ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 2.

УДК 517.9 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-298-310

Дифференцирование функций кватернионной переменной

Н. С. Полякова

Полякова Надия Салихжановна — кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (г. Москва).
e-mail: polyakova.nadiya@mail.ru

Аннотация

В данной работе рассматривается определение дифференцируемости и регулярности по Фютеру [1–2] и примеры регулярных по Фютеру функций, приводится и определение С-регулярности и С-производной или производной Куллена [3], на основе которой строится новая теория регулярных функций в [4], которая уже включает полиномы и сходящиеся ряды гиперкомплексной переменной как дифференцируемые функции. Затем предлагается новое определение дифференцируемости, имеющее классический вид, но со специфической сходимостью, которое позволяет доказать теоремы о дифференцируемости суммы и произведения дифференцируемых функций, о дифференцируемости "частного" дифференцируемых функций. Далее выводится производная степени и доказывается дифференцируемость полиномов и степенных рядов, что позволяет строить обобщения элементарных функций для кватернионных аргументов. Приводится пример, показывающий, что без специфической сходимости приведенное определение дифференцируемости теряет смысл. С помощью степенных рядов задаются функции, которые являются решениями дифференциальных уравнений с постоянными кватернионными коэффициентами. Рассматривается задача отыскания корней квадратного уравнения с кватернионными коэффициентами, которая возникает при решении дифференциальных уравнений

Ключевые слова: кватернион, мнимые единицы, тригонометрическая форма, аргумент кватерниона, модуль кватерниона, векторная часть кватерниона, вещественно дифференцируемая функция, С-регулярная функция, дифференциальное уравнение.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
Н. С. Полякова. Дифференцирование функций кватернионной переменной // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 298–310.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 2.

UDC 517.9 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-298-310

Differentiation of functions of quaternionic variable

N. S. Polyakova

Poliakova Nadiia Salikhzhanovna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Bauman Moscow State Technical University (Moscow).
e-mail: polyakova.nadiya@mail.ru

Abstract

In this paper it is considered the definition of differentiability and regularity by Fueter [1, 2] and examples of regular function by Fueter, and the definition of C-regularity and C-derivative or Cullen derivative, on the basis of which a new theory of regular functions, which already includes polynomials and converging series of hypercomplex variable as differentiable and regular functions. Then a new definition of differentiability is proposed. It has a classical form, but specific convergence, which allows to prove theorems about differentiability of the sum and product of differentiable functions, differentiability of the "quotient" of differentiable functions. Further, it is deduced the derivative of power and is proved differentiability of polynomials and power series that allows to construct generalization of elementary functions for quaternionic argument. An example is given to show that without specific convergence the given definition of differentiability loses its meaning. With the help of power series functions are given, which are solutions of differential equations with constant quaternion coefficients. It is considered the problem of finding the roots of a square equation that arises in solving differential equations.

Keywords: quaternion, imaginary units, trigonometric form, the argument of the quaternion, the module of the quaternion, the vector part of the quaternion, a real differential function, C-regular function, differential equation.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
N. S. Polyakova, 2019, "Differentiation of functions of quaternionic variable" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 298–310.

1. Введение

Кватернионы имеют большие преимущества в задачах вращения твердого тела [5–7] и могут быть использованы в математической физике [8–13], поэтому задача построения анализа кватернионных функций является актуальной.

Кватернионы – это четырехкомпонентные числа, то есть числа, которые задаются с помощью четырех действительных чисел и, значит, могут быть интерпретированы как четырехмерные векторы $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, обычно записываются в виде:

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \tag{1}$$

при этом, q_0 называется действительной или скалярной частью и обозначается Req, вектор $\vec{a} = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ мнимой или векторной частью кватерниона q и обозначается $\bar{v}(q)$, то есть кватернион может быть записан в виде:

$$q = Re(q) + \bar{v}(q), \tag{2}$$

а векторы i, j, k называются мнимыми единицами, так как их квадраты в смысле кватернионного умножения равны -1. Учитывая применение кватернионов в теоретической механике в записи оператора поворота, мы будем рассматривать их в тригонометрической форме:

$$q = |q| \cdot (\cos\varphi + \bar{a}_0 \sin\varphi), \tag{3}$$

где $|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ — длина кватерниона как четырехмерного вектора, $\varphi = \arg q$ – аргумент кватерниона q,

$$\varphi = \arccos \frac{q_0}{|q|}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \tag{4}$$

$\bar{a}_0$ – вектор единичной длины в трехмерном пространстве – направляющий вектор векторной части кватерниона, то есть, $|q| \cdot \cos\varphi = q_0 = Req$ – действительная (скалярная) часть кватерниона, $|q| \cdot \bar{a}_0 \cdot \sin\varphi = \bar{v}(q)$ – векторная часть q.

Кватернионы можно складывать и умножать на действительные числа как обычные четырехмерные векторы, но, кроме этого, их можно умножать и “делить” как числа. Умножение кватернионов можно определить, задав результаты умножения мнимых единиц между собой и результат умножения на скалярную единицу, а затем распространить на произвольные кватернионы по дистрибутивности (см., например, [14-15]). При использовании формы записи для $\lambda = Re\lambda + \bar{v}(\lambda)$, $\mu = Re\mu + \bar{v}(\mu)$ их произведение может быть записано в виде:

$$\lambda \circ \mu = Re\lambda \cdot Re\mu - (\bar{v}(\lambda), \bar{v}(\mu)) + Re\lambda \cdot \bar{v}(\mu) + Re\mu \cdot \bar{v}(\lambda) + \bar{v}(\lambda) \times \bar{v}(\mu), \tag{5}$$

где $(\bar{v}(\lambda), \bar{v}(\mu))$ – скалярное произведение векторов $\bar{v}(\lambda)$ и $\bar{v}(\mu)$, а $\bar{v}(\lambda) \times \bar{v}(\mu)$ – их векторное произведение.

Через $\tilde{\lambda}$ обозначим кватернион, сопряженный к λ, $\tilde{\lambda} = Re\lambda - \bar{v}(\lambda)$, при этом $\lambda \circ \tilde{\lambda} = |\lambda|^2$. Заметим, что, если $Re\lambda = 0$, то λ – чисто векторный кватернион и $\tilde{\lambda} = -\lambda$. Если $\bar{v}(\lambda) = 0$, то $\lambda = Re\lambda = \tilde{\lambda}$. Если $\lambda \neq 0$, то существует обратный (относительно кватернионного умножения) кватернион $\lambda^{-1} = \frac{\tilde{\lambda}}{|\lambda|^2}$, такой, что $\lambda \circ \lambda^{-1} = \lambda^{-1} \circ \lambda = 1$. Если $|\lambda| = 1$, то $\lambda^{-1} = \tilde{\lambda}$. Оператор поворота в трехмерном пространстве задается формулой $\bar{r}' = \lambda \circ \bar{r} \circ \lambda^{-1}$[5, 14,15] , при этом происходит поворот вектора $\bar{r}$ на угол $\alpha = 2\arg\lambda$ вокруг оси с направляющим вектором $\bar{v}(\lambda)$. Так как $|\lambda|$ при этом не оказывает влияния на результат, то обычно для поворотов используются нормированные кватернионы, то есть такие, что $|\lambda| = 1$, тогда поворот записывается в виде:

$$\bar{r}' = \lambda \circ \bar{r} \circ \tilde{\lambda}. \tag{6}$$

Множество всех кватернионов с определенными на них операциями сложения и умножения кватернионов обозначим $\boldsymbol{H}$.

Сходимость во множестве кватернионов определим как сходимость в четырехмерном векторном пространстве.

Определение. Кватернион $\lambda^{(0)}$ является пределом последовательности кватернионов $\{\lambda^{(n)}\}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^{(n)} = \lambda^{(0)}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda^{(n)} - \lambda^{(0)}| = 0.$$

Это определение позволяет рассматривать степенные ряды кватернионной переменной и определить основные элементарные функции с помощью рядов.

Аналогично мы можем определить предел и непрерывность кватернионных функций кватернионной переменной.

Определение. Пусть функция $f(q)$ определена в $\boldsymbol{H}$ и принимает значения в $\boldsymbol{H}$. $\lim\limits_{q\to q^{(0)}} f(q) = \lambda$ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что из неравенства $0 < |q - q^{(0)}| < \delta$ следует неравенство $|f(q) - \lambda| < \varepsilon$.

Определение. Кватернионная функция кватернионной переменной $f(q)$ называется непрерывной в точке $q^{(0)}$, если $\lim\limits_{q\to q^{(0)}} f(q) = f(q^{(0)})$.

2. Регулярность по Фютеру.

Попытки построить дифференциальное исчисление функций кватернионной переменной предпринимались неоднократно. Одна из наиболее известных представлена в работах Фютера ([1]-[2]). Автором ставилась задача не просто определить производные функций кватернионной переменной и установить свойства дифференцируемых функций, но определить дифференцирование так, чтобы получить теорию голоморфных функций кватернионной переменной аналогичную теории голоморфных функций комплексной переменной.

Сначала рассматриваются кватернионные функции кватернионной переменной как вектор-функции четырех аргументов в четырехмерном пространстве, то есть как отображения четырехмерного пространства в себя.

Определение. Пусть $f = f_0(q) + if_1(q) + jf_2(q) + kf_3(q)$, где $q = q_0 + q_1\vec{i} + q_2\vec{j} + q_3\vec{k}$, f называется вещественно дифференцируемой, если существуют непрерывные частные производные компонент $f_n,\ \ n = 0, 1, 2, 3$ по переменным $q_m,\ \ m = 0, 1, 2, 3$ не менее, чем до второго порядка включительно.

Затем определяются дифференциальные операторы

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{q}} = \frac{1}{4}(\frac{\partial f}{\partial q_0} + i\frac{\partial f}{\partial q_1} + j\frac{\partial f}{\partial q_2} + k\frac{\partial f}{\partial q_3}) \tag{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{q}} = \frac{1}{4}(\frac{\partial f}{\partial q_0} + \frac{\partial f}{\partial q_1}i + \frac{\partial f}{\partial q_2}j + \frac{\partial f}{\partial q_3}k) \tag{8}$$

ныне известные как операторы Коши-Фютера и множество решений уравнения $\frac{\partial f}{\partial \bar{q}} = 0$ объявляется пространством голоморфных или регулярных функций, причем, если оператор определен по формуле (7), то леворегулярных функций, а если по формуле (8) – праворегулярных. В дальнейшем для определенности будем рассматривать леворегулярные функции. Эта теория в настоящее время очень хорошо развита и весьма успешна в воспроизведении многих важных свойств голоморфных функций. С ее дальнейшим развитием можно ознакомиться в работах В. В. Кравченко, В. Г. Кравченко и М. В. Шапиро [12–13], а также в работах ряда других авторов [8]–[11]. Недостатком этой теории является то, что тождественная функция $f(q) = q$, а, следовательно, многочлены и ряды не являются голоморфными функциями в указанном смысле.

Однако, это не значит, что таких функций, отличных от константы, нет. Проекторы $P_i(q) = q_0 + iq_1$, $P_j(q) = q_0 + jq_2$, $P_k(q) = q_0 + kq_3$, где $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ — кватернион, $i,\ \ j,\ \ k$ — мнимые единицы, являются голоморфными по Фютеру. Ясно, что их линейная комбинация (с действительными коэффициентами) $f(q) = (a_1 + a_2 + a_3)q_0 + ia_1q_1 + ja_2q_2 + ka_3q_3$ также будет голоморфной функцией.

Рассмотрим наиболее общий вид голоморфного линейного преобразования. Пусть

$$f = f_0 + if_1 + jf_2 + kf_3,$$

где $f_n\ \ (n = 0, 1, 2, 3)$ — вещественные функции вещественных переменных $q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3$. Условие голоморфности по Фютеру $\frac{\partial f}{\partial \bar{q}} = 0$ для леворегулярных функций равносильно одновременному выполнению следующих четырех равенств:

$$\frac{\partial f_0}{\partial q_0} - \frac{\partial f_1}{\partial q_1} - \frac{\partial f_2}{\partial q_2} - \frac{\partial f_3}{\partial q_3} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial q_1} + \frac{\partial f_1}{\partial q_0} + \frac{\partial f_3}{\partial q_2} - \frac{\partial f_2}{\partial q_3} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial q_2} + \frac{\partial f_2}{\partial q_0} + \frac{\partial f_1}{\partial q_3} - \frac{\partial f_3}{\partial q_1} = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial q_3} + \frac{\partial f_3}{\partial q_0} + \frac{\partial f_2}{\partial q_1} - \frac{\partial f_1}{\partial q_2} = 0 \tag{12}$$

Если $f(q) = A\vec{q}$, где $A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, тогда

$f_0 = a_{00}q_0 + a_{01}q_1 + a_{02}q_2 + a_{03}q_3$,

$f_1 = a_{10}q_0 + a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + a_{13}q_3,$
$f_2 = a_{20}q_0 + a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + a_{23}q_3,$
$f_3 = a_{30}q_0 + a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + a_{33}q_3$ и из (9) – (12) получаем:

$$a_{00} = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \tag{13}$$

$$a_{01} = -a_{10} - a_{32} + a_{23}, \tag{14}$$

$$a_{02} = -a_{20} - a_{13} + a_{31}, \tag{15}$$

$$a_{03} = -a_{30} - a_{21} + a_{12}. \tag{16}$$

Пример. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, значит
$f(q) = 3q_0 - q_1 - q_2 - q_3 + i(q_0 + q_1 + q_2 + q_3) + j(q_0 + q_1 + q_2 + q_3) + k(q_0 + q_1 + q_2 + q_3).$

Заметим, что умножение функции на нескалярную константу может вывести ее из множества голоморфных функций. Например, пусть $f(q) = 3q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$, тогда
$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ очевидно удовлетворяет условиям (13)-(16), но
$\varphi(q) = i \circ f(q) = -q_1 + i3q_0 - jq_3 + kq_2$, этой функции соответствует матрица
$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, которая не удовлетворяет условию (14). Однако, если рассмотреть $f(q) \circ i$, то голоморфность не нарушится, и это не случайно.

Докажем, что если f — левоголоморфная функция, то $g = f \circ i$ — тоже левоголоморфная. Действительно, если $f = f_0 + f_1 i + f_2 j + f_3 k$, то $g = -f_1 + f_0 i + f_3 j - f_2 k$, отсюда $g_0 = -f_1, \quad g_1 = f_0, \quad g_2 = f_3, \quad g_3 = -f_2$, тогда $\frac{\partial g_0}{\partial q_0} - \frac{\partial g_1}{\partial q_1} - \frac{\partial g_2}{\partial q_2} - \frac{\partial g_3}{\partial q_3} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_0} - \frac{\partial f_0}{\partial q_1} - \frac{\partial f_3}{\partial q_2} + \frac{\partial f_2}{\partial q_3} = 0$ в силу (10), то есть условие (9) для g выполнено.

Далее, $\frac{\partial g_0}{\partial q_1} + \frac{\partial g_1}{\partial q_0} + \frac{\partial g_3}{\partial q_2} - \frac{\partial g_2}{\partial q_3} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_0}{\partial q_0} - \frac{\partial f_2}{\partial q_2} - \frac{\partial f_3}{\partial q_3} = 0$ по условию (9) для f, значит для g выполнено условие (10). Так как $\frac{\partial g_0}{\partial q_2} + \frac{\partial g_2}{\partial q_0} + \frac{\partial g_1}{\partial q_3} - \frac{\partial g_3}{\partial q_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_0} + \frac{\partial f_0}{\partial q_3} + \frac{\partial f_2}{\partial q_1} = 0$ в силу (12), то для g выполнено условие (11). Наконец, $\frac{\partial g_0}{\partial q_3} + \frac{\partial g_3}{\partial q_0} + \frac{\partial g_2}{\partial q_1} - \frac{\partial g_1}{\partial q_2} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_3} - \frac{\partial f_2}{\partial q_0} + \frac{\partial f_3}{\partial q_1} - \frac{\partial f_0}{\partial q_2} = 0$ по условию (11) для f, следовательно для g выполнено условие (12). Так как условия (9)-(12) для g выполнены, значит g голоморфна.

Докажем, что если f — голоморфная функция, то $g = f \circ j$ — тоже голоморфная.

Действительно, если $f = f_0 + f_1 i + f_2 j + f_3 k$, то $g = -f_2 - f_3 i + f_0 j + f_1 k$, отсюда $g_0 = -f_2, \quad g_1 = -f_3, \quad g_2 = f_0, \quad g_3 = f_1$, тогда

$$\frac{\partial g_0}{\partial q_0} - \frac{\partial g_1}{\partial q_1} - \frac{\partial g_2}{\partial q_2} - \frac{\partial g_3}{\partial q_3} = -\frac{\partial f_2}{\partial q_0} + \frac{\partial f_3}{\partial q_1} - \frac{\partial f_0}{\partial q_2} - \frac{\partial f_1}{\partial q_3} = 0$$

в силу (11), то есть условие (9) для g
выполнено.

Далее, $\frac{\partial g_0}{\partial q_1} + \frac{\partial g_1}{\partial q_0} + \frac{\partial g_3}{\partial q_2} - \frac{\partial g_2}{\partial q_3} = -\frac{\partial f_2}{\partial q_1} - \frac{\partial f_3}{\partial q_0} + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} - \frac{\partial f_0}{\partial q_3} = 0$ по условию (12) для f, значит для g выполнено условие (10).

Так как $\frac{\partial g_0}{\partial q_2} + \frac{\partial g_2}{\partial q_0} + \frac{\partial g_1}{\partial q_3} - \frac{\partial g_3}{\partial q_1} = -\frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \frac{\partial f_0}{\partial q_0} - \frac{\partial f_3}{\partial q_3} - \frac{\partial f_1}{\partial q_1} = 0$ в силу (9), то для g выполнено условие (11).

Наконец, $\frac{\partial g_0}{\partial q_3}+\frac{\partial g_3}{\partial q_0}+\frac{\partial g_2}{\partial q_1}-\frac{\partial g_1}{\partial q_2}=-\frac{\partial f_2}{\partial q_3}+\frac{\partial f_1}{\partial q_0}+\frac{\partial f_0}{\partial q_1}+\frac{\partial f_3}{\partial q_2}=0$ по условию (10) для f, следовательно для g выполнено условие (12). Так как условия (9)-(12) для g выполнены, значит g голоморфна.

Аналогично доказывается, что если f — голоморфная функция, то $g=f\circ k$ — тоже голоморфная Таким образом, линейная комбинация леворегулярных функций с кватернионными константами при умножении справа на эти константы остается леворегулярной.

Еще один простой пример регулярной функции дает следующая конструкция. Пусть

$$F_1(z)=u_1(x,y)+iv_1(x,y),$$

$$F_2(z)=u_2(x,y)+iv_2(x,y),$$

$$F_3(z)=u_3(x,y)+iv_3(x,y)-$$

голоморфные функции комплексной переменной.

Положим $f_0=u_1(q_0,q_1)+u_2(q_0,q_2)+u_3(q_0,q_3)$, $f_1=v_1(q_0,q_1)$, $f_2=v_2(q_0,q_2)$, $f_3=v_3(q_0,q_3)$, тогда условие (9) равносильно равенству $\frac{\partial u_1}{\partial q_0}+\frac{\partial u_2}{\partial q_0}+\frac{\partial u_3}{\partial q_0}-\frac{\partial v_1}{\partial q_1}-\frac{\partial v_2}{\partial q_2}-\frac{\partial v_3}{\partial q_3}=0$, которое справедливо в силу условий Коши-Римана. Условие (10) равносильно равенству $\frac{\partial u_1}{\partial q_1}+\frac{\partial u_2}{\partial q_1}+\frac{\partial u_3}{\partial q_1}+\frac{\partial v_1}{\partial q_0}-\frac{\partial v_2}{\partial q_3}+\frac{\partial v_3}{\partial q_2}=0$, которое верно по причине того, что для u_1, v_1 выполняются условия Коши-Римана, u_2, u_3 не зависят от q_1, функция v_2 не зависит от q_3, а v_3 не зависит от q_2. Выполнение условий (11)-(12) проверяется аналогично, следовательно $f(q)=f_0+f_1i+f_2j+f_3k$ – голоморфная функция кватернионной переменной.

3. Дифференцирование по Куллену.

Несколько иной способ дифференцирования и определения голоморфных функций предлагается в работе G. Gentili и D. C. Struppa [4].

Для всякого нескалярного кватерниона q рассматривается двумерное линейное подпространство $L_{\bar{v}_0(q)}$, являющееся линейной оболочкой вещественной оси и вектора $\bar{v}_0(q)$ – единичного направляющего вектора векторной части кватерниона q, который представляется в виде: $q=x+y\cdot\bar{v}_0(q)$ (очевидно, $x=q_0=|q|\cos\varphi$, $y=|q|\sin\varphi$, где $\varphi=\arg q$) и функция $f(q)$ называется C-регулярной, если она вещественно дифференцируема и удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\bar{v}_0(q)\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x+y\cdot\bar{v}_0(q))=0 \tag{17}$$

для всех q из области определения f , при этом дается следующее определение производной по направлению $\bar{v}_0(q)=\bar{e}$ [4] со ссылкой на Куллена [3].

Определение. Пусть Ω — область в $\boldsymbol{H}$, на которой определена вещественно дифференцируемая функция f. Для любого кватерниона $q\in\Omega$, $q=x+y\bar{e}$, где $x=q_0=Req$, $\bar{e}=\bar{v}_0(q)$ – единичный направляющий вектор векторной части q, производная f по направлению $\bar{e}$ в точке q задается формулой

$$\partial_{\bar{e}}f(x+y\bar{e})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\bar{e}\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x+y\bar{e}). \tag{18}$$

Если при этом f C-регулярна, то ее производная в точке q может быть вычислена по формуле

$$\partial_!(f)(q)=\begin{cases}\partial_{\bar{e}}(f)(q), & \text{если}\quad q=x+y\bar{e}\quad\text{при}\quad y\neq 0\\ \frac{\partial f}{\partial x}(x), & \text{если}\quad q=x\quad (y=0)\end{cases} \tag{19}$$

Данное определение замечательно тем, что все степенные функции и ряды с центром в нуле вида $\sum_{n=0}^{\infty}q^n\circ\lambda_n$ будут C-регулярны, их производные будут такими же как и в случае комплексной переменной. Это значит, что мы можем определить все элементарные функции в области кватернионов и что все голоморфные функции комплексной переменной переносятся в область кватернионов и при этом остаются голоморфными, то есть С-регулярными.

Для С-регулярных функций доказываются также аналоги теорем Коши, Морера, Шварца, а также Миттаг-Лефлера [16]

Однако, этот способ дифференцирования тоже имеет ряд проблем. Ясно, что, если $q \in L_{\bar{v}_0(q)}$ и $f(q) \in L_{\bar{v}_0(q)}$, то регулярность *f(q)* — это регулярность функции комплексного переменного. Но, если $f(q) \notin L_{\bar{v}_0(q)}$, то самые простые функции оказываются нерегулярными, что показывает следующий пример.

Пусть $f(q) = \bar{i} \circ q, q = x + y\bar{e}$, $\bar{i}$ – мнимая единица, $\bar{e} = \bar{v}_0(q)$ — единичный вектор в направлении векторной части q. Для проверки регулярности по формуле (17) необходимо вычислить $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \bar{e}\frac{\partial}{\partial y}\right)(\bar{i}x + \bar{i} \circ \bar{e}y) = \bar{i} + \bar{e} \circ \bar{i} \circ \bar{e} \neq 0$, если $\bar{i} \neq \bar{e}$. Следовательно, $f(q)$ не является регулярной.

Рассмотренное определение дифференцируемости имеет то важное достоинство, что включает в себя все регулярные функции комплексного переменного, но, все-таки, стоит заметить, дифференцирование идет далеко не по всем направлениям, выходящим из данной точки, а только по тем, у которых векторные части коллинеарны векторной части рассматриваемой точки.

4. Еще один способ дифференцирования

Далее предлагается еще один вариант дифференцирования кватернионных функций кватернионной переменной.

Определение. Пусть $f(q)$ определена на открытом множестве Ω в $\boldsymbol{H}$. Назовем $f(q)$ элементарно дифференцируемой, если существует $\lim\limits_{(|h|\to 0)\&(\arg h \to 0)} (f(q+h) - f(q)) \circ h^{-1}$, который мы и назовем производной $f(q)$ и будем обозначать, как обычно $f'(q)$.

Здесь производная тоже берется не по всем направлениям, а только по тем, которые близки к действительной оси. Действительно, так как $\arg(q) = \arccos\left(\frac{q_0}{|q|}\right)$, но при этом $|q| \to 0$, то это означает, что $|\bar{v}(q)| \to 0$ быстрее, чем q_0, то есть $\frac{|\bar{v}(q)|}{q_0} \to 0$.

Если не требовать, чтобы $\arg h \to 0$, то уже для $f(q) = q^2 = q \circ q$ получится $((q+h)^2 - q^2) \circ h^{-1} = q \circ h \circ h^{-1} + h \circ q \circ h^{-1} + h \circ h \circ h^{-1} = q + h \circ q \circ h^{-1} + h$ и при $h \to 0$ слагаемое $h \circ q \circ h^{-1}$ не имеет предела (если $\bar{v}(q)$ и $\bar{v}(h)$ не коллинеарны), так как это поворот кватерниона q на угол $2\arg h$ и результат не зависит от $|h|$ [5,14,15].

Из определения получаем следующие теоремы.

Теорема 1. Если функции $f(q)$ и $g(q)$ элементарно дифференцируемы, то для любых кватернионов α и β функция $\alpha \circ f(q) + \beta \circ g(q)$ будет также элементарно дифференцируема и

$$(\alpha \circ f(q) + \beta \circ g(q))' = \alpha \circ f'(q) + \beta \circ g'(q).$$

Теорема 2. Если функции $f(q)$ и $g(q)$ элементарно дифференцируемы, то функция $p(q) = f(q) \circ g(q)$ также элементарно дифференцируема и

$$(f(q) \circ g(q))' = f(q) \circ g'(q) + f'(q) \circ g(q).$$

Доказательство. Рассмотрим

$$(p(q+h) - p(q)) \circ h^{-1} = (f(q+h) \circ g(q+h) - f(q) \circ g(q)) \circ h^{-1} =$$
$$= f(q+h) \circ (g(q+h) - g(q)) \circ h^{-1} + (f(q+h) - f(q)) \circ h^{-1} \circ (h \circ g(q) \circ h^{-1}).$$

Так как $f(q)$ дифференцируема, то существует $\lim\limits_{(|h|\to 0)\&(\arg h\to 0)} f(q+h)=f(q))$. Выражение $h\circ g(q))\circ h^{-1}$ – это поворот кватерниона $g(q)$ вокруг оси с направляющим вектором $\bar{v}(h)$ на угол $2\cdot\arg h$, но $\arg h\to 0$, следовательно $\lim\limits_{(|h|\to 0)\&(\arg h\to 0)} h\circ g(q))\circ h^{-1}=g(q)$, отсюда $p'(q)=\lim\limits_{(|h|\to 0)\&(\arg h\to 0)}(p(q+h)-p(q))\circ h^{-1}==f(q)\circ g'(q)+f'(q)\circ g(q)$, что и требовалось доказать.

Терема 3. Пусть $g(q)\neq 0$ и $g(q)$ –элементарно дифференцируемая функция. Тогда $g^{-1}(q)$ также элементарно дифференцируема и $(g^{-1}(q))'=-g^{-1}(q)\circ g'(q)\circ g^{-1}(q)$.

Доказательство. Так как $g^{-1}(q)=\frac{\tilde{g}(q)}{|g(q)|^2}=\frac{\tilde{g}(q)}{\tilde{g}(q)\circ g(q)}$, то

$$(g^{-1}(q+h)-g^{-1}(q))\circ h^{-1}=\left(\frac{\tilde{g}(q+h)}{\tilde{g}(q+h)\circ g(q+h)}-\frac{\tilde{g}(q)}{\tilde{g}(q)\circ g(q)}\right)\circ h^{-1}.$$

Далее, пользуясь тем, что $\tilde{g}(q)\circ g(q)=g(q)\circ\tilde{g}(q)$ – действительное число, получим

$$(g^{-1}(q+h)-g^{-1}(q))\circ h^{-1}=\frac{\tilde{g}(q+h)\circ g(q)\circ\tilde{g}(q)-\tilde{g}(q+h)\circ g(q+h)\circ\tilde{g}(q)}{\tilde{g}(q+h)\circ g(q+h)\circ g(q)\circ\tilde{g}(q)}\circ h^{-1}$$

Теперь, используя дистрибутивность и определение обратного кватерниона, выведем

$$\begin{gathered}(g^{-1}(q+h)-g^{-1}(q))\circ h^{-1}=\frac{\tilde{g}(q+h)\circ(g(q)-g(q+h))\circ\tilde{g}(q)}{\tilde{g}(q+h)\circ g(q+h)\circ g(q)\circ\tilde{g}(q)}\circ h^{-1}=\\ =(g(q+h))^{-1}\circ(-(g(q+h)-g(q))\circ h^{-1})\circ h\circ(g(q))^{-1}\circ h^{-1},\end{gathered}$$

отсюда

$$\begin{array}{l}(g^{-1}(q))'=\lim\limits_{(|h|\to 0)\&(\arg h\to 0)}((g(q+h))^{-1}\circ(-(g(q+h)-g(q))\circ h^{-1})\circ(h\circ(g(q))^{-1}\circ h^{-1}))=\\ =-g^{-1}(q)\circ g'(q)\circ g^{-1}(q)\end{array}.$$

Что и требовалось доказать.

Следствие. Если функции $f(q)$ и $g(q)$ элементарно дифференцируемы и $g(q)\neq 0$, то функция $f(q)\circ(g(q))^{-1}$ элементарно дифференцируема и ее производная $(f(q)\circ(g(q))^{-1})'=-f(q)\circ(g(q))^{-1}\circ g'(q)\circ(g(q))^{-1}+f'(q)\circ(g(q))^{-1}$.

Примеры. Пусть $f(q)=q$, тогда $f'(q)=\lim\limits_{(|h|\to 0)\&(\arg h\to 0)}(q+h-q)\circ h^{-1}=1$.

Утверждение. Производная $(q^n)'=nq^{n-1}$.

Доказательство. Докажем это по индукции. Сначала для n=2. По теореме о дифференцирования произведения $(q^2)'=(q\circ q)'=q\circ 1+1\circ q=q+q=2q$. Теперь, пусть доказано, что $(q^{n-1})'=(n-1)q^{n-2}$, тогда $(q^n)'=(q^{n-1}\circ q)'=(n-1)q^{n-2}\circ q+q^{n-1}\circ 1=nq^{n-1}$, что и требовалось доказать.

Следствие. Многочлены кватернионной переменной элементарно дифференцируемы.

Заметим, что, если $f(q)$ дифференцируема в окрестности некоторой точки, то она дифференцируема по любой кривой, входящей в эту точку по касательной, параллельной вещественной координате, а, следовательно, и по прямой, параллельной вещественной координате, при этом $f'(q)=\frac{\partial f(q)}{\partial q_0}=\frac{\partial f_0}{\partial q_0}+\frac{\partial f_1}{\partial q_0}i+\frac{\partial f_2}{\partial q_0}j+\frac{\partial f_3}{\partial q_0}k$, где $f=f_0+if_1+jf_2+kf_3$. Это дает возможность восстановить $f(q)$ по ее производной на отрезке параллельном вещественной оси с помощью обычного определенного интеграла с переменным верхним пределом, если известно значение этой функции в какой-либо точке этого отрезка. Пусть q^* и q два кватерниона в области, в которой $f(q)$ дифференцируема и $\bar{v}(q)=\bar{v}(q^*)=iq_1+jq_2+kq_3$, тогда $f(q)=\int_{q_0^*}^{q_0}((f_0)'_{q_0}(t+\bar{v}(q))+i(f_1)'_{q_0}(t+\bar{v}(q))+j(f_2)'_{q_0}(t+\bar{v}(q))+k(f_3)'_{q_0}(t+\bar{v}(q)))dt+$

$$+f(q^*)=\int_{q_0^*}^{q_0}((f_0)'_{q_0}(t+\bar{v}(q))dt+i\int_{q_0^*}^{q_0}(f_1)'_{q_0}(t+\bar{v}(q))dt+j\int_{q_0^*}^{q_0}(f_2)'_{q_0}(t+\bar{v}(q))dt+$$

$+k\int_{q_0^*}^{q_0}(f_3)'_{q_0}(t+\bar{v}(q)))dt+f(q^*)$ Здесь $(f_n)'{}_{q_0}(t+\bar{v}(q))$, $n=0,1,2,3$ – вещественная функция вещественной переменной.

Определение. Функция $f(q)$называется элементарно и непрерывно дифференцируемой, если она элементарно дифференцируема и ее производная $f'(q)$ непрерывна.

Определение. Пусть последовательность элементарно и непрерывно дифференцируемых функций $\{(f(q))_n\}$ в некоторой окрестности точки q^0 равномерно сходится к $f(q)$, а последовательность производных $\{(f'(q))_n\}$ в той же окрестности равномерно сходится к $g(q)$. Тогда $f(q)$ называется дифференцируемой и $f'(q)=g(q)$.

Для доказательства корректности определения нам понадобится лемма.

Лемма. Пусть последовательность элементарно дифференцируемых функций $\{(f(q))_n\}$ в некоторой окрестности точки q^0 равномерно сходится к $f(q)$, а последовательность производных $\{(f'(q))_n\}$ в той же окрестности равномерно сходится к
$\varphi(q)=\varphi_0(q)+i\varphi_1(q)+j\varphi_2(q)+k\varphi_3(q)$. Тогда $f(q)=\int_{q_0^0}^{q_0}\varphi(t+iq_1^0+jq_2^0+kq_3^0)dt+f(q^0)$, где $q=q_0+iq_1^0+jq_2^0+kq_3^0$, $q^0=q_0^0+iq_1^0+jq_2^0+kq_3^0$.

Доказательство. Используя для краткости обозначение $\bar{v}(q)=q_1i+q_2j+q_3k$, получим $|f(q)-\int_{q_0^0}^{q_0}\varphi(t+\bar{v}(q^0))dt-f(q^0)|=|f(q)-(f(q))_n+(f(q))_n-\int_{q_0^0}^{q_0}\varphi(t+\bar{v}(q^0))dt-f(q^0)|=$

$$=|f(q)-(f(q))_n+\int_{q_0^0}^{q_0}(f'(t+\bar{v}(q^0))_n dt+(f(q^0))_n-\int_{q_0^0}^{q_0}\varphi(t+\bar{v}(q^0))dt-f(q^0)|\leqslant$$

$$\leqslant|f(q)-(f(q))_n|+|\int_{q_0^0}^{q_0}((f'(t+\bar{v}(q^0))_n-\varphi(t+\bar{v}(q^0)))dt|+|(f(q^0))_n-f(q^0)|\leqslant$$

$\leqslant|f(q)-(f(q))_n|+\int_{q_0^0}^{q_0}|((f'(t+\bar{v}(q^0))_n-\varphi(t+\bar{v}(q^0)))|dt+|(f(q^0))_n-f(q^0)|$. В силу равномерной сходимости для всякого $\varepsilon>0$ найдется N такое, что при $n>N$
$|f(q)-(f(q))_n|<\frac{\varepsilon}{3}$, $|(f(q^0))_n-f(q^0)|<\frac{\varepsilon}{3}$ и $|(f'(t+\bar{v}(q^0))_n-\varphi(t+\bar{v}(q^0))|<\frac{\varepsilon}{3}$, а следовательно $|f(q)-\int_{q_0^0}^{q_0}\varphi(t+\bar{v}(q^0))dt|<\frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}|q_0-q_0^0|$, то есть при фиксированных q_0 и q_0^0 эту разность можно сделать сколь угодно малой, значит $f(q)=\int_{q_0^0}^{q_0}\varphi(t+\bar{v}(q^0))dt$, что и требовалось доказать.

Теперь докажем корректность определения.

Теорема. Пусть последовательность элементарно и непрерывно дифференцируемых функций $\{(f(q))_n\}$ в некоторой окрестности точки q^0 равномерно сходится к $f(q)$, последовательность производных $\{(f'(q))_n\}$ в той же окрестности равномерно сходится к некоторой функции, которую мы обозначим$f'(q)$. Кроме того, последовательность элементарно и непрерывно дифференцируемых функций $\{(g(q))_n\}$ в той же окрестности равномерно сходится к $f(q)$, а последовательность производных $\{(g'(q))_n\}$ в той же окрестности равномерно сходится к некоторой функции$g'(q)$. Тогда $f'(q)=g'(q)$.

Доказательство. Так как функции элементарно дифференцируемы и равномерно сходятся в окрестности, то фиксируем некоторую точку этой окрестности $q^0=q_0^0+iq_1^0+jq_2^0+kq_3^0$, для нее найдется отрезок, параллельный вещественной оси, проходящий через эту точку и целиком лежащий в этой окрестности. Пусть точка $q=q_0+iq_1^0+jq_2^0+kq_3^0$ – второй конец этого отрезка, тогда по лемме $f(q)=\int_{q_0^0}^{q_0}f'(t+iq_1^0+jq_2^0+kq_3^0)dt+f(q^0)$ и $f(q)=\int_{q_0^0}^{q_0}g'(t+iq_1^0+jq_2^0+kq_3^0)dt+f(q^0)$. Так как точку q мы можем двигать вдоль отрезка и подынтегральные функции непрерывны как функции вещественной переменной t, то из этого равенства получаем $f'(q)=g'(q)$, что и требовалось.

5. Дифференциальные уравнения.

Теперь мы можем рассматривать расширения элементарных функций на область кватернионов с помощью рядов:

$$e^q=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{n!},\quad \sin q=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \cos q=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{2n}}{(2n)!}.$$

Очевидно, $(e^q)'=e^q$, а вот $(e^{\lambda\circ q})'=\lambda\circ e^{\lambda\circ q}$ только для $\lambda\in\mathrm{R}$, если, как обычно, определить $e^{\lambda\circ q}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda\circ q)^n}{n!}$. Определим новую экспоненту $nex(\lambda,q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n\circ q^n}{n!}$, тогда $(nex(\lambda,q))'_q=\lambda\circ nex(\lambda,q)$ для произвольного фиксированного кватерниона λ, что позволит решать дифференциальное уравнение

$$f'(q)=\lambda\circ f(q).$$

Так как $nex(q,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n\circ\lambda^n}{n!}$, то $(nex(q,\lambda))'_q=nex(q,\lambda)\circ\lambda$, а значит $nex(q,\lambda)$ будет решением уравнения

$$f'(q)=f(q)\circ\lambda$$

Аналогично определим новый синус и косинус тригонометрический и новый синус и косинус гиперболический:

$$nst(\lambda,q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2n+1}\circ(-1)^n q^{2n+1}}{(2n+1)!},\ nst(q,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{2n+1}\circ\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$nct(\lambda,q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\lambda^{2n}\circ q^{2n}}{(2n)!},\ nct(q,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{2n}\circ\lambda^{2n}}{(2n)!},$$

$$nsh(\lambda,q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2n+1}\circ q^{2n+1}}{(2n+1)!},\ nch(\lambda,q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2n}\circ q^{2n}}{(2n)!}$$

тогда для производных тригонометрических функций справедливы равенства:

$$(nst(\lambda,q))'_q=\lambda\circ nct(\lambda,q),\ (nst(q,\lambda))'_q=nct(q,\lambda)\circ\lambda,$$

$$(nct(\lambda,q))'_q=-\lambda\circ nst(\lambda,q),\ (nct(q,\lambda))'_q=-nst(q,\lambda)\circ\lambda.$$

Для гиперболических аналогично:

$$(nsh(\lambda,q))'_q=\lambda\circ nch(\lambda,q),\ (nsh(q,\lambda))'_q=nch(q,\lambda)\circ\lambda,$$

$$(nch(\lambda,q))'_q=\lambda\circ nsh(\lambda,q),\ (nch(q,\lambda))'_q=nsh(q,\lambda)\circ\lambda.$$

Для решения дифференциальных уравнений с постоянными кватернионными коэффициентами нам достаточно функции *nex*. Рассмотрим некоторые примеры.
Пусть дано дифференциальное уравнение

$$f''(q)+pf'(q)+r=0 \tag{20}$$

со скалярными, то есть действительными коэффициентами: $p,r\in\mathrm{R}$. Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2+p\lambda+r=0. \tag{21}$$

Будем искать корни этого уравнения среди кватернионов. Пусть $\lambda_{(1)} = \lambda_{(1)0} + \bar{v}(\lambda_{(1)})$ – один из его корней. Тогда $(\lambda_{(1)0} + \bar{v}(\lambda_{(1)}))^2 + p(\lambda_{(1)0} + \bar{v}(\lambda_{(1)})) + r = 0$, следовательно, $\lambda^2_{(1)0} - |\bar{v}(\lambda_{(1)})|^2 + p\lambda_{(1)0} + r + (2\lambda_{(1)0} + p)\bar{v}(\lambda_{(1)})) = 0$,
что равносильно одновременному выполнению двух равенств:

$$\lambda^2_{(1)0} - |\bar{v}(\lambda_{(1)})|^2 + p\lambda_{(1)0} + r = 0 \tag{22}$$

$$(2\lambda_{(1)0} + p)\bar{v}(\lambda_{(1)}) = 0 \tag{23}$$

Если $v(\lambda_{(1)}) \neq 0$, то $\lambda_{(1)0} = -\frac{p}{2}$, подставим это значение в (22) и получим
$\frac{p^2}{4} - |\bar{v}(\lambda_{(1)})|^2 - \frac{p^2}{2} + r = 0$ или $|\bar{v}(\lambda_{(1)})|^2 = -\frac{p^2}{4} + r = -\frac{D}{4}$, где D – дискриминант уравнения (21). Если $D < 0$, то любое

$$\lambda_e = -\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{|D|}e, \tag{24}$$

является корнем уравнения (21), где e – произвольный единичный вектор трехмерного пространства. Если $D > 0$, то $|\bar{v}(\lambda_{(1)})|^2 < 0$, что невозможно, значит $v(\lambda_{(1)}) = 0$, так же, как и при $D = 0$, следовательно, при $D \geqslant 0$уравнение (21) имеет только 2 обычных действительных корня. Таким образом, доказано следующее.

Утверждение. Квадратное уравнение (21) с действительными коэффициентами в области кватернионов при неотрицательном дискриминанте имеет только 2 обычных действительных корня. При отрицательном дискриминанте оно имеет бесконечно много корней вида (24). Следствием этого утверждения является то, что дифференциальное уравнение (20) имеет либо 2 линейно независимых решения при неотрицательном дискриминанте, либо бесконечно много линейно независимых решений вида: $f = nex(\lambda_e, q)$, где λ_e – константа, вычисляемая по формуле (24).

Квадратное уравнение (21) может иметь и кватернионные коэффициенты. В этом случае еще более разнообразны результаты: оно может вообще не иметь решений. Достаточно полно этот вопрос рассмотрен в [17], хотя там несколько другого типа квадратные уравнения.

6. Заключение

Таким образом, для нового определения дифференцируемости доказаны классические теоремы о производной суммы, производной произведения, что позволило перейти к производным многочленов и рядов.

С помощью рядов были определены продолжения элементарных функций на множестве кватернионов.

Полученные результаты позволили найти решения некоторых дифференциальных уравнений с постоянными кватернионными коэффициентами. Решения этих дифференциальных уравнений связаны с решением характеристических уравнений, которые являются алгебраическими уравнениями. Здесь было замечено, что ситуация резко отличается от случая уравнений с действительными или комплексными коэффициентами, так как даже со скалярными коэффициентами уравнение может иметь только 2 корня, а может иметь бесконечно много корней во множестве кватернионов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fueter R. Zur Theorie der regularen Funktionen einer Quaternionenvariablen // Monatshefte f. Math. & Phis., 1932, vol. 43, p. 69–84.

2. Fueter R. Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reelen Variablen // Comment. Math. Helv. 1934, vol. 7, p. 307–330.

3. Cullen C. G. An integral theorem for analytic intrinsic function on quaternions // Duke Math. J. 1965, 32, p. 139–148.

4. Gentili G., Struppa D. C. A new theory of regular functions of a quaternionic variable // Advances in Mathematics, 2007, 216, p. 279–301.

5. Бранец А. В., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.

6. Амелькин Н. И. Кинематика и динамика твердого тела. М.: МФТИ, 2000. 65 с.

7. Журавлев В. Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2001. 320 с.

8. Шамаров Н. Н. Применение нестандартных числовых систем в математической физике // Современная математика. Фундаментальные направления. М.: Изд-во РУДН, 2007. Т. 23. С. 182–194.

9. Ефремов А. П. Исследование кватернионных пространств и их взаимосвязи с системами отсчета и физическими полями. М.: Изд-во РУДН, 2005. 274 с.

10. Yefremov A. P., Relativistic Oscilator in Quaternion Relativity // Quantization in Astrophysics, Brounian Motion, and Supersymmetry, Chennai Ed., 2007, p. 440–457.

11. Ефремов А. П. Предгеометрическая структура ассоциативных алгебр и кватернионные пространства как среда обитания физических законов // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2014. № 1. С. 5–19.

12. Kravchenko V. G., Kravchenko V. V. On some nonlinear equations, generated by Fueter type operators // Zeitschrift fur Analysys und ihre Anwendungen, 1994, vol. 13, no. 4, p. 599–602.

13. Kravchenko V. V., Shapiro M. V. Integral Representation for Spatial Models of Mathematical Physics // Pitman Res. Notes Math., 1996, vol. 351, Longman, Harlow, 247 pp.

14. Полякова Н. С., Дерябина Г. С. Кватернионы и их применение. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. 56 с.

15. Полякова Н. С., Дерябина Г. С. Гиперкомплексные числа. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. 72 с.

16. Gentili G., Sarfatti G. The Mittag-Leffler Theorem for regular functions of a quaternionic variable // New York Journal of Mathematics, 2017, v. 23, p. 583–592.

17. Farouki R. T., Gentili G., Giannelli C., Sestini A., Stoppato C. Solution of a quadratic quaternion equation with mixed coefficients // J. of Symbolic Computation, 2016, vol. 74, p. 140–151.

REFERENCES

1. Fueter R. 1932, “Zur Theorie der regularen Funktionen einer Quaternionenvariablen” , *Monatshefte f. Math. & Phis.*, vol. 43, p. 69–84.

2. Fueter R. 1934, “Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reelen Variablen” , *Comment. Math. Helv.* 7, p. 307–330.

3. Cullen C. G. 1965, “An integral theorem for analytic intrinsic function on quaternions” , *Duke Math. J.* 32, p. 139–148.

4. Gentili G., Struppa D. C. 2007, “A new theory of regular functions of a quaternionic variable” . *Advances in Mathematics,* 216, p. 279–301.

5. Branets A. V., Shmiglevsky I. P. 1973, “Primenenie quaternionov v zadachah orientatsiy tverdogo tela [The application of quaternions in problems of orientation a solid body]”. M.: Nauka, 320 pp.

6. Amelkin N. I. 2000, “Kinematika i dinamika tverdogo tela [Kinematics and dynamics of a solid body]” , MFTI, Moscow, 65 pp.

7. Zhuravlev V. F. 2001, “Osnovi teoreticheskoy mekhaniki [Fundamentals of theoretical mechanics]” , Fismatlit, Moscow, 320 pp.

8. Shamarov N. N. 2007, “Primenenie nestandartnikh chislovikh system v matematicheskoy fisike [Application of non-standard numerical systems in mathematical physics]” , Sovremennaya matematica. Fundamentalnie napravleniya. RUDN, Moscow, vol. 23, p. 182–194.

9. Yefremov A. P. 2005, “Issledovanie kvaternionnikh prostranstv i ikh vzaimosvyasi s systemami otscheta i fisicheskimi polyami [Study of quaternion spaces and their relationship with reference systems and physical fields]” , RUDN, Moscow, 274 pp.

10. Yefremov A. P. 2007, “Relativistic Oscilator in Quaternion Relativity” , Quantization in Astrophysics, Brounian Motion, and Supersymmetry, Chennai Ed., p. 440-457.

11. Yefremov A. P. 2014, “Predgeometricheskaya struktura assotsiativnikh algebr i kvaternionniye prostranstva kak sreda obitaniya fisicheskikh sakonov [Predgeometric structure of associative algebras and quaternion spaces as a habitat of physical laws]” , Prostranstvo, vrema i fundamentalnye vzaimodejstvia, no. 1, p. 5–19.

12. Kravchenko V. G., Kravchenko V. V., 1994, “On some nonlinear equations, generated by Fueter type operators” . *Zeitschrift fur Analysys und ihre Anwendungen,* vol. 13, no. 4, p. 599–602.

13. Kravchenko V. V., Shapiro M. V., 1996, “Integral Representation for Spatial Models of Mathematical Physics” , *Pitman Res. Notes Math.*, vol. 351, Longman, Harlow, 247 pp.

14. Polyakova N. S., Deryabina G. S. 2003, “Kvaternioni i ikh primenenie [Quaternions and their applications]” , MGTU, Moscow, 56 pp.

15. Polyakova N. S., Deryabina G. S. 2017, “Giperkompleksnye chisla [Hypercomplex numbers]” , MGTU, Moscow, 72 pp.

16. Gentili G., Sarfatti G. 2017, “The Mittag-Leffler Theorem for regular functions of a quaternionic variable” New York Journal of Mathematics, 2017, v. 23, p. 583–592.

17. Farouki R. T., Gentili G., Giannelli C., Sestini A., Stoppato C., 2016, “Solution of a quadratic quaternion equation with mixed coefficients” *, J. of Symbolic Computation,* vol. 74, p. 140–151.

Получено 24.10.2018 г.
Принято в печать 12.07.2019 г.