ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-284-297

О почти локально разрешимых алгебрах Ли с нулевым радикалом Джекобсона и локально нильпотентном радикале для алгебр Ли

О. А. Пихтилькова, Е. В. Мещерина, А. А. Горелик

Пихтилькова Ольга Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой алгебры и дискретной математики, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).
e-mail: opikhtilkova@mail.ru
Мещерина Елена Владимировна — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры алгебры и дискретной математики, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).
e-mail: elena_lipilina@mail.ru
Горелик Анна Александровна — старший преподаватель кафедры геометрии и компьютерных наук, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).
e-mail: anna_gmn3@rambler.ru

Аннотация

В статье доказывается аналог теоремы Ф. Кубо [1] для почти локально разрешимых алгебр Ли с нулевым радикалом Джекобсона. Первый раздел направлен на выяснение некоторых аспектов гомологического описания радикала Джекобсона. Доказана теорема, обобщающая теорему Е. Маршалла на случай почти локально разрешимых алгебр Ли, следствием которой и является аналог теоремы Кубо. Во втором разделе исследуются некоторые свойства локально нильпотентного радикала алгебры Ли. Рассматриваются примитивные алгебры Ли. Приведены примеры, показывающие, что бесконечномерные коммутативные алгебры Ли являются примитивными над любыми полями; конечномерная абелева алгебра, размерности больше 1, над алгебраически замкнутым полем не является примитивной; пример неартиновой некоммутативной алгебры Ли являющейся примитивной. Показано, что для специальных алгебр Ли над полем характеристики нуль PI-неприводимо представленный радикал совпадает с локально нильпотентным. Приведен пример алгебры Ли, локально нильпотентный радикал которой не является ни локально нильпотентным, ни локально разрешимым. Даются достаточные условия примитивности алгебры Ли, приводятся примеры примитивных алгебр Ли и алгебры Ли не являющейся примитивной.

Ключевые слова: алгебра Ли, примитивная алгебра Ли, специальная алгебра Ли, неприводимое PI-представление, радикал Джекобсона, локально нильпотентный радикал, редуктивная алгебра Ли, почти локально разрешимая алгебра Ли.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
О. А. Пихтилькова, Е. В. Мещерина, А. А. Горелик. О почти локально разрешимых алгебрах Ли с нулевым радикалом Джекобсона и локально нильпотентном радикале для алгебр Ли // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 284–297.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 2.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-284-297

On almost locally solvable Lie algebras with null Jacobson radical of a locally nilpotent radical for Lie algebras

O. A. Pikhtilkova, E. V. Mescherina, A. A. Gorelik

Pikhtilkova Olga Alexandrovna — Candidate of Physics and Mathematics Sciences, docent, Head of department of algebra and discrete mathematics, Orenburg State University (Orenburg).
e-mail: opikhtilkova@mail.ru
Мещерина Елена Владимировна — Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Senior Lecturer, Department of Algebra and discrete mathematics, Orenburg State University (Orenburg).
e-mail: elena_lipilina@mail.ru
Горелик Анна Александровна — Senior Lecturer, Department of geometry and computer science, Orenburg State University (Orenburg).
e-mail: anna_gmn3@rambler.ru

Abstract

In paper proves an analogue of the theorem of F. Kubo [1] for almost locally solvable Lie algebras with zero Jacobson radical. The first section aims to clarify some aspects of the homological description of the Jacobson radical. We prove a theorem generalizing E. Marshall's theorem to the case of almost locally solvable Lie algebras, the consequence of which is an analogue of Kubo's theorem. In the second section, we investigate some properties of a locally nilpotent radical of a Lie algebra. Primitive Lie algebras are considered. Examples are given to show that infinite-dimensional commutative Lie algebras are primitive over any fields; finite-dimensional Abelian algebra, dimensions greater than 1, over an algebraically closed field is not primitive; an example of a non-Artin noncommutative Lie algebra being primitive. It is shown that for special Lie algebras over the characteristic field, the zero PI-irreducibly presented radical coincides with the locally nilpotent one. An example of a Lie algebra whose locally nilpotent radical is neither locally nilpotent nor locally solvable is given. Sufficient conditions for the primitiveness of a Lie algebra are given, examples of primitive Lie algebras and a non-primitive Lie algebra are given.

Keywords: Lie algebra, primitive Lie algebra, special Lie algebra, irreducible PI-representation, Jacobson radical, locally nilpotent radical, reductive Lie algebra, almost locally solvable Lie algebra.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
O. A. Pikhtilkova, E. V. Mescherina, A. A. Gorelik, 2019, "On almost locally solvable Lie algebras with null Jacobson radical of a locally nilpotent radical for Lie algebras", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 284–297.

1. Введение

На Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2008) Борис Исаакович Плоткин поставил вопрос о гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли.

Первый раздел направлен на выяснение некоторых аспектов гомологического описания радикала Джекобсона и локально нильпотентного радикала.Во вотором разделе исследуются некоторые свойства и примеры примитивных алгебр Ли и локально нильпотентного радикала специальных алгебр Ли.

2. Основной текст статьи

1. О почти локально разрешимых алгебрах Ли с нулевым радикалом Джекобсона

Радикалом конечномерной алгебры Ли называется наибольший разрешимый идеал [2].

Определение радикала Джекобсона было дано Е. Маршаллом и дополнено Ф. Кубо:

Назовем радикалом Джекобсона $J(L)$ алгебры Ли L пересечение максимальных идеалов и саму алгебру L, если их нет. [3]

В определении Е. Маршалла было только пересечение максимальных идеалов, фраза "сама алгебра L, если их нет" добавлена Ф.Кубо для бесконечномерных алгебр Ли [1].

Назовем нильпотентным радикалом $N(L)$ для конечномерной алгебры Ли L пересечение ядер ее неприводимых конечномерных представлений [2].

Отметим, что для конечномерной алгебры Ли над полем характеристики нуль нильпотентный радикал совпадает с радикалом Джекобсона [3].

Е. Маршалл доказал следующую теорему.

Теорема 1. *Если конечномерная алгебра Ли L над полем характеристики нуль имеет разложение Леви в прямую сумму $L = S \oplus \sigma(L)$, тогда радикал Джекобсона алгебры Ли L равен $J(L) = [L, \sigma(L)]$, где S – полупростая алгебра, а $\sigma(L)$ – разрешимый радикал L.*

В формулировке следующей теоремы важную роль играет понятие подидеала. Назовем подидеалом идеал идеала алгебры Ли.

Теорема 2. *([4]) Если алгебра Ли L порождена конечномерными локальными подидеалами L, тогда радикал Джекобсона алгебры Ли L равен $J(L) = [L, \sigma(L)]$, где $\sigma(L)$ – максимальный локально разрешимый идеал L.*

Свойства радикала Джекобсона для бесконечномерных алгебр Ли исследовал также Ф. Кубо [1].

Он показал, что результаты Е. Маршалла и Н. Камийя в общем случае неверны для бесконечномерных алгебр Ли даже в случае локально-конечных алгебр. Им были также изучены бесконечномерные алгебры Ли с нулевым радикалом Джекобсона.

Теорема 3. *([1]) Пусть L – локально-конечная алгебра Ли. Справедливо: $J(L) = 0$ тогда и только тогда , когда алгебра Ли L имеет разложение Леви $L = S \oplus Z(L)$, где $Z(L)$ – центр алгебры L, S – подалгебра L такая, что $J(S) = 0$.*

В 1963 г. В. Н. Латышев ввел новый класс алгебр Ли [5], которые он назвал специальными по аналогии с йордановыми алгебрами.

Скажем, что алгебра Ли L специальная или SPI-алгебра Ли, если существует ассоциативная PI-алгебра A такая, что L вложена в $A^{(-)}$ как алгебра Ли, где $A^{(-)}$ – алгебра Ли, заданная на A с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$.

Назовем присоединенной ассоциативной алгеброй $\mathrm{Ad}\, L$ ассоциативную алгебру, порожденную в алгебре $End(L)$ линейными преобразованиями $\{\mathrm{ad}\, x | x \in L\}$, где $\mathrm{ad}\, x(y) = [x, y], x, y \in L$.

Следующее определение, обобщающее определение В. Н. Латышева, было дано С. А. Пихтильковым [6].

Алгебра Ли L называется обобщенно специальной, если ее присоединенная алгебра Ad L является PI-алгеброй.

Свойство быть обобщенно специальной алгеброй сохранается при гоморфизмах в отличие от специальности [6], [7].

Назовем алгебру Ли L почти разрешимой (почти локально разрешимой), если в ней существует разрешимый (локально разрешимый) идеал R такой, что алгебра L/R – конечномерна.

Пусть R – идеал алгебры Ли L, G – подалгебра. Скажем, что L представима в виде полупрямого произведения $L = G \leftthreetimes R$, если:

1. $L = G + R$;
2. $G \cap R = 0$.

Пусть R – разрешимый (почти разрешимый) радикал алгебры Ли L, если он существует. Назовем полупростую конечномерную подалгебру G алгебры Ли L подалгеброй Леви, если L представима в виде полупрямого произведения $L = G \leftthreetimes R$.

Теорема 4. *(Леви [8]) Пусть L – конечномерная алгебра Ли над полем характеристики нуль с радикалом R. Тогда в L существует полупростая подалгебра G такая, что $L = G \leftthreetimes R$.*

Заметим, что подалгебра G является подалгеброй Леви.

Ю. А. Бахтурин доказал следующий аналог теоремы Леви.

Теорема 5. *([9, стр. 266–268]) Пусть L — конечно порожденная почти разрешимая специальная алгебра Ли над полем характеристики нуль. Тогда в L существует подалгебра Леви.*

Ю. А. Терехова следующим образом обобщила теорему Ю. А. Бахтурина.

Теорема 6. *([10]) Пусть L — специальная алгебра Ли над полем характеристики нуль, R – локально разрешимый радикал, фактор-алгебра L/R — конечномерна. Тогда в L существует полупростая конечномерная подалгебра G такая, что L представима в виде полупрямой суммы $L = G \leftthreetimes R$.*

Обобщим теорему Е. Маршалла на случай почти локально разрешимых алгебр Ли. Доказательство теоремы основано на идеях из [3].

Теорема 7. *Пусть L — почти локально разрешимая алгебра Ли над полем F характеристики нуль. Если алгебра Ли L имеет разложение Леви $L = S \oplus R$, где S — конечномерная подалгебра L такая, что $J(L) = 0$, а S — разрешимый радикал, то $J(L) = [L, R]$.*

Доказательство. Сделаем сначала очевидное замечание: радикал Джекобсона абелевой алгебры Ли равен нулю.

Следовательно, $J(L) \subset L^2$.

Пусть I — максимальный идеал алгебры L. Фактор алгебра L/I не содержит собственных идеалов, является простой или абелевой.

Если алгебра L/I — простая, то идеал I содержит R и представим в виде $I = M + R$, где M — максимальный идеал S. Мы пользуемся тем, что алгебра $S \cap R$ является разрешимой и, следовательно, $S \cap R = 0$.

Полупростая конечномерная алгебра S над полем характеристики нуль представима в виде суммы идеалов, являющихся простыми алгебрами Ли.

Следовательно, пересечение идеалов I таких, что фактор-алгебра L/I — простая, совпадает с R и $J(L) \subset R$.

Учитавая замечание, получили $J(L) \subset L^2 \cap R$.

Если фактор-алгебра L/I — абелева, то I содержит L^2 и пересечение всех таких идеалов содержит L^2.

Пересечение всех максимальных идеалов содержит $L^2 \cap R$.

Получаем включение $J(L) \supset L^2 \cap R$.

Следовательно, $J(L) = L^2 \cap R$.

Запишем один из коммутаторов алгебры L.

Пусть $l_i = s_i + r_i$, где $i = 1, 2$, $s_i \in S, r_i \in R$.

Тогда $[l_1, l_2] = [g_1, g_2] + [g_1, r_2] + [r_1, g_2] + [r_1, r_2]$.

Если $[l_1, l_2] \in R$, то $[g_1, g_2] = 0$.

Тогда $[l_1, l_2] = [g_1, r_2] - [g2_1, r_1] + [r_1, r_2]$.

Следует $L^2 \cap R \subset [L, R]$.

Включение $[L, R] \subset L^2 \cap R$ — очевидно.

Окончательно получили $J(L) = [L, R]$.

Докажем следствие, которое является аналогом теоремы Ф. Кубо.

Следствие 1. *Пусть L — специальная почти локально разрешимая алгебра Ли над полем F характеристики нуль. Справедливо: $J(L) = 0$ тогда и только тогда, когда алгебра Ли L имеет разложение Леви $L = S \oplus Z(L)$, где $Z(L)$ — центр алгебры L, S — конечномерная подалгебра L такая, что $J(L) = 0$.*

Доказательство. Пусть L — специальная почти локально разрешимая алгебра Ли, R ее локально разрешимый радикал.

Согласно теореме 6, для алгебры L имеет место разложение Леви $L = S + R$, где S — полупростая конечномерная алгебра, а R — локально разрешимый радикал.

Из теоремы 7 получаем $J(L) = [L, R]$.

Следовательно, $J(L) = 0$ тогда и только тогда, когда $R = Z(L)$.

2. О локально нильпотентном радикале для алгебр Ли

Локально нильпотентный радикал специальных алгебр Ли является обобщением нильпотентного радикала конечномерных алгебр Ли [2], [11].

Если модуль M — конечномерный, то наибольший идеал U, алгебры L такой, что эндоморфизм x_M, соответствующий элементу x, является нильпотентным для всех $x \in L$, в алгебре $\mathrm{End}M$, — называется наибольшим идеалом нильпотентности представления.

Для конечномерной алгебры Ли L нильпотентный радикал $N(L)$ характеризуется также как пересечение наибольших идеалов нильпотентности конечномерных представлений алгебры L [2].

Говоря о представлениях алгебры Ли, следует рассмотреть и случай, когда представление неприводимо.

2.1 О примитивных алгебрах Ли

Алгебру Ли, имеющую точное неприводимое представление называют примитивной.

Идеал алгебры Ли назовем примитивным, если фактор-алгебра по нему примитивна.

Д.Товерс [12] разбивает примитивные алгебры Ли на 3 типа:

1) примитивность типа 1, если алгебра Ли имеет единственный минимальный идеал, являющийся абелевым;

2) примитивность типа 2, если алгебра Ли имеет единственный минимальный идеал, не являющийся абелевым;

3) примитивность типа 3, если Алгебра Ли имеет ровно два различных минимальных идеала каждый из которых не является абелевым.

Он утверждает, что всякая примитивная разрешимая алгебра Ли является примитивной 1 типа, всякая простая алгебра Ли — примитивной второго типа. И если S — простая алгебра Ли, то $L = S \bigoplus S$ является примитивной типа 3 с безъядерной максимальной подалгеброй $D = \{s + s : s \in S\}$ — диагонольной подалгеброй L.[12]

Рассмотрим пример, предложенный Ю. А. Бахтуриным.

Пример 1. Пусть $F[x]$ — кольцо многочленов над полем F характеристики нуль.

Рассмотрим следующие линейные отображения векторного пространства

$$F[x] : a(f(x)) = f'(x); \quad b(f(x)) = x \cdot f(x); \quad e(f(x)) = f(x).$$

Легко проверить соотношение $[a, b] = e$, где через $[x, y]$ в ассоциативной алгебре обозначено $[x, y] = xy - yx$.

Обозначим через L линейную оболочку преобразований a, b, e. Алгебра Ли L является трехмерной нильпотентной степени 2 примитивной алгеброй.

Этот пример показывает, что даже нильпотентная конечномерная алгебра Ли степени 2 может быть примитивной.

Известно, что разрешимый идеал конечномерной алгебры Ли и локально разрешимый идеал специальной алгебры Ли совпадают с первичным радикалом [13].

Парадоксальность примера состоит в том, что радикальная алгебра Ли по отношению к первичному радикалу является примитивной. Напомним, что в ассоциативном случае радикал Джекобсона, а следовательно и первичный, примитивной алгебры равны нулю [14]. Более того, примитивная алгебра является первичной.

Примитивных алгебр Ли достаточно много.

Скажем, что алгебра Ли является артиновой, если любая убывающая цепочка ее идеалов — стабилизируется.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 8. *Пусть L — артинова алгебра Ли над полем, имеющая единственный минимальный идеал. Тогда алгебра Ли L — примитивна.*

Теорема 9. *Пусть L_1 и L_2 — примитивные алгебры Ли, имеющие такие точные неприводимые представления*

$$\varphi_i : L_i \to M_i$$

такие, что центродиды Δ_i модулей M_i совпадают с основным полем и $\varphi_i(L_i) \cap \Delta_i = 0$, где $i = 1, 2$. Тогда их прямая сумма $L_1 \oplus L_2$ также примитивна.

В 70-ых годах прошлого века была известна проблема: является ли универсальная обертывающая алгебра $U(L)$ полупростой конечномерной алгебры Ли L над полем характеристики нуль примитивной?

Наибольших успехов в решении этой проблемы добился Ж. Диксмье [15]. Он исследовал не только примитивность универсальной обертывающей алгебры Ли, но и примитивность отдельных ее идеалов.

Очевидна следующая импликация: если $U(L)$ — примитивна, то алгебра Ли L также является примитивной. Обратное в общем случае неверно (смотрите пример 2).

Относительно примитивности полупростых алгебр Ли справедливы следующие утверждения.

Следствие 1 *Полупростые конечномерные алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль — примитивны.*

Скажем, что простая алгебра Ли L — центральная простая, если центроид представления $\mathrm{ad} : L \to \mathrm{Ad}\ L$ совпадает с основным полем. Центральными простыми алгебрами над полем характеристики нуль являются, например, простые конечномерные алгебры Ли больших классов A, B, C, D [8].

Применяя теорему 9, получим утверждение.

Следствие 2 *Если полупростая конечномерная алгебра Ли над полем характеристики нуль раскладывается в прямую сумму центральных простых алгебр, то она является примитивной.*

В [16] была доказана примитивность свободной ассоциативной алгебры Ли с конечным или счетным множеством образующих. Свободная ассоциативная алгебра является универсальной обертывающей свободной алгебры Ли. Следовательно, свободная алгебра Ли является примитивной.

Все коммутативные агебры Ли над полями $\mathbb{Z}_p$, где p — простое, и $\mathbb{Q}$ также являются примитивными. Бесконечномерные коммутативные алгебры Ли являются примитивными над любыми полями (см. пример 3).

Конечномерная абелева алгебра, размерности больше 1, над алгебраически замкнутым полем не является примитивной (см. пример 4).

Приведен пример неартиновой некоммутативной алгебры Ли являющейся примитивной (см. пример 6).

Рассмотрим примитивность некоторых алгебр Ли.

Лемма 1. *Пересечение примитивных идеалов произвольной алгебры Ли равно нулю.*

Доказательство.

Обозначим через X пересечение аннуляторов неприводимых представление алгебры Ли L или саму алгебру L если их нет.

Легко проверить, что модуль M — неприводим над алгеброй Ли L тогда и только тогда, когда M является $U(L)$ неприводимым модулем, где $U(L)$ — универсальная обертывающая алгебры Ли L.

Это означает, что $X = L \cap J(U(L))$.

Известно, что $J(U(L)) = 0$ для произвольной алгебры Ли L (см., например, [15, стр. 126])

Следовательно, множество X равное пресечению примитивных идеалов алгебры Ли L, равно 0, что завершает доказательство леммы.

Пример 2. Пусть $L = \mathbb{C}$ двумерная абелева алгебра Ли над $\mathbb{R}$.

Представление L умножениями на $\mathbb{C}$ задает точное неприводимое представление. Следовательно, алгебра Ли L – примитивна. Ее универсальная обертывающая, изоморфная алгебре многочленов над $\mathbb{R}$ от двух коммутирующих переменных, не является примитивной.

Согласно теореме Капланского, примитивная PI-алгебра изоморфна алгебре матриц Δ_n для некоторого тела Δ [14]. В силу коммутативности, примитивная алгебра многочленов от двух переменных должна быть полем, что не выполнено.

Пример 3. Пусть L — абелева алгебра Ли над полем F. Если размерность $\dim_F L = n$ — конечна и существует алгебраический элемент α степени n над F, то рассмотрим простое алгебраическое расширение $F(\alpha)$.

Поле $F(\alpha)$ является абелевой алгеброй Ли размерности n и имеет точное неприводимое представление.

К числу полей, имеющих алгебраические элементы любой степени относятся поле рациональных чисел и кольцо классов вычетов $\mathbb{Z}_p$, где p — простое.

Если $\dim_F \colon L$ — бесконечна, рассмотрим поле K той же размерности над F. Оно тоже является реализацией абелевой примитивной алгебры Ли над F.

Пример 4. Покажем, что абелева алгебра $L = F \oplus ... \oplus F$ размерности k, где F — алгебраически замкнутое поле, $k \geqslant 2$, — не является примитивной.

Универсальная обертывающая алгебра $U(L)$ алгебры Ли L изоморфна кольцу многочленов от k коммутирующих переменных

$$U(L) = F[x_1, ..., x_k].$$

Примитивность алгебры Ли L означает, что в $U(L)$ существует максимальный регулярный правый идеал I не содержащий переменные $x_1, ..., x_k$ [14]. Алгебра $U(L)$ коммутативна и содержит 1. Следовательно, идеал I является максимальным и фактор-алгебра $H = U(L)/I$ является полем. Можно считать, что H расширение поля F.

Отметим, что алгебра H порождена образами образующих $U(L)$. Следовательно, элементы $\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k$ не могут быть трансцендентными — алгебра рациональных функций не может быть порождена как кольцо конечным числом элементов.

Мы установили, что H — алгебраическое расширение поля F и, следовательно, $H = F$. Получили $x_1, ..., x_k \in I$ — противоречие.

Следовательно, алгебра L — не является примитивной.

Теорема 8 следует из леммы 1 и того, что любой ненулевой примитивный идеал артиновой алгебры Ли содержит единственный минимальный.

Доказательство теоремы 9.

Пусть алгебры Ли L_1 и L_2 имеют точные неприводимые представления в алгебре эндоморфизмов модулей M_1 и M_2, такие, что их центроиды совпадают с основным полем F.

Рассмотрим модуль $M_1 \otimes_F M_2$ над $\mathrm{End}(M_1) \otimes_F \mathrm{End}(M_2)$ и вложения алгебр Ли

$$\varphi_i : L_i \to \mathrm{End}(M_i), \quad i = 1, 2.$$

Пострим следующие отображения L_1 и L_2 в алгебру

$$\mathrm{End}(M_1) \otimes_F \mathrm{End}(M_2) :$$

$\varphi_1'(l_1) = \varphi_1(l_1) \otimes 1$ и $\varphi_2'(l_2) = 1 \otimes \varphi(l_2)$, $l_1 \in L_1, l_2 \in L_2$

Тогда $\varphi_1 + \varphi_2$ задает вложение $L_1 \oplus L_2$ в $(\mathrm{End}(M_1) \otimes_F \mathrm{End}(M_2))^{(-)}$.

Покажем, что $M_1 \otimes_F M_2$ является $L_1 \oplus L_2$ неприводимым модулем.

Рассмотрим ненулевой элемент $x \in M_1 \otimes_F M_2$. Можно считать, что он представлен в виде

$$x = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \alpha_{i,j} m_i \otimes n_j,$$

где хотя бы одно $\alpha_{i,j} \neq 0$ и элементы $m_1, ..., m_k \in M_1$ и $n_1, ..., n_l \in M_2$ – линейно независимы над центроидами соответствующих модулей и, следовательно, над полем F. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_{1,1} \neq 0$.

Обозначим через $A(L_i)$ ассоциативные алгебры, порожденные в $\mathrm{End}(M_1)$ множествами L_i, где $i = 1, 2$.

Возьмем произвольный элемент $u \otimes v \in M_1 \otimes_F M_2$. Согласно теореме плотности Джекобсона [14], существуют элементы $a \in A(L_1)$ и $b \in A(L_2)$ такие, что

$$am_1 = \frac{1}{\alpha_{1,1}} u, am_2 = 0, ..., am_k = 0, bn_1 = v, bn_2 = 0, ..., bn_l = 0.$$

Тогда $(a \otimes 1)(1 \otimes b)x = u \otimes v$, что завершает доказательство неприводимости модуля $M_1 \otimes_F M_2$ и примитивности алгебры $L_1 \oplus L_2$.

Условие $\varphi_i(L_i) \cap \Delta_i = \varnothing$, где $i = 1, 2$ требуется для того, чтобы $a \otimes 1$ и $1 \otimes b$ не могли совпадать.

Отметим, что в общем случае тензорное произведение неприводимых модулей может не быть примитивным, что показывает следующий пример.

Пример 5. Мы уже использовали то, что поле комплексных чисел является двумерной абелевой примитивной алгеброй Ли над $\mathbb{R}$.

Рассмотрим модуль $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ над алгеброй Ли $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Отметим, что ассоциативная подалгебра $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ алгебры $\mathbf{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$, порожденная множествами $\mathbb{C} \otimes 1$ и $1 \otimes \mathbb{C}$ содержит также элементы $1 \otimes 1, i \otimes i$.

Покажем, что модуль $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ не является неприводимым.

Следующие элементы $1 \otimes 1, 1 \otimes i, i \otimes 1, i \otimes i$ образуют базис $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$.

Рассмотрим подпространство $M \subseteq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$, порожденное элементами $1 \otimes 1 + i \otimes i$, $1 \otimes i - i \otimes 1$ и подпространство N, порожденное элементами $1 \otimes 1 - i \otimes i, 1 \otimes i + i \otimes 1$.

Легко проверить, что M и N являются подмодулями $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ над $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ и $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = M \oplus N$.

Следовательно, модуль $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ не является неприводимым над алгеброй Ли $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Мы уже отмечали, что алгебра Ли $(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})^{(-)}$ не является примитивной. Пример 5 дает одно из представлений алгебры $(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})^{(-)}$ не являющееся неприводимым.

Доказательство следствия 1.

Пусть L – простая конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики нуль.

Рассмотрим представление $\mathrm{ad} : L \to \mathrm{Ad}\ L^{(-)}$.

Тогда алгебра Ли L, рассматриваемая как модуль, является неприводимым L модулем. Центроид этого представления Δ является полем (см., например, [8, с. 314]).

Из конечномерности L следует, что Δ – конечное расширение поля F. Конечным расширением алгебраически замкнутого поля может быть только оно само. Следовательно, ad является центральным представлением алгебры Ли L.

Из простоты L получим $ad(L) \cap \Delta = 0$.

Выполнены условия теоремы 9. Осталось использовать разложение полупростой конечномерной алгебры Ли над полем характеристики нуль в прямую сумму простых [2], [8].

Пример 6. Пусть алгебра Ли G является прямой суммой счетного количества алгебр, изоморфных алгебре L из примера 1 над полем $\mathbb{Q}$. Покажем, что она является примитивной. Очевидно, что G не является артиновой алгеброй Ли.

Рассмотрим различные иррациональные алгебраические числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...$.

Пусть $M = F[x_1, x_2, ..., x_n, ..]$ кольцо многочленов от счетного числа коммутирующих переменных с коэффициентами из поля $F = Q(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$.

Рассмотрим следующие линейные отображения векторного пространства M:

$$a_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x_k}; b_k(f) = \alpha_k x_k \cdot f; e_k(f) = \alpha_k f, f \in M.$$

Легко проверить соотношение $[a_k, b_k] = e_k$.

Рассмотрим представления $\varphi_k : L \to (End_{\mathbb{Q}} M)^{(-)}$, заданные соотношениями

$$\varphi_k(a) = a_k, \varphi_k(b) = b_k, \varphi_k(e) = e_k, k = 1, 2, ...$$

Гомоморфизм $\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n + ...$ задает представление алгебры Ли G в $End_{\mathbb{Q}} M^{(-)}$.

Проверка того, что M является неприводимым G-модулем предоставляется читателю.

Аналогично можно показать, что прямая сумма конечного числа алгебр, изоморфных алгебре L из примера 1 над полем $\mathbb{Q}$ является примитивной алгеброй Ли.

2.2 О локально нильпотентном радикале для специальных алгебр Ли

Рассмотрим понятие PI-представления алгебры Ли.

Назовем *PI-представлением* алгебры Ли L представление алгебры L в алгебре эндоморфизмов $\mathrm{End}(M)^{(-)}$ модуля M над алгеброй L, для которого ассоциативная ассоциированная алгебра представления $A(L)$, порожденная образами элементов из L, является PI-алгеброй.

Обозначим через $IrrPI(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых PI-представлений алгебры Ли L и саму алгебру L если их нет. Назовем идеал $IrrPI(L)$ алгебры Ли L PI-неприводимо представленным радикалом.

Если алгебра Ли имеет точное PI-представление, то она является специальной. Для PI-представлений алгебр Ли можно ввести аналог наибольшего идеала нильпотентности.

Теорема 10. **A ([11])** *Пусть алгебра Ли L имеет PI-представление в кольце эндоморфизмов векторного пространства M. Тогда*

i) Все идеалы J алгебры L такие, что x_M нильпотентно для любого $x \in L$, содержатся в одном из них, например U.

ii) Образ $\bar{U}$ идеала U является локально нильпотентным в алгебре $EndM$.

iii) Идеал U является множеством элементов $x \in L$ таких, что x_M принадлежит первичному радикалу P ассоциативной алгебры $A(L)$, ассоциированной с представлением алгебры L.

По аналогии с конечномерными алгебрами, назовем идеал U наибольшим идеалом локальной нильпотентности представления.

Назовем локально нильпотентным радикалом $N(L)$ специальной алгебры Ли L над полем F пересечение наибольших идеалов локальной нильпотентности всех PI-представлений алгебры Ли L над полем F и саму алгебру Ли, если их нет.

В работе [11] показано, что радикал $N(L)$ специальной алгебры Ли L является локально нильпотентным идеалом.

Известно, что справедливо включение $N(L) \subset IrrPI(L)$ для специальных алгебр Ли над полем F характеристики нуль. Этот результат обобщает следующая теорема.

Теорема 11. *Для произвольной специальной алгебры Ли L над полем F характеристики нуль справедливо равенство $N(L) = IrrPI(L)$.*

Скажем, что алгебра Ли – редуктивная, если она является произведением полупростой и коммутативной подалгебр.

Для доказательства теоремы нам потребуется следующие леммы.

Лемма 2. *Пусть Δ – тело характеристики нуль, удовлетворяющее полиноминальному тождеству. Рассмотрим алгебру матриц $L = \Delta_n^{(-)}$ как алгебру Ли по отношению к операции коммутирования над простым подполем $\mathbb{Q}$. Расмотрим лиевский разрешимый идеал I алгебры L. Тогда множество I лежит в центре алгебры матриц Δ_n.*

Доказательство. Обозначим через Z центр тела Δ. Согласно теореме Капланского, тело Δ является конечномерным над центром Z.

Рассмотрим представление Δ_n над Δ^n (пространство векторов-столбцов) с помощью левых умножений.

Хорошо известно, что такое представление матричной алгебры над телом – неприводимо.

Алгебра L имеет точное конечномерное над Z представление. Следовательно, $N(L) = 0$.

Согласно [2, предложение 5 e), стр. 71], алгебра Ли L – редуктивна.

Редуктивная алгебра L является произведением полупростой алгебры S и центра Z.

Полупростая конечномерная алгебра Ли S над полем характеристики нуль раскладывается в произведение простых подалгебр $\sigma_i, i = 1, ..., k$.

Подалгебры σ_i являются идеалами алгебры Ли L. Любой идеал алгебры L является суммой нескольких идеалов σ_i и, возможно, $\mathbb{Q}$-подпространства центра Z.

Множество ZI является разрешимым лиевским идеалом алгебры Ли L над Z. Оно не может содержать простых подалгебр σ_i.

Следовательно, $ZI \subset Z$ и $I \subset Z$.

Лемма 3. *Пусть алгебра Ли L над полем F характеристики нуль имеет неприводимое PI-представление в алгебре эндоморфизмов $End(M)^{(-)}$ векторного пространства M над F. Пусть I – некоторый локально разрешимый идеал L. Тогда образ $\bar{I}$ идеала I в алгебре $\mathrm{End}(M)^{(-)}$ лежит в центре алгебры $\bar{L}$.*

Доказательство. Пусть M-неприводимый $A(L)$-модуль, алгебра $A(L)$ порождена как ассоциативная алгебра гомоморфным образом $\bar{L}$ алгебры Ли L.

Алгебра $A(L)$ является примитивной PI-алгеброй.

Согласно теореме Капланского [14], она простая, конечномерная над своим центром Z изоморфна алгебре матриц над телом $A(L) \simeq \Delta_m$, $m \in \mathbb{N}$.

Пусть $\bar{I}$ – гомоморфный образ идеала I в алгебре $A(L)$. В конечномерной алгебре локально разрешимый идеал является разрешимым.

Согласно лемме 2, идеал $\bar{I}$ лежит в центре Z алгебры $A(L)$.

Следовательно, идеал $\bar{I}$ лежит в центре алгебры $\bar{L}$.

Доказательство теоремы. Локально нильпотентный идеал $N(L)$ специальной алгебры Ли L является локально нильпотентным [11]. Заметим, что локально нильпотентный идеал является локально разрешимым.

Пусть специальная алгебра Ли L имеет неприводимое PI-представление в алгебре эндоморфизмов $\varphi : L \to End(M)^{(-)}$ векторного пространства M над полем F.

Тогда, согласно лемме 3, $\varphi(N(L)) \subseteq Z(\varphi(L))$.

Алгебра Ли $\varphi(L)$ порождает ассоциативную алгебру $A(L)$. Ее центр $Z(\varphi(L))$ лежит в центроиде неприводимого L-модуля M.

Согласно лемме Шура [14], центроид неприводимого модуля является телом. Вложение в тело можно было также вывести из теоремы Капланского.

Следовательно ненулевые элементы $\varphi(N(L))$ не лежат в наибольшем идеале локальной нильпотентности модуля M. Получили $\varphi(N(L)) = 0$.

Из произвольности неприводимого PI-представления M следует включение

$$N(L) \subseteq IrrPI(L).$$

Снова рассмотрим неприводимое PI-представление алгебры Ли L в алгебре эндоморфизмов $\varphi : L \to End(M)^{(-)}$ векторного пространства M над полем F.

Согласно пункту iii теорема 10 A наибольший идеал U локальной нильпотентности представления является пересечением $\bar{L} \cap P(A(L))$.

Первичный радикал ассоциативной алгебры $A(L)$ является локально нильпотентным идеалом алгебры $A(L)$ и, следовательно, содержится в радикале Джекобсона $P(A(L)) \subset J(P(L))$.

Алгебра $A(L)$ является примитивной ассоциативной алгеброй, радикал Джекобсона которой равен нулю.

Следовательно, U содержится в ядре неприводимого PI-представления M алгебры L.

Тогда в нем же будет содержаться локально нильпотентный радикал $N(L)$ алгебры Ли L.

Учитывая произвольность неприводимого PI-представления получаем включение

$$IrrPI(L) \subseteq N(L),$$

которое завершает доказательство теоремы.

Также как и для специальных алгебр Ли, назовем локально нильпотентным радикалом $N(L)$ алгебры Ли L над полем F пересечение наибольших идеалов локальной нильпотентности всех PI-представлений алгебры Ли L над полем F и саму алгебру Ли, если их нет.

Приведем пример алгебры Ли, локально нильпотентный радикал которой не является ни локально нильпотентным, ни локально разрешимым. Он основан на примере Ф.Кубо [1], но используется для других целей.

Пример 7. Пусть L – множество линейных отображений конечного ранга бесконечномерного векторного пространства V над полем F в себя.

Обозначим через S множество отображений из L со следом нуль. Рассмотрим L и S как алгебры ли по отношению к операции коммутирования.

Легко проверить, что $L^2 = S$, S простая алгебра Ли.

Все нетривиальные идеалы L – это векторные простанства, содрежащие S.

Алгебра Ли S не является специальной и, следовательно, содержится в аннуляторах неприводимых PI-представлений.

Алгебра $H = L/S$ является абелевой. Радикал Джекобсона абелевой алгебры Ли равен нулю. Следовательно, $J(H) = 0$ и $IrrPI(H) = 0$.

Установили равенства $J(L) = S, IrrPI(L) = S$.

Фактор-алгебра $H = L/S$ – абелева и, следовательно, специальная. Согласно теореме 11, локально нильпотентный радикал $N(H)$ алгебры H равен нулю. Получили $N(L) = S$.

Алгебра S не является ни локально разрешимой, ни локально нильпотентной.

Следовательно, радикал Джкебсона $J(L)$, $IrrPI(L)$ и локально нильпотентный радикал $N(L)$ произвольной алгебры Ли L могут не быть ни локально разрешимыми, ни локально нильпотентными.

3. Заключение

Радикалы играют важную роль при построении структурной теории специальных алгебр Ли.

Мы доказали аналог теоремы Ф. Кубо для почти локально разрешимых алгебр Ли с нулевым радикалом Джекобсона, рассмотрели некоторые свойства и примеры примитивных алгебр Ли, а так же радикалы примитивных алгебр Ли.

К сожалению, есть вопросы, ответы на которые не известны авторам статьи:

1) существует ли неабелева алгебра Ли, которая не является примитивной?

2) всегда ли полупростая алгебра Ли (первичный радикал равен нулю) является примитивной?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kubo, F. Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical / F. Kubo // Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat. Sci. — 1991. — V. 38. — P. 23–30.

2. Бурбаки, Н. Группы и алгебры Ли (главы I-III) / Н. Бурбаки. — М.: Мир, 1976. — 496 с.

3. Marshall, E. I. The Frattini subalgebras of a Lie algebra / E. I. Marshall // J. London Math. Soc. — 1967. — V. 42. — P. 416—422.

4. Kamiya, N. On the Jacobson radicals of infinite-dimensional Lie algebras/ N.Kamiya // Hiroshima Math. J. — 1979. — V. 9. — P. 37–40.

5. Латышев, В. Н. Об алгебрах Ли с тождественными соотношениями / В. Н. Латышев// Сиб. мат. журнал. — 1963. — Т. 4. — № 4. — С. 821–829.

6. Пихтильков, С. А. О специальных алгебрах Ли / С. А. Пихтильков // Успехи матем. наук. — 1981. — Т. 36. — № 6. — С. 225–226.

7. Биллиг Ю. В. О гомоморфном образе специальной алгебры Ли / Ю. В. Биллиг // Матем. сборник. — 1988. — Т. 136. — № 3. — С. 320–323.

8. Джекобсон, Н. Алгебры Ли / Н. Джекобсон. — М.: Мир, 1964.

9. Бахтурин, Ю. А. Тождества в алгебрах Ли // Ю. А. Бахтурин. — М.: Наука, 1985. — 447 с.

10. Терехова, Ю. А. О теореме Леви для специальных алгебр Ли / Ю. А. Терехова // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: Межвуз. сб. науч. тр. — Тула: Изд-во ТГПИ им. Л. Н. Толстого, 1994. — С. 97–103.

11. Пихтильков, С. А. О локально нильпотентном радикале специальных алгебр Ли / С. А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика. — 2002. — Т. 8. — Вып. 3. — С. 769–782.

12. Towers, D. A. Maximal subalgebras and chief factors of Lie algebras / D. A. Towers// J. Pure Appl. Algebra 220. — 2016. — P. 482-–493.

13. Бейдар, К. И. Первичный радикал специальных алгебр Ли / К. И. Бейдар, С. А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика. — 2000. — Т. 6. — Вып. 3. — С. 643–648.

14. Херстейн, И. Некоммутативные кольца / И. Херстейн. — М.: Мир, 1972. — 191 с.

15. Диксмье, Ж. Универсальные обертывающие алгебры / Ж. Диксмье. — М.: Мир, 1978.

16. Пихтильков, С. А. Примитивность свободной ассоциативной алгебры с конечным числом образующих / С. А. Пихтильков // УМН. — 1974. — № 1. — С. 183–184.

REFERENCES

1. Kubo, F. 1991, “Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical“, *Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat. Sci.*, v. 38. p. 23–30.

2. Burbaki, N. 1976, “Gruppy i algebry Li (glavy I–III) [Lie groups and algebras (chapters I–III)]“, Mir, Moscow, 496 pp.

3. Marshall, E. I. 1967,“The Frattini subalgebras of a Lie algebra“, *J. London Math. Soc.*, v. 42. p. 416–422.

4. Kamiya, N. 1979, “On the Jacobson radicals of infinite-dimensional Lie algebras“,*Hiroshima Math. J.*, v. 9. p. 37–40.

5. Latyshev, V. N. 1963, “On Lie Algebras with Identities ratios“, *Sib. mat. magazine*, t. 4. № 4. p. 821–829.

6. Pikhtilkov, S. A. 1981, “On special Lie algebras“, *Uspehi Mat. nauk*, t. 36. № 6. p. 225–226.

7. Billig Yu. V. 1988, “On the homomorphic image of a special Lie algebras“, *Mat. sbornik*, t. 136. № 3. p. 320–323.

8. Jacobson, N. 1964, “Lie Algebras“, Mir, Moscov.

9. Bakhturin, Yu. A. 1985, “Tozhdestva v algebrakh Li [Identities in Lie algebras]“, Nauka, Moscow, 447 pp.

10. Terekhova, Yu. A. 1994, “On the Levi theorem for special Lie algebras“, *Algorithmic Problems group and semigroup theories. Interuniversity collection of scientific works*, Tula: Izd-vo TGPI im. L. N. Tolstogo, p. 97–103.

11. Pikhtilkov, S. A. 2002, “On a locally nilpotent radical special Lie algebras“, *Fundamental and Applied Mathematics*, t. 8. v. 3. p. 769–782.

12. Towers, D. A. 2016, “Maximal subalgebras and chief factors of Lie algebras“, *J. Pure Appl. Algebra 220.*, p. 482-–493.

13. Beidar, K. I., Pikhtilkov, S. A. 2000, “Primary radical special Lie algebras“, *Fundamental and applied mathematics*, t. 6. v. 3. p. 643–648.

14. Herstein, I., 1972, “*Nekommutativnye kol'ca [Noncommutative rings]*“, Mir, Moscow. 191 pp.

15. Dixmier, J. 1978, “Universal'nyye obertyvayushchiye algebry [Universal enveloping algebras]“, Mir, Moscow.

16. Pikhtilkov, S. A. 1974, “Primitive free associative algebra with a finite number of generators“, УМН, № 1. p. 183–184.

Получено 18.03.2017 г.
Принято в печать 12.07.2019 г.