

$$I_0 = \frac{1}{2} \frac{\rho_1 \omega^2}{c_1} \cos \theta_0 A_0^2, \quad I_1 = \frac{1}{2} \frac{\rho_1 \omega^2}{c_1} \cos \theta_0 A_1^2, \quad I_2 = \frac{1}{2} \rho_2 \omega k_{1z}^{(2)} A_2^2.$$

Тогда

$$\alpha = I_0 \left(1 - \left| \frac{A_1}{A_0} \right|^2 - \frac{\rho_2 c_1 |k_{1z}^{(2)}|}{\rho_1 \omega \cos \theta_0} \left| \frac{A_2}{A_0} \right|^2 \right).$$

4. Численные исследования

На основе полученного аналитического решения задачи были проведены численные расчеты зависимостей коэффициентов отражения и прохождения продольных волн от угла падения плоской волны. При этом исследовался случай, когда жидкости по обе стороны тела являются одинаковыми ($k_1^{(1)} = k_1^{(2)} = k_1$). Полагалось, что амплитуда падающей волны $A_0 = 1$, а отношение толщины покрытия h к толщине однородной пластины H , равно 0,2.

Рассматривалась алюминиевая пластина толщиной $H = 0,1$ м ($\rho_0 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2,6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) с покрытием на основе поливинилбутирала, находящаяся в воде ($\rho_1 = \rho_2 = 10^3$ кг/м³, $c_1 = c_2 = 1485$ м/с, $\nu_1 = \nu_2 = 1,006 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\xi_1 = \xi_2 = 0$ м²/с) и в глицерине ($\rho_1 = \rho_2 = 1,26 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_1 = c_2 = 1920$ м/с, $\nu_1 = \nu_2 = 1111,11 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\xi_1 = \xi_2 = 0$ м²/с).

Расчеты проводились как для однородного покрытия с плотностью $\tilde{\rho} = 1,07 \cdot 10^3$ кг/м³ кг/м и модулями упругости $\tilde{\lambda} = 3,9 \cdot 10^9$ Н/м², $\tilde{\mu} = 9,8 \cdot 10^8$ Н/м², так и для неоднородных покрытий, механические характеристики которых менялись по толщине слоя по линейным законам

$$\rho = \tilde{\rho} f_j(z) \quad (j = 1, 2), \quad \lambda = \tilde{\lambda}, \quad \mu = \tilde{\mu},$$

где

$$f_1(z) = a_1 \left(-\frac{z}{h} + 0,5 \right), \quad f_2(z) = a_2 \left(\frac{z}{h} + 1,5 \right), \quad a_1 = a_2 = 1.$$

Множитель a_j ($j = 1, 2$) выбран так, чтобы среднее значение функции $f_j(z)$ по толщине покрытия было равно единице.

Рис. 2: Зависимость коэффициента отражения $|A_1|$ от угла падения θ_0 для пластины, помещенной в воду

Рис. 3: Зависимость коэффициента прохождения $|A_2|$ от угла падения θ_0 для пластины, помещенной в воду

Зависимости $f_1(z)$ и $f_2(z)$ выбраны такими, что их графики являются зеркальным отражением друг друга относительно прямой $z = -h/2$. При этом на внутренней поверхности покрытия ($z = 0$) функция $f_2(z)$ достигает максимума, равного $1,5a_2$, а на внешней поверхности ($z = -h$) — минимума, равного $0,5a_2$. Функции $f_1(z)$ достигает тех же максимальных и минимальных значений, но уже на внешней и внутренней поверхностях покрытия.

На рис. 2–5 представлены зависимости $|A_1|$ и $|A_2|$ от θ_0 при фиксированной частоте падающей волны ($k_1H = 10$), когда тело помещено в воду и глицерин. Пунктирные линии соответствуют однородному покрытию, штриховые и сплошные — неоднородным покрытиям с законами неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ соответственно.

Сравнение угловых зависимостей показывает существенное влияние неоднородности материала покрытия на отражение и прохождение звука через пластину с покрытием. Это проявляется в смещении максимумов и минимумов коэффициентов отражения и прохождения и изменении их уровней.

Рис. 4: Зависимость коэффициента отражения $|A_1|$ от угла падения θ_0 для пластины, помещенной в глицерин

Рис. 5: Зависимость коэффициента прохождения $|A_2|$ от угла падения θ_0 для пластины, помещенной в глицерин

5. Заключение

В настоящей работе получено аналитическое решение задачи об отражении и прохождении плоской звуковой волны через однородную упругую пластину с непрерывно-неоднородным по толщине упругим покрытием, граничащую с вязкими жидкостями. Представлены результаты численных расчетов зависимостей коэффициентов отражения и прохождения продольных волн от угла падения плоской волны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
2. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.

3. Лонкевич М. П. Прохождение звука через слой трансверсально-изотропного материала конечной толщины // Акустический журн. 1971. Т. 17. Вып. 1. С. 85–92.
4. Шендеров Е. Л. Прохождение звука через трансверсально-изотропную пластину // Акустический журн. 1984. Т. 30. Вып. 1. С. 122–129.
5. Ларин Н. В. Прохождение звука через однородный термоупругий плоский слой // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 3. С. 145–153.
6. Ларин Н. В. Анализ резонансного рассеяния звука термоупругой пластиной // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 4. С. 109–123.
7. Приходько В. Ю., Тютюкин В. В. Расчет коэффициента отражения звуковых волн от твердых слоисто-неоднородных сред // Акустический журн. 1986. Т. 32. Вып. 2. С. 212–218.
8. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Прохождение звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный плоский слой // Акустический журн. 1990. Т. 36. Вып. 4. С. 740–744.
9. Ринкевич А. Б., Смирнов А. Н. Распространение упругих волн в неоднородной трансверсально-изотропной пластине // Дефектоскопия. 2000. № 8. С. 78–83.
10. Толоконников Л. А. Отражение и преломление плоской звуковой волны анизотропным неоднородным слоем // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40. № 5. С. 179–184.
11. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Определение законов неоднородности плоского упругого слоя с заданными звукоотражающими свойствами // Акустический журнал. 2015. Т. 61. № 5. С. 552–558.
12. Скобельцын С. А. Определение параметров неоднородности анизотропного упругого слоя по прохождению звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2016. Вып. 7. Ч. 2. С. 246–257.
13. Толоконников Л. А. Прохождение звука через неоднородный анизотропный слой, граничащий с вязкими жидкостями // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 1029–1035.
14. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Прохождение плоской звуковой волны через неоднородный термоупругий слой // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 4. С. 650–659.
15. Толоконников Л. А., Ларин Н. В. Прохождение звука через термоупругий дискретно-неоднородный плоский слой, граничащий с теплопроводными жидкостями // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58. № 1. С. 108–116.
16. Толоконников Л. А., Юдачев В. В. Отражение и преломление плоской звуковой волны упругим плоским слоем с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 3. С. 219–226.
17. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80. Вып. 4. С. 480–488.

18. Скобельцын С. А. Оценка свойств покрытия конечной упругой пластины с полостью, обеспечивающих заданные параметры отражения звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 7. С. 83–92.
19. Ларин Н. В. Определение законов неоднородности покрытия термоупругой пластины, обеспечивающих наименьшее звукоотражение // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2016. Вып. 11. Ч. 2. С. 216–234.
20. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. О влиянии неоднородного покрытия упругой пластины на отражение и прохождение звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 6. С. 362–372.
21. Толоконников Л. А., Скобельцын С. А. Дифракция звуковых волн на неоднородных и анизотропных телах. Тула: Изд-во ТулГУ, 2004. 200 с.
22. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
23. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
24. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
25. Лепендин Л. Ф. Акустика. М.: Высш. школа, 1978. 448 с.

REFERENCES

1. Brekhovskikh, L. M. 1973, “*Waves in Layered Media*”, Nauka, Moscow, 344 p., [in Russian].
2. Shenderov, E. L. 1972, “*Wave problems of underwater acoustics*”, Sudostroenie, Leningrad, 352 p., [in Russian].
3. Lonkevitch, M. P. 1971, “Transmission of sound through a finite-thickness layer of a transversal-isotropic materia”, *Akust. Zhurnal*, vol. 17, no 1, pp. 85–92, [in Russian].
4. Shenderov, E. L. 1984, “Sound propagation through transversally-isotropic plate”, *Akust. Zhurnal*, vol. 30, no 1, pp. 122–129, [in Russian].
5. Larin, N. V. 2015, “The transmission of sound through a uniform thermoelastic plane layer”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 3, pp. 145–153, [in Russian].
6. Larin, N. V. 2017, “Analysis of the resonance sound scattering by a thermoelastic plate”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 4, pp. 109–123, [in Russian].
7. Prikhod'ko, V. Yu. & Tyutekin, V. V. 1986, “Calculation of reflection coefficient of sound waves from solid layered media”, *Akust. Zhurnal*, vol. 32, no 2, pp. 212–218, [in Russian].
8. Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 1990, “Transmission of sound waves through a transversely isotropic inhomogeneous plane layer”, *Akust. Zhurnal*, vol. 36, no 4, pp. 740–744, [in Russian].
9. Rinkevich, A. B. & Smirnov, A. N. 2000, “Propagation of elastic waves in a non-uniform transversely isotropic plate”, *Defektoskopiya*, no 8, pp. 78–83, [in Russian].
10. Tolokonnikov, L. A. 1999, “Reflection and refraction of a planar acoustic waves in an anisotropic inhomogeneous layer”, *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 40, no 5, pp. 936–941.

11. Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "Determination of the Inhomogeneity Laws for an Elastic Layer with Preset Sound-Reflecting Properties", *Acoustical Physics*, vol. 61, no 5, pp. 504–510.
12. Skobel'tsyn, S. A. 2016, "Determining the parameters of anisotropic elastic layer on the sound transmission", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 7-2, pp. 246–257, [in Russian].
13. Tolokonnikov, L. A. 1998, "The transmission of sound through an inhomogeneous anisotropic layer adjoining viscous liquids", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 62, no 6, pp. 953–958.
14. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2006, "The transmission of a plane acoustic wave through a non-uniform thermoelastic layer", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 70, no 4, pp. 590–598.
15. Tolokonnikov, L. A. & Larin, N. V. 2017, "Sound propagation through a discretely inhomogeneous thermoelastic plane layer adjacent to heat-conducting liquids", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 58, no 1, pp. 95–102.
16. Tolokonnikov, L. A. & Yudachev, V. V. 2015, "Reflection and refraction of a planar acoustic waves in an elastic planar layer with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 3, pp. 219–226, [in Russian].
17. Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 2016, "Modelling the inhomogeneous coating of an elastic plate with optimum sound-reflecting properties", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 80, no 4, pp. 339–344.
18. Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Estimation of the coating properties of a finite plate with a cavity providing the given parameters of the sound reflection", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 7, pp. 83–92, [in Russian].
19. Larin, N. V. 2016, "Determination of the inhomogeneity laws for coating of the thermoelastic plate to obtain minimum sound reflection", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 11-2, pp. 216–234, [in Russian].
20. Tolokonnikov, L. A. & Nguyen, T. S. 2018, "About the influence of an non-uniform covering of the elastic plate on sound reflection and transmission", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 6, pp. 362–372, [in Russian].
21. Tolokonnikov, L. A. & Skobel'tsyn, S. A. 2004, "Diffraction of sound waves on inhomogeneous and anisotropic bodies", Tul. Gos. Univ., Tula, 200 p., [in Russian].
22. Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. 1988, "Hydrodynamics", Nauka, Moscow, 736 p., [in Russian].
23. Nowacki, W. 1975, "Teoria sprężystości", Mir, Moscow, 872 p., [in Russian].
24. Isakovich, M. A. 1973, "General Acoustics", Nauka, Moscow, 496 p., [in Russian].
25. Lependin L. F. 1978, "Acoustics", Vishaya shkola, Moscow, 448 p., [in Russian].

Получено 12.04.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.