

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 512, 519.7

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-259-272

Об абстрактной определяемости универсальных гиперграфических автоматов полугруппами входных сигналов

В. А. Молчанов, Е. В. Хворостухина

Молчанов Владимир Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского (г. Саратов).

e-mail: v.molchanov@inbox.ru

Хворостухина Екатерина Владимировна — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Информационно-коммуникационные системы и программная инженерия», Саратовский государственный технический университет имени Ю. А. Гагарина (г. Саратов).

e-mail: khvorostukhina85@gmail.com

Аннотация

Гиперграфическими автоматами называются автоматы, у которых множества состояний и выходных символов наделены структурами гиперграфов, сохраняющимися функциями переходов и выходными функциями. Универсальные притягивающие объекты в категории таких автоматов называются универсальными гиперграфическими автоматами. Для таких автоматов полугруппы входных символов являются производными алгебрами отображений, свойства которых взаимосвязаны со свойствами алгебраических структур данных автоматов. Это позволяет изучать универсальные гиперграфические автоматы с помощью исследования их полугрупп входных символов. В работе исследуется проблема абстрактной определяемости таких автоматов их полугруппами входных символов, суть которой заключается в нахождении условий изоморфности полугрупп входных символов универсальных гиперграфических автоматов. Основной результат работы дает решение этой задачи для универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с p -определимыми ребрами. Это достаточно широкий и весьма важный класс автоматов, так как он содержит, в частности, автоматы, у которых гиперграфы состояний и выходных символов являются плоскостями (например, проективными или аффинными), а также автоматы, у которых множества состояний и выходных символов разбиваются на классы некоторой эквивалентности без одноэлементных классов. В настоящей работе доказано, что универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с p -определимыми ребрами полностью (с точностью до изоморфизма) определяются своими полугруппами входных символов, а также описано строение изоморфизмов таких автоматов.

Ключевые слова: проблема абстрактной определяемости, автомат, гиперграф, полугруппа.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

В. А. Молчанов, Е. В. Хворостухина. Об абстрактной определяемости универсальных гиперграфических автоматов полугруппами входных сигналов // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 259–272.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 512, 519.7

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-259-272

On problem of abstract definability of universal hypergraphic automata by input symbol semigroup

V. A. Molchanov, E. V. Khvorostukhina

Molchanov Vladimir Alexandrovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of theoretical foundations of computer security and cryptography, Saratov national research state University named after N. G. Chernyshevsky (Saratov).

e-mail: v.molchanov@inbox.ru

Khvorostukhina Ekaterina Vladimirovna — candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of Information and Communication Systems and Software Engineering Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Saratov).

e-mail: khvorostukhina85@gmail.com

Abstract

Hypergraphic automata are automata, state sets and output symbol sets of which are hypergraphs, being invariant under actions of transition and output functions. Universally attracting objects in the category of such automata are called universal hypergraphic automata. The semigroups of input symbols of such automata are derivative algebras of mappings for such automata. Semigroup properties are interconnected with properties of the automaton. Therefore, we can study universal hypergraphic automata by investigation of their input symbol semigroups. In this paper, we solve a problem of abstract definability of such automata by their input symbol semigroups. This problem is to find the conditions of isomorphism of semigroups of input symbols of universal hypergraphic automata. The main result of the paper is the solving of this problem for universal hypergraphic automata over effective hypergraphs with p -definable edges. It is a wide and a very important class of automata because such algebraic systems contain automata whose state hypergraphs and output symbol hypergraphs are projective or affine planes. Also they include automata whose state hypergraphs and output symbol hypergraphs are divided into equivalence classes without singleton classes. In the current study, we proved that such automata were determined up to isomorphism by their input symbol semigroups and we described the structure of isomorphisms of such automata.

Keywords: problem of abstract definability, automaton, hypergraph, semigroup.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

V. A. Molchanov, E. V. Khvorostukhina, 2019, "On problem of abstract definability of universal hypergraphic automata by input symbol semigroup", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 259–272.

1. Введение

Как известно [1], в алгебраической теории автоматов главный объект исследования – автомат рассматривается как многосортная алгебраическая система $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ с тремя базисными множествами – множество состояний автомата X , множество входных символов S , множество выходных символов Y , и с двумя сигнатурными операциями – функция переходов $\delta : X \times S \rightarrow X$ и выходная функция $\lambda : X \times S \rightarrow Y$. При этом в зависимости от

рассматриваемых задач автоматы могут структуризоваться в подходящих алгебраических категориях, т.е. компоненты автоматов могут быть объектами некоторых специальных категорий. Так, множество входных символов автомата обычно рассматривается с ассоциативным умножением и, следовательно, является объектом категории полугрупп.

С другой стороны, множества состояний автомата и его выходных символов могут наделяться некоторой алгебраической структурой и являться объектами категории $\mathbf{K}$ соответствующих алгебраических систем. Важными примерами таких алгебраических систем являются графы, упорядоченные множества, линейные пространства, вероятностные пространства и др. Исследованию структуризованных в таких категориях автоматов посвящены многочисленные работы известных алгебраистов (см., например, обзор в [1]).

Как следует из [1], универсальные притягивающие объекты в категории автоматов, структуризованных в любой категории $\mathbf{K}$, представляются универсальными автоматами $\text{Atm}(A, B)$ с алгебраической системой состояний $A \in \mathbf{K}$, алгебраической системой выходных символов $B \in \mathbf{K}$ и полугруппой входных символов $S = \text{End } A \times \text{Hom}(A, B)$. При таком подходе многие результаты алгебраической теории автоматов имеют непосредственное отношение к одному из основных разделов современной алгебры – обобщенной теории Галуа, которая посвящена изучению математических объектов путем исследования некоторых производных алгебр отношений, специальным образом связанных с исходными объектами.

В нашем случае изучаемым математическим объектом является универсальный автомат и производной алгеброй отношений – его полугруппа входных символов. Например, Л. М. Глускин, Е. С. Ляпин, Б. М. Шайн, Ю. М. Важенин и другие авторы (см., например, обзор в [2]) исследовали полугруппы эндоморфизмов графов, которые могут рассматриваться как графические полуавтоматы (т.е. автоматы без выходных символов, для которых системы состояний являются объектами категории графов $\mathbf{Gr}$). Более того, хорошо известная проблема Л. М. Глускина и Л. А. Скорнякова о полугруппах эндоморфизмов проективных плоскостей может быть рассмотрена как проблема определимости планарных полуавтоматов их полугруппами входных символов (см. проблему 1.20 в [3] и ее решение Лендером [4] и первым автором настоящей работы [5]). Позже этот результат был обобщен в работе [6] на автоматы с выходными символами, для которых системы состояний и выходных символов являются объектами категории плоскостей $\mathbf{Pl}$.

Настоящая работа продолжает исследования в этом направлении. В ней рассматриваются гиперграфические автоматы, т.е. автоматы, структуризованные в категории гиперграфов $\mathbf{Hgr}$ [7]. Универсальные притягивающие объекты в категории таких автоматов представляются универсальными гиперграфическими автоматами $\text{Atm}(H_1, H_2)$ с гиперграфом состояний H_1 , гиперграфом выходных символов H_2 и полугруппой входных символов $S = \text{End } H_1 \times \text{Hom}(H_1, H_2)$. Для такого автомата $\text{Atm}(H_1, H_2)$ полугруппа входных символов S является производной алгеброй отображений, что позволяет изучать универсальные гиперграфические автоматы с помощью исследования их полугрупп входных символов.

Ввиду известной проблемы С. Улама [8] об определимости математических структур их эндоморфизмами, особый интерес представляет исследование проблемы абстрактной определяемости таких автоматов полугруппами их входных символов, которая формулируется следующим образом: при каких условиях два универсальных гиперграфических автомата будут иметь изоморфные полугруппы входных символов?

Первые результаты в этом направлении были получены в работе [6], где доказано, что для любых плоскостей (например, проективных или аффинных) H_1, H_2 универсальный гиперграфический автомат $\text{Atm}(H_1, H_2)$ определяется с точностью до изоморфизма своей полугруппой входных символов. В настоящей статье этот результат обобщается на универсальные гиперграфические автоматы $\text{Atm}(H_1, H_2)$, у которых H_1, H_2 являются эффективными гиперграфами с p -определимыми ребрами. Это достаточно широкий и весьма важный класс автоматов,

так как он содержит, в частности, не только автоматы, у которых гиперграфы состояний и выходных символов являются плоскостями, но и автоматы, у которых гиперграфы состояний и выходных символов являются разбиениями на классы эквивалентностей, содержащие более p элементов, и многие другие. Для таких автоматов в работе [9] уже была решена задача абстрактной характеристики. Главный результат данной работы – теорема 3.5 показывает, что универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с p –определимыми ребрами в том и только том случае имеют изоморфные полугруппы входных символов, если эти автоматы изоморфны.

Результаты работы докладывались на XIV Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященной 70-ти летию со дня рождения С. М. Воронина и Г. И. Архипова (Саратов, СГУ им. Н. Г. Чернышевского, 2016) [10].

2. Основные понятия

В работе используется общепринятая терминология и основные понятия теории автоматов [1], теории полугрупп [11], теории гиперграфов [7] и алгебры отношений [12].

Пусть X, Y – непустые множества. Всюду определенное однозначное бинарное отношение $\varphi \subset X \times Y$ называется отображением множества X в множество Y и обозначается символом $\varphi : X \rightarrow Y$. Постоянное отображение множества X в элемент $a \in Y$ обозначается символом C_a . Тождественное отображение множества X в себя обозначается символом Δ_X .

Согласно [7] гиперграфом называется система вида $H = (X, L)$, где X – это непустое множество вершин гиперграфа и L – семейство некоторых подмножеств множества X , называемых ребрами гиперграфа. Множество вершин гиперграфа называется ограниченным, если оно содержится в некотором его ребре, и неограниченным в противном случае. Вершины гиперграфа, принадлежащие некоторому его ребру, называются смежными. Гиперграф $H = (X, L)$ называется эффективным, если любая его вершина принадлежит некоторому ребру этого гиперграфа.

Пусть p – некоторое натуральное число. Гиперграф H будем называть гиперграфом с p –определимыми ребрами, если в каждом ребре этого гиперграфа найдется по крайней мере $p + 1$ вершина и, с другой стороны, любые p вершин этого гиперграфа содержатся не более, чем в одном ребре.

В частности, эффективными гиперграфами с p –определимыми ребрами являются исследуемые в работах [13]–[15] слабые p –гиперграфы. Кроме того, эффективными гиперграфами с p –определимыми ребрами являются гиперграфы, ребра которых образуют разбиения множества вершин на классы, содержащие более p вершин. Наконец, если рассматривать плоскости [16] как гиперграфы, вершинами которых являются точки, а ребрами – прямые этих плоскостей, то любая проективная плоскость и любая аффинная плоскость с числом точек более четырех являются эффективными гиперграфами с 2–определимыми ребрами.

Пусть $H = (X, L)$, $H_1 = (X_1, L_1)$ – произвольные гиперграфы. Гомоморфизмом гиперграфа $H = (X, L)$ в гиперграф $H_1 = (X_1, L_1)$ называется отображение φ множества X в множество X_1 , которое смежные в гиперграфе H вершины переводит в смежные вершины гиперграфа H_1 , т.е. выполняется свойство

$$(\forall l \in L)(\exists l' \in L_1)(\varphi(l) \subset l').$$

Заметим, что для ребра $l \in L_1$ всякое отображение $\varphi : X \rightarrow l$ является гомоморфизмом гиперграфа H в гиперграф H_1 .

Множество всех гомоморфизмов гиперграфа H в гиперграф H_1 обозначим $\text{Hom}(H, H_1)$.

Гомоморфизм гиперграфа $H = (X, L)$ в себя называется эндоморфизмом гиперграфа H . Множество всех эндоморфизмов гиперграфа H с операцией композиции образует полугруппу

End H .

Гомоморфизм гиперграфов $f : H \longrightarrow H_1$ называется изоморфизмом гиперграфа H на гиперграф H_1 , если f – взаимно однозначное отображение множества X на множество X_1 и обратное отображение f^{-1} является гомоморфизмом гиперграфа H_1 на гиперграф H , т.е. выполняется условие

$$(\forall Y \subset X)(Y \in L \iff f(Y) \in L_1).$$

Если существует изоморфизм $f : H \longrightarrow H_1$, то гиперграфы H и H_1 называются изоморфными и записывают $H \cong H_1$.

Изоморфизм гиперграфа $H = (X, L)$ на себя называется автоморфизмом гиперграфа H .

Для гиперграфов $H_X = (X, L_X)$, $H_Y = (Y, L_Y)$ через $S(H_X, H_Y)$ обозначим полугруппу $\text{End } H_X \times \text{Hom}(H_X, H_Y)$ с ассоциативной бинарной операцией, определяющейся по правилу [1]: $(\varphi, \psi) \cdot (\varphi_1, \psi_1) = (\varphi\varphi_1, \varphi\psi_1)$ для пар $(\varphi, \psi), (\varphi_1, \psi_1) \in \text{End } H_X \times \text{Hom}(H_X, H_Y)$.

Следуя [1], под автоматом будем понимать алгебраическую систему $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$, состоящую из множества состояний X , полугруппы входных символов S , множества выходных символов Y , функции переходов $\delta : X \times S \longrightarrow X$ и выходной функции $\lambda : X \times S \longrightarrow Y$, таких что для любых $x \in X$ и $s, t \in S$ выполняются условия $\delta(x, st) = \delta(\delta(x, s), t)$, $\lambda(x, st) = \lambda(\delta(x, s), t)$. Для любого $s \in S$ определим отображения $\delta_s : X \longrightarrow X$, $\lambda_s : X \longrightarrow Y$ по формулам $\delta_s(x) = \delta(x, s)$, $\lambda_s(x) = \lambda(x, s)$, где $x \in X$.

Изоморфизмом автомата $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ на автомат $A_1 = (X_1, S_1, Y_1, \delta_1, \lambda_1)$ называется упорядоченная тройка $\gamma = (f, \pi, g)$ биекций $f : X \longrightarrow X_1$, $\pi : S \longrightarrow S_1$ и $g : Y \longrightarrow Y_1$, сохраняющих алгебраическую структуру таких автоматов, т.е. π является изоморфизмом полугруппы S на полугруппу S_1 и для любых значений $s, t \in S$, $x \in X$ выполняются условия $\pi(s \cdot t) = \pi(s) \cdot \pi(t)$, $f(\delta(x, s)) = \delta_1(f(x), \pi(s))$ и $g(\lambda(x, s)) = \lambda_1(f(x), \pi(s))$.

Автомат $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ будем называть гиперграфическим автоматом, если множество состояний X и множество выходных символов Y наделены такими структурами гиперграфов $H_X = (X, L_X)$ и $H_Y = (Y, L_Y)$, что при каждом фиксированном входном сигнале $s \in S$ преобразование $\delta_s : X \longrightarrow X$ – это эндоморфизм гиперграфа H_X и отображение $\lambda_s : X \longrightarrow Y$ – это гомоморфизм гиперграфа H_X в гиперграф H_Y . Такие автоматы будем также обозначать $A = (H_X, S, H_Y, \delta, \lambda)$.

Гомоморфизмом гиперграфического автомата $A = (H_X, S, H_Y, \delta, \lambda)$ в гиперграфический автомат $A_1 = (H_{X_1}, S_1, H_{Y_1}, \delta_1, \lambda_1)$ называется упорядоченная тройка $\gamma = (f, \pi, g)$ отображений $f : X \longrightarrow X_1$, $\pi : S \longrightarrow S_1$ и $g : Y \longrightarrow Y_1$, сохраняющих алгебраическую структуру таких автоматов, т.е. f является гомоморфизмом гиперграфа H_X в гиперграф H_{X_1} , π – гомоморфизмом полугруппы S в полугруппу S_1 , g – гомоморфизмом гиперграфа H_Y в гиперграф H_{Y_1} и для любых значений $x \in X$, $s \in S$ выполняются условия $f(\delta(x, s)) = \delta_1(f(x), \pi(s))$, $g(\lambda(x, s)) = \lambda_1(f(x), \pi(s))$.

Пример гиперграфического автомата дает алгебраическая система

$$\text{Atm}(H_X, H_Y) = (H_X, S(H_X, H_Y), H_Y, \delta', \lambda'),$$

где $H_X = (X, L_X)$, $H_Y = (Y, L_Y)$ – некоторые гиперграфы и для любых $x \in X$, $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$ определены значения $\delta'(x, (\varphi, \psi)) = \varphi(x)$, $\lambda'(x, (\varphi, \psi)) = \psi(x)$. Легко проверить, что $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ удовлетворяет следующему универсальному свойству: для любого гиперграфического автомата $A = (H_X, S, H_Y, \delta, \lambda)$ существует такой гомоморфизм $\pi : S \longrightarrow S(H_X, H_Y)$, что упорядоченная тройка $\gamma = (\Delta_X, \pi, \Delta_Y)$ является гомоморфизмом A в $\text{Atm}(H_X, H_Y)$. По этой причине такой гиперграфический автомат $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ называется универсальным гиперграфическим автоматом над гиперграфами H_X, H_Y .

3. Основной результат

В настоящем разделе исследуется вопрос о том, как универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с p -определимыми ребрами определяются своими полугруппами входных сигналов.

Обозначим через $Z(H_X, H_Y)$ – множество правых нулей полугруппы $S(H_X, H_Y)$, а через $U(H_X, H_Y)$ – множество всех левых единиц полугруппы $S(H_X, H_Y)$. Эти множества в полугруппе $S(H_X, H_Y)$ соответственно определяются по следующим формулам теории полугрупп: $\Phi(x) = (\forall y)(yx = x)$ и $\Psi(x) = (\forall y)(xy = y)$.

ЛЕММА 1. Пусть $H_X = (X, L_X), H_Y = (Y, L_Y)$ – эффективные гиперграфы с p -определимыми ребрами. Тогда элемент $z \in S(H_X, H_Y)$ является правым нулем полугруппы $S(H_X, H_Y)$ тогда и только тогда, когда найдутся $a \in X, b \in Y$ такие, что $z = (C_a, C_b)$, где C_a и C_b – постоянные отображения множества X соответственно в точки a и b .

Доказательство. В силу эффективности гиперграфа H_X константы вида $C_a : X \rightarrow \{a\}$ (где $a \in X$) являются эндоморфизмами гиперграфа H_X . Аналогично в силу эффективности гиперграфа H_Y все константы вида $C_b : X \rightarrow \{b\}$, где $b \in Y$, являются гомоморфизмами гиперграфа H_X в гиперграф H_Y . Тогда элемент $z = (C_a, C_b)$ принадлежит полугруппе $S(H_X, H_Y)$.

Для произвольной пары $s = (\mu, \pi) \in S$ выполняется:

$$s \cdot z = (\mu, \pi)(C_a, C_b) = (\mu C_a, \pi C_b) = (C_a, C_b) = z.$$

Значит, (C_a, C_b) – правый ноль полугруппы $S(H_X, H_Y)$, т.е. $(C_a, C_b) \in Z(H_X, H_Y)$.

Обратно, пусть $z = (\varphi, \psi)$ – правый ноль полугруппы $S(H_X, H_Y)$. Тогда для любого $d \in X$ и значений $a = \varphi(d), b = \psi(d), a \in X, b \in Y$ выполняется:

$$(\varphi, \psi) = (C_d, C_b)(\varphi, \psi) = (C_d \varphi, C_d \psi) = (C_{\varphi(d)}, C_{\psi(d)}) = (C_a, C_b),$$

т.е. $z = (\varphi, \psi) = (C_a, C_b)$, где C_a и C_b – постоянные отображения множества X соответственно в точки a и b .

ЛЕММА 2. Пусть $H_X = (X, L_X), H_Y = (Y, L_Y)$ – эффективные гиперграфы с p -определимыми ребрами. Тогда элемент $i \in S(H_X, H_Y)$ является левой единицей полугруппы $S(H_X, H_Y)$ тогда и только тогда, когда $i = (\Delta_X, \psi)$ для некоторого $\psi \in \text{Hom}(H_X, H_Y)$.

Доказательство. Пусть $i = (\Delta_X, \psi)$ для некоторого $\psi \in \text{Hom}(H_X, H_Y)$. Возьмем произвольный элемент $i_1 \in S(H_X, H_Y)$, $i_1 = (\varphi_1, \psi_1)$. Имеют место следующие равенства: $i \cdot i_1 = (\Delta_X, \psi) \cdot (\varphi_1, \psi_1) = (\Delta_X \cdot \varphi_1, \Delta_X \cdot \psi_1) = (\varphi_1, \psi_1) = i_1$. Это означает, что элемент i является левой единицей полугруппы $S(H_X, H_Y)$.

Обратно, пусть элемент $i = (\varphi, \psi)$ является левой единицей полугруппы $S(H_X, H_Y)$. Тогда для любого $i_1 = (\varphi_1, \psi_1)$, принадлежащего полугруппе $S(H_X, H_Y)$, выполняется: $i \cdot i_1 = (\varphi, \psi) \cdot (\varphi_1, \psi_1) = (\varphi \cdot \varphi_1, \varphi \cdot \psi_1) = (\varphi_1, \psi_1)$. Это возможно только в случае $\varphi = \Delta_X$. Следовательно, $i = (\Delta_X, \psi)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $H_X = (X, L_X), H_Y = (Y, L_Y)$ – эффективные гиперграфы с p -определимыми ребрами. Тогда для произвольных элементов $s, s_1 \in S(H_X, H_Y)$ следующие условия равносильны:

- 1) $s = (\varphi, \psi)$ и $s_1 = (\varphi, \psi_1)$ для некоторых $\varphi \in \text{End } H_X, \psi, \psi_1 \in \text{Hom}(H_X, H_Y)$;
- 2) $s \cdot i = s_1 \cdot i$ для некоторой левой единицы $i \in U(H_X, H_Y)$;

3) $s \cdot i = s_1 \cdot i$ для любой левой единицы $i \in U(H_X, H_Y)$.

Доказательство. Очевидно, что из 3) следует 2).

Пусть выполняется условие 1), т.е. $s = (\varphi, \psi)$ и $s_1 = (\varphi, \psi_1)$ для некоторых $\varphi \in \text{End } H_X$, $\psi, \psi_1 \in \text{Hom}(H_X, H_Y)$, и пусть i – левая единица полугруппы $S(H_X, H_Y)$, т.е. $i \in U(H_X, H_Y)$. Согласно лемме 2 $i = (\Delta_X, \psi')$ для некоторого $\psi' \in \text{Hom}(H_X, H_Y)$. Имеют место равенства: $s \cdot i = (\varphi, \psi) \cdot (\Delta_X, \psi') = (\varphi \Delta_X, \varphi \psi') = (\varphi, \psi_1) \cdot (\Delta_X, \psi') = s_1 \cdot i$, т.е. выполняется условие 3).

Остается показать, что из 2) следует 1). Пусть для элементов $s = (\varphi, \psi)$, $s_1 = (\varphi_1, \psi_1)$ выполняется $s \cdot i = s_1 \cdot i$ для некоторой левой единицы $i \in U(H_X, H_Y)$. Согласно лемме 2 $i = (\Delta_X, \psi')$ для некоторого $\psi' \in \text{Hom}(H_X, H_Y)$. Имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} s \cdot i &= (\varphi, \psi) \cdot (\Delta_X, \psi') = (\varphi \Delta_X, \varphi \psi') = (\varphi, \varphi \psi'), \\ s_1 \cdot i &= (\varphi_1, \psi_1) \cdot (\Delta_X, \psi') = (\varphi_1 \Delta_X, \varphi_1 \psi') = (\varphi_1, \varphi_1 \psi'). \end{aligned}$$

Значит, $(\varphi, \varphi \psi') = (\varphi_1, \varphi_1 \psi')$. Следовательно, $\varphi = \varphi_1$, т.е. выполняется условие 1). Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $H_X = (X, L_X)$, $H_Y = (Y, L_Y)$ – эффективные гиперграфы с p -определимыми ребрами. Тогда формула

$$\Omega(x, y) = \Phi(x) \wedge \Phi(y) \wedge (\forall i)(\Psi(i) \Rightarrow x \cdot i = y \cdot i)$$

теории полугрупп определяет отношение эквивалентности ε на множестве правых нулей $Z(H_X, H_Y)$ такое, что выполняются следующие условия:

- 1) для любых элементов $s, s_1 \in Z(H_X, H_Y)$ выполняется $s \equiv s_1(\varepsilon)$ тогда и только тогда, когда $s = (C_a, C_b)$, $s_1 = (C_a, C_{b_1})$ для некоторых $a \in X, b, b_1 \in Y$;
- 2) для любого правого нуля $s = (C_a, C_b)$ полугруппы $S(H_X, H_Y)$ класс эквивалентности $\varepsilon(s) = \{(C_a, C_y) : y \in Y\}$.

Доказательство. В самом деле, нетрудно проверить, что отношение ε рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. является эквивалентностью на множестве правых нулей $Z(H_X, H_Y)$. Пусть для произвольных элементов $s, s_1 \in Z(H_X, H_Y)$ выполняется $s \equiv s_1(\varepsilon)$. Согласно лемме 1 $s = (C_a, C_b)$, $s_1 = (C_{a_1}, C_{b_1})$. По определению отношения ε имеем: $s \cdot i = s_1 \cdot i$ для любого $i \in U(H_X, H_Y)$. Согласно лемме 2 имеем $C_a = C_{a_1}$. Обратно, пусть $s = (C_a, C_b)$, $s_1 = (C_a, C_{b_1})$ для некоторых $a \in X, b, b_1 \in Y$. Тогда согласно лемме 2 $s \cdot i = s_1 \cdot i$ для любой левой единицы $i \in U(H_X, H_Y)$. По определению отношения ε получаем $s \equiv s_1(\varepsilon)$.

Для любых элементов $s, s_1 \in Z(H_X, H_Y)$ выполняется $s \equiv s_1(\varepsilon)$ тогда и только тогда, когда $s = (C_a, C_b)$, $s_1 = (C_a, C_{b_1})$ для некоторых $a \in X, b, b_1 \in Y$. Это означает, что $\varepsilon(s) = \{(C_a, C_y) : y \in Y\}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $H_X, H_Y, H_{X_1}, H_{Y_1}$ – эффективные гиперграфы с p -определимыми ребрами, f – изоморфизм гиперграфа H_X на гиперграф H_{X_1} , g – изоморфизм гиперграфа H_Y на гиперграф H_{Y_1} и отображение $\pi : S(H_X, H_Y) \rightarrow S(H_{X_1}, H_{Y_1})$ определяется по формуле $\pi = (f^2, f \times g)$, т.е. для любых $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$ выполняется равенство $\pi(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), (f \times g)(\psi))$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) отображение π является изоморфизмом полугруппы $S(H_X, H_Y)$ на полугруппу $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$;
- 2) упорядоченная тройка отображений $\gamma = (f, \pi, g)$ является изоморфизмом автомата $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ на автомат $\text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$;

- 3) если для отображения $\chi : S(H_X, H_Y) \longrightarrow S(H_{X_1}, H_{Y_1})$ упорядоченная тройка отображений $\gamma = (f, \chi, g)$ является изоморфизмом автомата $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ на автомат $\text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$, то $\chi = \pi$.

Доказательство. Пусть отображение $\pi : S(H_X, H_Y) \longrightarrow S(H_{X_1}, H_{Y_1})$ определяется по формуле $\pi = (f^2, f \times g)$, где $f : H_X \longrightarrow H_{X_1}$, $g : H_Y \longrightarrow H_{Y_1}$ – изоморфизмы гиперграфов. Так как для произвольной пары $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$ отображение φ – эндоморфизм гиперграфа H_X и отображение ψ – гомоморфизм гиперграфа H_X в гиперграф H_Y , то очевидно образ $f^2(\varphi) = f^{-1}\varphi f$ – эндоморфизм гиперграфа H_{X_1} и образ $f \times g(\psi) = f^{-1}\psi g$ – гомоморфизм гиперграфа H_{X_1} в гиперграф H_{Y_1} . Это означает, что $\pi(\varphi, \psi) \in S(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Ясно, что π – биекция $S(H_X, H_Y)$ на $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$.

Возьмем произвольные элементы $s = (\varphi, \psi)$, $s_1 = (\varphi_1, \psi_1)$ полугруппы $S(H_X, H_Y)$. Так как $ss_1 = (\varphi\varphi_1, \varphi\psi_1)$, то выполняются равенства

$$\begin{aligned} \pi(s) \cdot \pi(s_1) &= \pi(\varphi, \psi) \cdot \pi(\varphi_1, \psi_1) = (f^2(\varphi), (f \times g)(\psi)) \cdot (f^2(\varphi_1), (f \times g)(\psi_1)) = \\ &= (f^2(\varphi)f^2(\varphi_1), f^2(\varphi)(f \times g)(\psi_1)) = (f^{-1}\varphi f f^{-1}\varphi_1 f, f^{-1}\varphi f f^{-1}\psi_1 g) = \\ &= (f^{-1}\varphi\varphi_1 f, f^{-1}\varphi\psi_1 g) = (f^2(\varphi\varphi_1), (f \times g)(\varphi\psi_1)) = \pi(ss_1). \end{aligned}$$

Таким образом, π – изоморфизм полугруппы $S(H_X, H_Y)$ на полугруппу $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$, т.е. справедливо утверждение 1).

Более того, для произвольных $x \in X$, $s = (\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$ имеют место равенства:

$$\begin{aligned} f(\delta(x, s)) &= f(\varphi(x)) = f(\varphi(f^{-1}(f(x)))) = f^{-1}\varphi f(f(x)) = f^2(\varphi)(f(x)) = \\ &= \delta_1(f(x), (f^2(\varphi), (f \times g)(\psi))) = \delta_1(f(x), \pi(s)), \\ g(\lambda(x, s)) &= g(\psi(x)) = g(\psi(f^{-1}(f(x)))) = f^{-1}\psi g(f(x)) = \\ &= (f \times g)(\psi)(f(x)) = \lambda_1(f(x), (f^2(\varphi), (f \times g)(\psi))) = \lambda_1(f(x), \pi(s)). \end{aligned}$$

Это означает, что $\gamma = (f, \pi, g)$ является изоморфизмом автомата $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ на автомат $\text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$, т.е. справедливо утверждение 2).

Пусть для отображения $\chi : S(H_X, H_Y) \longrightarrow S(H_{X_1}, H_{Y_1})$ упорядоченная тройка отображений $\gamma = (f, \chi, g)$ – изоморфизм автомата $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ на автомат $\text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Тогда для любых элементов $x \in X$, $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$ имеют место равенства:

$$f(\delta(x, s)) = \delta_1(f(x), \chi(s)), \quad g(\lambda(x, s)) = \lambda_1(f(x), \chi(s)).$$

По определению универсального гиперграфического автомата выполняются равенства:

$$\delta(x, s) = \delta(x, (\varphi, \psi)) = \varphi(x), \quad \lambda(x, s) = \lambda(x, (\varphi, \psi)) = \psi(x).$$

Обозначим $\chi(s) = (\varphi_1, \psi_1)$, тогда $f(\varphi(x)) = \varphi_1(f(x))$, $g(\psi(x)) = \psi_1(f(x))$, т.е. $\varphi f = f\varphi_1$, $\psi g = f\psi_1$, следовательно, $\varphi_1 = f^{-1}\varphi f = f^2(\varphi)$, $\psi_1 = f^{-1}\psi g = (f \times g)(\psi)$. Значит, $\chi = (f^2, f \times g) = \pi$, т.е. справедливо утверждение 3). Лемма доказана.

Описанный в лемме 5 с помощью изоморфизмов гиперграфов $f : H_X \longrightarrow H_{X_1}$, $g : H_Y \longrightarrow H_{Y_1}$ изоморфизм $\pi = (f^2, f \times g)$ полугрупп входных сигналов универсальных гиперграфических автоматов $\text{Atm}(H_X, H_Y)$, $\text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$ называется каноническим изоморфизмом таких полугрупп. Помимо канонических изоморфизмов такие полугруппы могут иметь иные, более сложные изоморфизмы. Например, для произвольного натурального числа p рассмотрим универсальный гиперграфический автомат $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ над эффективными гиперграфами $H_X = (X, L_X)$, $H_Y = (Y, L_Y)$, ребра которых образуют разбиения множеств вершин X и Y на такие классы эквивалентностей ε_X и ε_Y , что каждый класс эквивалентности содержит более p вершин. Очевидно, что H_X, H_Y – эффективные гиперграфы с p -определимыми

ребрами. Для элементов $x \in X$ произвольно выберем такие автоморфизмы g_x гиперграфа H_Y , которые сохраняют все классы эквивалентности ε_Y , т.е. выполняется $g_x(r) = r$ для любого $x \in X$ и любого ребра $r \in L_Y$.

Для произвольных отображений $\varphi : X \rightarrow X, \psi : X \rightarrow Y$ обозначим $\pi(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi^\varphi)$, где отображение $\psi^\varphi : X \rightarrow Y$ определяется по формуле: $\psi^\varphi(x) = g_{\varphi(x)}(\psi(x))$ для всех $x \in X$. Покажем, что π является автоморфизмом полугруппы входных сигналов $S(H_X, H_Y)$ универсального гиперграфического автомата $\text{Atm}(H_X, H_Y)$. Если $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$, то φ – эндоморфизм гиперграфа H_X и ψ – гомоморфизм гиперграфа H_X в гиперграф H_Y . Убедимся, что в этом случае отображение $\psi^\varphi : X \rightarrow Y$ также будет гомоморфизмом гиперграфа H_X в гиперграф H_Y . Пусть l – некоторое ребро гиперграфа H_X . По определению гомоморфизма $\psi : H_X \rightarrow H_Y$ найдется такое ребро l' гиперграфа H_Y , что $\psi(l) \subset l'$. С другой стороны, для любого элемента $x \in X$ по определению автоморфизма $g_x : H_Y \rightarrow H_Y$ выполняется равенство $g_x(l') = l'$. Тогда для любого элемента $a \in l$ выполняется условие $\psi^\varphi(a) = g_{\varphi(a)}(\psi(a)) \subset g_{\varphi(a)}(l') = l'$. Следовательно, $\psi^\varphi(l) \subset l'$, ψ^φ – гомоморфизм гиперграфа H_X в гиперграф H_Y и элемент $\pi(\varphi, \psi)$ принадлежит полугруппе $S(H_X, H_Y)$. Значит, $\pi : S(H_X, H_Y) \rightarrow S(H_X, H_Y)$.

Возьмем произвольные элементы $(\varphi, \psi), (\varphi_1, \psi_1) \in S(H_X, H_Y)$. По определению имеет место равенство: $(\varphi, \psi) \cdot (\varphi_1, \psi_1) = (\varphi\varphi_1, \varphi\psi_1)$. Обозначим $\varphi\varphi_1 = \varphi', \varphi\psi_1 = \psi'$. Тогда $\pi((\varphi, \psi) \cdot (\varphi_1, \psi_1)) = \pi(\varphi', \psi') = (\varphi', \psi'^{\varphi'})$. По определению

$$\pi(\varphi, \psi) \cdot \pi(\varphi_1, \psi_1) = (\varphi, \psi^\varphi) \cdot (\varphi_1, \psi_1^{\varphi_1}) = (\varphi\varphi_1, \varphi\psi_1^{\varphi_1}) = (\varphi', \psi'^{\varphi'}),$$

т.к. для любого $x \in X$ выполняется

$$\varphi\psi_1^{\varphi_1}(x) = \psi_1^{\varphi_1}(\varphi(x)) = g_{\varphi_1(\varphi(x))}(\psi_1(\varphi(x))) = g_{\varphi\varphi_1(x)}(\varphi\psi_1(x)) = g_{\varphi'(x)}(\psi'(x)) = \psi'^{\varphi'}(x).$$

Это означает, что π – эндоморфизм полугруппы $S(H_X, H_Y)$.

Покажем, что для различных $s, s_1 \in S(H_X, H_Y)$ их образы $\pi(s), \pi(s_1)$ также различны. Очевидно, что это выполняется для всех (φ, ψ) и $(\varphi_1, \psi_1) \in S(H_X, H_Y)$, когда $\varphi \neq \varphi_1$. Рассмотрим теперь $(\varphi, \psi), (\varphi, \psi_1) \in S(H_X, H_Y)$, где $\psi \neq \psi_1$. Поскольку $\psi \neq \psi_1$, то найдется такой $x \in X$, что $\psi(x) \neq \psi_1(x)$. В силу того, что $g_{\varphi(x)}$ – биекция, выполняются следующие условия: $\psi^\varphi(x) = g_{\varphi(x)}(\psi(x)) \neq g_{\varphi(x)}(\psi_1(x)) = \psi_1^\varphi(x)$, т.е. $\psi^\varphi \neq \psi_1^\varphi$. Значит, $\pi(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi^\varphi) \neq (\varphi, \psi_1^\varphi) = \pi(\varphi, \psi_1)$. Следовательно, отображение π взаимно однозначное.

Покажем теперь, что π – сюръекция.

Рассмотрим произвольный элемент $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$. Для любого элемента $x \in X$ найдется элемент $y \in Y$, для которого $\psi(x) = y$. Поскольку $g_{\varphi(x)}$ – автоморфизм, сохраняющий ребра, то найдется такой элемент $z \in Y$, что $g_{\varphi(x)}(z) = y$ и, значит, $z \equiv y(\varepsilon_Y)$. Обозначим $z = \psi'(x)$. В результате получаем отображение $\psi' : X \rightarrow Y$, для которого при любом $x \in X$ выполняется $\psi'(x) \equiv \psi(x)(\varepsilon_Y)$. Очевидно, что по построению для любого $x \in X$ выполняется равенство $\psi'(x) = g_{\varphi(x)}^{-1}(\psi(x))$. Так как $\psi \in \text{Hom}(H_X, H_Y)$, то для любого ребра l гиперграфа H_X найдется такое ребро l' гиперграфа H_Y , что $\psi(l) \subset l'$ и, значит, $\psi'(x)(l) \subset l'$. Следовательно, ψ' – гомоморфизм гиперграфа H_X в гиперграф H_Y , удовлетворяющий для любого $x \in X$ свойству $\psi'^\varphi(x) = g_{\varphi(x)}(\psi'(x)) = g_{\varphi(x)}(g_{\varphi(x)}^{-1}(\psi(x))) = \psi(x)$. Следовательно, $\pi(\varphi, \psi') = (\varphi, \psi'^\varphi) = (\varphi, \psi)$ и отображение π сюръективно.

Таким образом, отображение $\pi : S(H_X, H_Y) \rightarrow S(H_X, H_Y)$ является автоморфизмом полугруппы $S(H_X, H_Y)$.

Ясно, что в общем случае этот автоморфизм не будет каноническим в силу произвольного построения семейства автоморфизмов $g_x : H_Y \rightarrow H_Y, (x \in X)$.

Основной результат этого раздела показывает, что универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с p -определимыми ребрами полностью определяются своими полугруппами входных сигналов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\text{Atm}(H_X, H_Y), \text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$ – универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с p -определимыми ребрами H_X, H_Y и H_{X_1}, H_{Y_1} соответственно. Тогда полугруппы входных сигналов этих автоматов изоморфны в том и только том случае, если автоматы $\text{Atm}(H_X, H_Y), \text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$ изоморфны.

Доказательство. По определению из изоморфизма автоматов $\text{Atm}(H_X, H_Y), \text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$ следует изоморфизм полугрупп входных сигналов этих автоматов.

Обратно, пусть $\pi : S(H_X, H_Y) \rightarrow S(H_{X_1}, H_{Y_1})$ – изоморфизм полугруппы $S(H_X, H_Y)$ на полугруппу $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Изоморфизм π сохраняет истинностные значения формул $\Phi(x), \Psi(x), \Omega(x, y)$ теории полугрупп. Следовательно π сохраняет правые нули этих полугрупп и, значит, отображает множество $Z(H_X, H_Y)$ правых нулей полугруппы $S(H_X, H_Y)$ на множество $Z(H_{X_1}, H_{Y_1})$ правых нулей полугруппы $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$, а множество $U(H_X, H_Y)$ левых единиц полугруппы $S(H_X, H_Y)$ на множество $U(H_{X_1}, H_{Y_1})$ левых единиц полугруппы $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Кроме того, согласно лемме 4 π^2 отображает отношение эквивалентности ε на множестве правых нулей $Z(H_X, H_Y)$ на отношение эквивалентности ε_1 на множестве правых нулей $Z(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Из леммы 1 для любых $a \in X, b \in Y$ пара $(C_a, C_b) \in Z(H_X, H_Y)$. При этом $\pi(C_a, C_b) = (C_{a_1}, C_{b_1})$ для некоторых $a_1 \in X_1, b_1 \in Y_1$, т.е. образ $\pi(C_a, C_b)$ является правым нулем полугруппы $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$, и π отображает класс эквивалентности $\varepsilon(C_a, C_b)$ на класс эквивалентности $\varepsilon_1(C_{a_1}, C_{b_1})$.

Этот факт позволяет определить отображения $f : X \rightarrow X_1, g_a : Y \rightarrow Y_1, (a \in X)$ по правилу: для любых $a \in X, b \in Y$ значения $f(a) = a_1, g_a(b) = b_1$, если $\pi(C_a, C_b) = (C_{a_1}, C_{b_1})$ для соответствующих $a_1 \in X_1, b_1 \in Y_1$. Тогда по определению выполняется равенство $\pi(C_a, C_{a_1}) = (C_{f(a)}, C_{g_a(a_1)})$.

Нетрудно проверить, что отображение f является биекцией множества X на множество X_1 и для любого $a \in X$ отображение g_a является биекцией множества Y на множество Y_1 . Действительно, сюръективность отображений f, g_a следует из равенства

$$\pi(Z(H_X, H_Y)) = Z(H_{X_1}, H_{Y_1}).$$

Кроме того, для любых $x_1, x_2 \in X, y \in Y$ эквивалентны следующие условия:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2), C_{f(x_1)} = C_{f(x_2)}, (C_{f(x_1)}, C_{g_{x_1}(y)}) &\equiv (C_{f(x_2)}, C_{g_{x_2}(y)})(\varepsilon_1), \\ \pi(C_{x_1}, C_y) &\equiv \pi(C_{x_2}, C_y)(\varepsilon_1), (C_{x_1}, C_y) \equiv (C_{x_2}, C_y)(\varepsilon), C_{x_1} = C_{x_2}, x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Значит, отображение f взаимно-однозначное и f – биекция множества X на множество X_1 .

Аналогично для любого $a \in X$ и любых $y_1, y_2 \in Y$ эквивалентны следующие условия:

$$\begin{aligned} g_a(y_1) = g_a(y_2), C_{g_a(y_1)} = C_{g_a(y_2)}, (C_{f(a)}, C_{g_a(y_1)}) &= (C_{f(a)}, C_{g_a(y_2)}), \\ \pi(C_a, C_{y_1}) &= \pi(C_a, C_{y_2}), C_{y_1} = C_{y_2}, y_1 = y_2. \end{aligned}$$

Значит, отображение g_a взаимно-однозначное и g_a – биекция множества Y на множество Y_1 .

Для произвольных $(\varphi, \psi) \in S$ и $a \in X$ рассмотрим значения $\varphi(a) = b, \psi(a) = d$. Тогда для любого $c \in Y$ имеет место

$$(C_a, C_c) \cdot (\varphi, \psi) = (C_a\varphi, C_a\psi) = (C_{\varphi(a)}, C_{\psi(a)}) = (C_b, C_d),$$

и, значит, для гомоморфизма π выполняется равенство:

$$\pi(C_a, C_c) \cdot \pi(\varphi, \psi) = \pi(C_b, C_d). \quad (1)$$

По определению отображений f, g_a ($a \in X$) вычислим значения

$$\pi(C_a, C_c) = (C_{f(a)}, C_{g_a(c)}), \quad \pi(C_b, C_d) = (C_{f(b)}, C_{g_b(d)}).$$

Обозначим $\pi(\varphi, \psi) = (\varphi_1, \psi_1)$. Тогда по формуле (1) получаем

$$(C_{f(a)}, C_{g_a(c)}) \cdot (\varphi_1, \psi_1) = (C_{f(b)}, C_{g_b(d)}).$$

С другой стороны, по определению умножения выполняются равенства

$$(C_{f(a)}, C_{g_a(c)}) \cdot (\varphi_1, \psi_1) = (C_{f(a)}\varphi_1, C_{f(a)}\psi_1) = (C_{\varphi_1(f(a))}, C_{\psi_1(f(a))}) = (C_{f(b)}, C_{g_b(d)})$$

и, следовательно, $\varphi_1(f(a)) = f(b) = f(\varphi(a))$, $\psi_1(f(a)) = g_b(d) = g_{\varphi(a)}(\psi(a))$.

Таким образом, выполняются равенства $f\varphi_1 = \varphi f$, $\varphi_1 = f^{-1}\varphi f = f^2(\varphi)$ и $\psi_1 = \psi^\varphi$, где отображение $\psi^\varphi : X_1 \rightarrow Y_1$, определяется по формуле: $\psi^\varphi(f(a)) = g_{\varphi(a)}(\psi(a))$ для всех $a \in X$.

В результате получаем, что для любой пары $(\varphi, \psi) \in S$ выполняется равенство

$$\pi(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), \psi^\varphi). \quad (2)$$

Обозначим $f^2 = \pi_1$. Очевидно, что отображение π_1 является биекцией полугруппы $\text{End } H_X$ на полугруппу $\text{End } H_{X_1}$. Кроме того, выполняется равенство:

$$\begin{aligned} \pi_1(\varphi\varphi') &= f^2(\varphi\varphi') = f^{-1}\varphi\varphi'f = f^{-1}\varphi ff^{-1}\varphi'f = (f^{-1}\varphi f)(f^{-1}\varphi'f) = f^2(\varphi)f^2(\varphi') = \\ &= \pi_1(\varphi)\pi_1(\varphi'). \end{aligned}$$

Следовательно, отображение π_1 является изоморфизмом полугруппы $\text{End } H_X$ на полугруппу $\text{End } H_{X_1}$. Согласно основному результату работы [17] отображение f является изоморфизмом гиперграфа H_X на гиперграф H_{X_1} .

Покажем, что для любого $a \in X$ биекция g_a является изоморфизмом гиперграфа H_Y на гиперграф H_{Y_1} . Рассмотрим произвольное ребро $l \in L_Y$. По определению гиперграфа с p -определимыми ребрами всякое ребро содержит по меньшей мере $p+1$ вершин, т. е. найдутся различные вершины $y_1, \dots, y_{p+1} \in Y$, принадлежащие ребру l .

Возьмем произвольное ребро $r \in L_X$. В силу p -определимости гиперграфа H_X это ребро содержит по меньшей мере $p+1$ вершин $x_1, \dots, x_{p+1}$.

Построим отображение $\psi : X \rightarrow Y$ по правилу:

$$\psi(x) = \begin{cases} y_i, & \text{если } x = x_i \text{ для некоторого } 1 \leq i \leq p; \\ y_{p+1}, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ясно, что отображение ψ будет гомоморфизмом гиперграфа H_X в гиперграф H_Y .

Рассмотрим элемент $(C_a, \psi) \in S$ для произвольного $a \in X$. Тогда по формуле (2) и определению отображения f имеем $\pi(C_a, \psi) = (C_{f(a)}, \psi^{C_a})$, где $\psi^{C_a}(f(x_i)) = g_{C_a(x_i)}(\psi(x_i)) = g_a(y_i)$ для всех $i = \overline{1, p+1}$. Ясно, что $\psi^{C_a} \in \text{Hom}(H_{X_1}, H_{Y_1})$.

Поскольку отображение f – изоморфизм гиперграфа H_X на гиперграф H_{X_1} , то вершины $f(x_1), \dots, f(x_{p+1})$ однозначно определяют ребро $r_1 = f(r)$, $r_1 \in L_{X_1}$. Тогда условие $\psi^{C_a} \in \text{Hom}(H_{X_1}, H_{Y_1})$ равносильно тому, что множество

$$\{\psi^{C_a}(f(x_1), \dots, \psi^{C_a}(f(x_{p+1})))\} = \{g_a(y_1), \dots, g_a(y_{p+1})\}$$

– ограниченное $(p+1)$ -элементное множество в гиперграфе H_{Y_1} , т. е. найдется ребро $l_1 \in L_{Y_1}$, для которого выполняется $\{g_a(y_1), \dots, g_a(y_{p+1})\} \subseteq l_1$. Это означает, что $g_a(l) \subseteq l_1$.

С другой стороны, аналогичным образом можно показать, что для ребра l_1 гиперграфа H_Y выполняется $g_a^{-1}(l_1) \subseteq l'$ для некоторого ребра $l' \in L_Y$. По построению множество $g_a^{-1}(l_1)$ содержит $p+1$ вершин $y_1, \dots, y_{p+1}$, которые принадлежат ребру $l \in L_Y$. В силу p -определимости ребер гиперграфа H_Y выполняется $l = l'$. Следовательно, $g_a^{-1}(l_1) \subseteq l$. Значит, $g_a(l) = l_1$.

Таким образом, биекция g_a является изоморфизмом гиперграфа H_Y на гиперграф H_{Y_1} . Тогда в силу леммы 5 упорядоченная тройка отображений $(f, (f^2, f \times g_a), g_a)$ является каноническим изоморфизмом автомата $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ на автомат $\text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Теорема доказана.

Таким образом, полученный результат показывает, что универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с p -определимыми ребрами определяются с точностью до изоморфизма своими полугруппами входных сигналов.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\text{Atm}(H_X, H_Y), \text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$ – универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с p -определимыми ребрами H_X, H_Y и H_{X_1}, H_{Y_1} соответственно. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) гиперграфы H_X, H_Y изоморфны соответственно гиперграфам H_{X_1}, H_{Y_1} ;
- 2) существует изоморфизм полугруппы входных сигналов $S(H_X, H_Y)$ автомата $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ на полугруппу входных сигналов $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$ автомата $\text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$;
- 3) существует канонический изоморфизм полугруппы входных сигналов $S(H_X, H_Y)$ автомата $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ на полугруппу входных сигналов $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$ автомата $\text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$;
- 4) автоматы $\text{Atm}(H_X, H_Y), \text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$ изоморфны.

Доказательство. Из теоремы 1 следует равносильность условий 2) и 4). По определению изоморфизма автоматов из условия 4) следует условие 1). В силу леммы 5 из условия 1) следуют условия 3), 4). Очевидно, что из условия 3) следует условие 2). Следствие доказано.

4. Заключение

Таким образом, полученный результат показывает, что универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с p -определимыми ребрами полностью (с точностью до изоморфизма) определяются полугруппами своих входных сигналов. Это обосновывает изучение таких автоматов с помощью исследования их полугрупп входных символов и, в частности, обосновывает актуальность исследования взаимосвязи свойств таких автоматов и их полугрупп входных символов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высшая школа, 1994. 192 с.
2. Molchanov V. A. Semigroups of mappings on graphs // Semigroup Forum. 1983. № 27. P. 155–199.
3. Свердловская тетрадь: Сборник нерешенных проблем теории полугрупп. Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1979. 41 с.
4. Лендер В. Б. Об эндоморфизмах проективных геометрий // Исследования алгебраических систем (Матем.записки Урал. ун-та). 1984. С. 48–50.

5. Молчанов В. А. Как проективные плоскости определяются своими полугруппами // Теория полугрупп и ее приложения. Полугруппы и связанные с ними алгебраические системы, Саратов. гос. ун-т. 1984. С. 42–50.
6. Molchanov V. A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols // *Semigroup Forum*. 2011. № 82. P.1–9.
7. Bretto A. *Hypergraph theory. An Introduction*. Cham: Springer, 2013. 133 p. DOI: 10.1007/978-3-319-00080-0.
8. Улам С. Нерешенные математические задачи. М. : Наука, 1964. 168 с.
9. Молчанов В. А., Хворостухина Е. В. О задаче абстрактной характеристики универсальных гиперграфических автоматов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. - Саратов: Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 2017. Т. 17, № 2. С. 148–159.
10. Молчанов В. А., Хворостухина Е. В. Об абстрактной определяемости универсальных гиперграфических автоматов полугруппами их входных сигналов // Материалы XIV Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященная 70-ти летию со дня рождения С. М. Воронина и Г. И. Архипова. – Саратов: Изд-во Саратовского гос. ун-та, Издательский центр «Наука», 2016. С. 67–69.
11. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. М. : Мир, 1972. Т. 1. 286 с.
12. Вагнер В. В. Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и ее приложения; Сб. научн. тр. 1965. № 1. С. 3–178.
13. Молчанов А. В. Полугруппы эндоморфизмов слабых p –гиперграфов // Известия вузов. Математика. Саратов. 2000. № 3(454). С. 80–83.
14. Molchanov A. V. On definability of hypergraphs by their semigroups of homomorphisms // *Semigroup Forum*. 2001. № 62. P. 53–65.
15. Молчанов А. В. Об определяемости гиперграфических автоматов их выходными функциями // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов. 1998. № 2. С. 74–84.
16. Хартсхорн Р. Основы проективной геометрии. М.: Мир, 1970. 161 с.
17. Хворостухина Е. В. Об одном классе гиперграфических автоматов // Теорет. проблемы информатики и ее приложений. Саратов. 2008. № 8. С. 112–118.

REFERENCES

1. Plotkin, B. I., Geenglaz, L. Ja., Gvaramija, A. A. 1992, *Algebraic structures in automata and databases theory*, River Edge, World Scientific, Singapore, NJ, 192 p.
2. Molchanov, V. A. 1983, “Semigroups of mappings on graphs“, *Semigroup Forum*, № 27, pp. 155–199.
3. *Sverdlovskaja tetrad: Sb. nereshjonnyh zadach po teorii polugrupp*. [Sverdlovsk notebook: A collection of unsolved problems of semigroup theory], 1979, Ural. univ., Sverdlovsk, 41 p.

4. Lender, V. B. 1984, “On edomorphisms of projective geometries“, *Issledovaniya algebraicheskikh sistem (Matem. zapiski Ural.un.)*, pp. 48–50.
5. Molchanov V. A. 1984, “Projective planes are determined by their semigroups“, *Teoriya polugrupp i ejo prilozheniya. Polugruppy i svjazannye s nimi algebraicheskie sistemy*, pp. 42–50.
6. Molchanov, V. 2011, “A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols“, *Semigroup Forum*, № 82, pp. 1–9.
7. Bretto, A. 2013, *Hypergraph theory. An Introduction*. Springer, Cham, 133 p. doi: 10.1007/978-3-319-00080-0
8. Ulam, S. 1960, *A Collection of Mathematical Problems*. Interscience, New York, 168 p.
9. Molchanov, V. A., Khvorostukhina, E. V. 2017, “On problem of abstract characterization of universal hypergraphic automata“, *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 17, iss. 2, pp. 148–159.
10. Molchanov, V. A., Khvorostukhina, E. V. 2016, “On problem of abstract definability of universal hypergraphic automata by semigroups of their input symbols“, *Materialy XIV Mezhdunarodnoj konferencii “Algebra i teoriya chisel: sovremennye problemy i prilozheniya“, posvjashhennaja 70-ti letiju so dnja rozhdenija S.M. Voronina i G.I. Arhipova (XIV Int. Conf. “Algebra and Number theory“)*, Saratov, pp. 67–69.
11. Clifford, A. H., Preston, G. B. 1961, *The algebraic theory of semigroups, volume 1*, American Mathematical society, Providence, 224 p.
12. Vagner, V. V. 1965, “Relation theory and algebra of partial mappings“, *Teoriya polugrupp i ejo prilozheniya, sbornik nauch.trud.*, № 1, pp. 3–178.
13. Molchanov, A. V. 2000, “Endomorphism semigroups of weak p -hypergraphs“, *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, vol. 44, № 3, pp. 77–80.
14. Molchanov, A. V. 2001, “On definability of hypergraphs by their semigroups of homomorphisms“, *Semigroup Forum*, № 62, pp. 53–65.
15. Molchanov, A. V. 1998, “Ob opredeljaemosti gipergraficheskikh avtomatov ih vyhodnymi funkcijami“, *Teoreticheskie problemy informatiki*, iss. 2, pp. 74–84.
16. Hartshorne, R. 2009, *Foundations of Projective Geometry*, New York, 190 p.
17. Khvorostukhina, E. V. 2008, “On a class of hypergraphic automata“, *Teoreticheskie problemy informatiki and its applications*, Saratov, iss. 8, pp. 112–118.

Получено 18.03.2017 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.