ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 517.925

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-244-258

Матричные уравнения систем фазовой синхронизации

С. С. Мамонов, И. В. Ионова, А. О. Харламова (г. Рязань)

Мамонов Сергей Станиславович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин физико-математического факультета Рязанского государственного университета имени С. А. Есенина (г. Рязань).
e-mail: s.mamonov@365.rsu.edu.ru

Ионова Ирина Викторовна — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин физико-математического факультета Рязанского государственного университета имени С. А. Есенина (г. Рязань).
e-mail: i.ionova@365.rsu.edu.ru

Харламова Анастасия Олеговна — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин физико-математического факультета Рязанского государственного университета имени С. А. Есенина (г. Рязань).
e-mail: a.harlamova@365.rsu.edu.ru

Аннотация

В статье рассматривается система матричных уравнений Лурье. Такая система имеет прикладное значение при исследовании асимптотической устойчивости состояний равновесия системы дифференциальных уравнений, нахождении областей притяжения состояний равновесия, определения условий существования предельных циклов для систем дифференциальных уравнений, исследовании глобальной устойчивости, скрытой синхронизации систем фазовой и частотно-фазовой автоподстройки частоты. Известно, что условия разрешимости матричных уравнений Лурье определяются «частотной теоремой Якубовича-Калмана». Для изучения нелинейных колебаний фазовых систем возникает необходимость нахождения решений матричных уравнений Лурье.

В данной статье рассматривается случай, когда матричное неравенство Ляпунова, входящее в состав уравнений Лурье, имеет матрицу с действительными собственными значениями, часть из которых могут быть нулевыми. Для такого случая получены необходимые и достаточные условия разрешимости уравнений Лурье и определен вид решений, что позволяет провести их спектральный анализ. Явный вид решений матричных уравнений дал возможность провести их геометрическую интерпретацию в зависимости от спектра, показать взаимосвязь уравнения линейной связи с квадратичными формами решений уравнений Лурье. В основе метода анализа матричных уравнений лежит подход, базирующийся на использовании прямого произведения матриц и применении обобщенно обратных матриц для нахождения решений систем линейных уравнений. Результаты работы позволили исследовать систему трех матричных уравнений возникающую при изучении фазовых систем частотно-фазовой автоподстройки частоты.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, матричные уравнения Лурье, скрытая синхронизация, система частотно-фазовой автоподстройки частоты.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

С. С. Мамонов, И. В. Ионов, А. О. Харламова. Матричные уравнения систем фазовой синхронизации // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2, С. 244–258.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 517.925

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-244-258

Matrix equations of the system of phase synchronization

S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova (Ryazan)

Mamonov Sergey Stanislavovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Ryazan State University named after S. A. Yesenin (Ryazan).

e-mail: s.mamonov@365.rsu.edu.ru

Ionova Irina Viktorovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematical Disciplines, Ryazan State University named after S. A. Yesenin (Ryazan).

e-mail: i.ionova@365.rsu.edu.ru

Kharlamova Anastasia Olegovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematical Disciplines, Ryazan State University named after S. A. Yesenin (Ryazan).

e-mail: a.harlamova@365.rsu.edu.ru

Abstract

The system of matrix Lurie equations is considered. Such a system is of practical importance in the study of the asymptotic stability of equilibrium states of a system of differential equations, finding the regions of attraction of equilibrium states, determining the conditions for the existence of limit cycles for systems of differential equations, investigating global stability, hidden synchronization of phase and frequency-frequency self-tuning systems. It is known that the conditions for the solvability of the matrix Lurie equations are determined by the "Yakubovich-Kalman frequency theorem". To study nonlinear oscillations of phase systems, it becomes necessary to find solutions of the matrix Lurie equations.

In this paper we consider the case when the matrix Lyapunov inequality, which is part of the Lurie equation, has a matrix with real eigenvalues, some of which may be zero. For such a case, necessary and sufficient conditions for the solvability of the Lurie equations are obtained and the form of the solutions is determined, which makes it possible to carry out their spectral analysis. The explicit form of the solutions of the matrix equations made it possible to make their geometric interpretation depending on the spectrum, to show the relationship of the linear connection equation to the quadratic forms of solutions of the Lurie equations. The method of analyzing matrix equations is based on an approach based on the use of a direct product of matrices and the application of generalized inverse matrices to find solutions to systems of linear equations. The results of the work made it possible to investigate the system of three matrix equations arising in the study of phase-frequency frequency-phase self-tuning systems.

Keywords: system of differential equations, matrix Lurie equations, hidden synchronization, frequency-phase frequency-locked loop.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova, 2019, "Matrix equations of the system of phase synchronization", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 244–258.

1. Введение

Рассмотрим систему матричных уравнений

$$AX + XA^T = L, \quad (1)$$

$$Xq = r, \quad (2)$$

где $A, X, L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $q, r \in \mathbb{R}^n$, "T" — транспонирование, X, L — неизвестные матрицы. Для матричного уравнения Ляпунова (1) известны условия существования решения X [1-4]. Если $\lambda_i(A)$, $i = \overline{1, n}$ — собственные значения матрицы A и $\lambda_i(A) + \lambda_j(A) \neq 0$, $i, j = \overline{1, n}$, то уравнение (1) однозначно разрешимо для любой матрицы L . Для случая $L < 0$ необходимые и достаточные условия разрешимости системы (1), (2) определяются частотной теоремой Якубовича–Калмана [5-7].

Одним из методов определения нелинейных колебаний системы дифференциальных уравнений является принцип тора [6]. Суть этого метода заключается в построении в фазовом пространстве рассматриваемой системы тороидального множества Ω , положительно инвариантного для её решений и не содержащего состояний равновесия. Далее выбирается сечение тороидального множества Ω плоскостью P , обладающее свойствами «бесконтактности» и «возвращаемости». На полученном сечении определяется функция Пуанкаре, которая под действием непрерывного оператора T отображает сечение множества Ω плоскостью P в себя, тогда по теореме Брауэра существует неподвижная точка оператора T , которая определяет начальные условия колебательного цикла. В настоящее время нет универсального подхода построения положительно инвариантного тороидального множества. Для построения тороидального множества используются решения матричных уравнений [6, 8-15]. В качестве границ положительно инвариантного множества предлагаются эллипсоиды и цилиндрические поверхности, определяемые решениями уравнений (1), (2).

Нахождения начальных условий циклов использует численные методы определения вращения векторного поля на границе тороидального множества. Вычисление вращения приводит к необходимости использовать не только условия существования матричных уравнений, но и определению самих решений [11].

В статье продолжены исследования работ [16, 17], рассматриваются матричные уравнения, когда матрица A имеет действительные собственные значения, среди которых могут быть и нулевые. Для уравнения (1) с матрицей A , для которой $\lambda_i(A) = -\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, сформулированы необходимые и достаточные условия разрешимости и получены решения системы уравнений (1), (2).

2. Матричное уравнение Ляпунова

Пусть $A_{n \times m}$, $B_{m \times k}$, $C_{k \times p}$ — произвольные матрицы, E_n — единичная матрица $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $[A_{n,m}] = colon(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}, a_{21}, \dots, a_{2m}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm})$, тогда справедливы соотношения [16, 17]

$$[ABC] = (A \otimes C^T) [B], \quad (3)$$

$$A_{n \times m} = (E_n \otimes [E_m]^T) ([A] \otimes E_m), \quad (4)$$

$$A_{n \times m} B_{m \times k} C_{k \times p} = (E_n \otimes [E_p]^T) ((A \otimes C^T) [B] \otimes E_p), \quad (5)$$

где " $\otimes$ " — прямое произведение матриц [1, 2, 4].

ТЕОРЕМА 1. Пусть для матрицы A справедливо равенство

$$Q = A \otimes E + E \otimes A, \det(A \otimes E + E \otimes A) = 0,$$

Q^+ — обобщенно обратная матрица [2] для матрицы Q , тогда для того чтобы уравнение (1) имело решение необходимо и достаточно чтобы $QQ^+[L] = [L]$. Решение уравнения (1) имеет вид $X = X_1 + X_2$, $[X_1] = Q^+[L]$, $[X_2] = (E - Q^+Q)[Y]$, где Y — произвольная матрица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя соотношение (3), уравнение (1) запишем в виде

$$(A \otimes E)[X] + (E \otimes A)[X] = [L]. \quad (6)$$

Пусть $Q = A \otimes E + E \otimes A$, Q^+ — обобщенно обратная матрица для матрицы Q , тогда необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (6) является выполнение соотношения $QQ^+[L] = [L]$ [2, стр.268], уравнение (6) имеет решение $[X]$

$$[X] = Q^+[L] + (E - Q^+Q)[Y] = [X_1] + [X_2], \quad (7)$$

где Y — произвольная матрица. Применяя (4) к соотношению (7), решение X можно записать в виде

$$X = (E \otimes [E]^T) ((Q^+[L] + [Y] - Q^+QY) \otimes E). \quad (8)$$

Теорема 1 доказана. $\square$

Рассмотрим уравнение (1) с матрицей $A = \text{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_m, -\alpha_1, \dots, -\alpha_k)$, где $\alpha_i + \alpha_j \neq 0, i, j = \overline{1, k}$.

Матрица A имеет m нулевых собственных значений и k действительных собственных значений отличных от нуля.

Введем обозначения $e_i^T = (\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, 0, \dots, 0)$, $e_i \in \mathbb{R}^n$, $E_{ni} = e_i \otimes e_i^T$, $E_{ni} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Первый индекс матрицы E_{ni} определяет её размерность, а второй индекс расположение единиц на диагонали.

Пусть A^+ обобщенно обратная матрица для матриц A , тогда справедливы соотношения

$$A = \sum_{i=1}^k (-\alpha_i) E_{n(m+i)}, \quad A^+ = \sum_{i=1}^k (-\alpha_i)^{-1} E_{n(m+i)}, \quad AA^+ = A^+A = \sum_{i=1}^k E_{n(m+i)}, \quad (9)$$

$$A^+ E_{ni} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^n E_{ni} = E_n, \quad E_{ni}^T = E_{ni}, \quad E_{ni} E_{nj} = 0, \quad i \neq j. \quad (10)$$

Для матрицы

$$\begin{aligned} Q_{n^2} &= A \otimes E_n + E_n \otimes A = E_{n1} \otimes A + \dots + E_{nm} \otimes A + \\ &+ E_{n(m+1)} \otimes (-\alpha_1 E_n + A) + \dots + E_{nn} \otimes (-\alpha_k E_n + A) \end{aligned} \quad (11)$$

непосредственно по определению показывается, что обобщенно обратная матрица имеет вид

$$\begin{aligned} Q_{n^2}^+ &= E_{n1} \otimes A^+ + \dots + E_{nm} \otimes A^+ + E_{n(m+1)} \otimes \\ &\otimes (-\alpha_1 E_n + A)^{-1} + \dots + E_{nn} \otimes (-\alpha_k E_n + A)^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

В силу Теоремы 1, матрица L уравнения (1) должна удовлетворять равенству

$$(Q_{n^2} Q_{n^2}^+ - E_{n^2})[L] = 0. \quad (13)$$

Для нахождения решения $[L]$ уравнения (13) используем Теорему 2 [2].

Пусть $D_{n^2} = Q_{n^2} Q_{n^2}^+ - E_{n^2}$, тогда с учетом (9), (10), (11), (12) получим

$$\begin{aligned} D_{n^2} &= (E_{n1} \otimes A + \dots + E_{nm} \otimes A + E_{n(m+1)} \otimes (-\alpha_1 E_n + A) + \dots + E_{nn} \otimes \\ &\otimes (-\alpha_k E_n + A)) \times (E_{n1} \otimes A^+ + \dots + E_{nm} \otimes A^+ + E_{n(m+1)} \otimes (-\alpha_1 E_n + A)^{-1} + \dots \\ &+ E_{nn} \otimes (-\alpha_k E_n + A)^{-1}) - E_{n^2} = -(E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes (E_{n1} + \dots + E_{nm}). \end{aligned} \quad (14)$$

Покажем, что обобщенно обратная матрица для D_{n^2} определяется соотношением $D_{n^2}^+ = D_{n^2}$. Действительно, так как

$$\begin{aligned} D_{n^2}^+ D_{n^2} &= (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes (E_{n1} + \dots + E_{nm}) = D_{n^2} D_{n^2}^+, \\ D_{n^2} D_{n^2}^+ D_{n^2} &= D_{n^2}, \quad D_{n^2}^+ D_{n^2} D_{n^2}^+ = D_{n^2}^+, \end{aligned} \quad (15)$$

то $D_{n^2}^+$ — обобщенно обратная матрица для D_{n^2} . В силу соотношения $D_{n^2} D_{n^2}^+ 0_{n^2} = \theta_{n^2}$ для уравнения (13) выполнены необходимые и достаточные условия разрешимости. Из Теоремы 2 [2] и (15) следует, что решение $[L]$ уравнения (13) имеет вид

$$[L] = (E_{n^2} - D_{n^2}^+ D_{n^2}) [Z] = [Z] - ((E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes (E_{n1} + \dots + E_{nm})) [Z], \quad (16)$$

где Z — произвольная матрица размерности $n \times n$. Используя (4), (5), (16), (10) получим

$$\begin{aligned} L &= (E_n \otimes [E_n]^T) ([L] \otimes E_n) = Z - (E_n \otimes [E_n]^T) \times \\ &\times (((E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes (E_{n1} + \dots + E_{nm})) [Z] \otimes E_n) = \\ &= Z - (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Z (E_{n1} + \dots + E_{nm}). \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, доказана теорема.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы уравнение (1) с матрицей $A = \text{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_m, -\alpha_1, \dots, -\alpha_k)$,

$\alpha_i + \alpha_j \neq 0$, $i, j = \overline{1, k}$ имело решение необходимо и достаточно, чтобы матрица L имела вид (17), где Z — произвольная матрица размерности $n \times n$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если матрица A не имеет нулевых собственных значений и $(\alpha_i + \alpha_j) \neq 0$, $i, j = \overline{1, n}$, то уравнение (1) при любой матрице L имеет решение X .

Пусть для уравнения (1) выполнены условия Теоремы 2, найдем решение уравнения (1). В силу соотношения (7) для матрицы X справедливо равенство $[X] = [X_1] + [X_2]$, где

$$[X_1] = Q_{n^2}^+ [L], \quad (18)$$

$$[X_2] = (E_{n^2} - Q_{n^2}^+ Q_{n^2}) [Y], \quad (19)$$

Y — произвольная матрица размерности $n \times n$. С учетом (18), (4), (5), (12), (9), (10) найдем X_1

$$\begin{aligned} X_1 &= (E \otimes [E]^T) ([X_1] \otimes E) = (E \otimes [E]^T) (Q_{n^2}^+ [L] \otimes E) = \\ &= (E_{n1} + \dots + E_{nm}) L A^+ + E_{n(m+1)} L (A - \alpha_1 E)^{-1} + \dots + E_{nn} L (A - \alpha_k E)^{-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Принимая во внимание (14), для матриц Q_{n^2} , $Q_{n^2}^+$, выполняется равенство

$$E_{n^2} - Q_{n^2}^+ Q_{n^2} = -D = (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes (E_{n1} + \dots + E_{nm}). \quad (21)$$

Используя (19), (21), (4), (5), найдем матрицу X_2

$$\begin{aligned} X_2 &= \left(E_{2n} \otimes [E_{2n}]^T \right) ([X_2] \otimes E_{2n}) = - \left(E_{2n} \otimes [E_{2n}]^T \right) (D[Y] \otimes E) = \\ &= \left(E \otimes [E]^T \right) (((E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes (E_{n1} + \dots + E_{nm})) [Y] \otimes E) = \\ &= (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y (E_{n1} + \dots + E_{nm})^T = (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y (E_{n1} + \dots + E_{nm}). \end{aligned} \quad (22)$$

Из (7), (20), (22) следует, что справедливо утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия Теоремы 2, тогда решение уравнения (1) имеет вид

$$\begin{aligned} X &= (E_{n1} + \dots + E_{nm}) LA^+ + E_{n(m+1)} LB_1 + \dots + \\ &+ E_{nn} LB_k + (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y (E_{n1} + \dots + E_{nm}), \end{aligned} \quad (23)$$

где $B_i = (A - \alpha_1 E)^{-1}$, $i = \overline{1, k}$, Y — произвольная матрица.

Пример 1. Рассмотрим уравнение (1) с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha > 0$, тогда по Теореме 2 в классе симметрических матриц получим, что матрица L определяется равенством $L = \begin{pmatrix} 0 & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}$. Из формулы (23) найдем множество решений уравнения (1)

$$X = E_{21} LA^+ + E_{22} L (A - \alpha E)^{-1} + E_{21} Y E_{21}.$$

Матрица A^+ в силу соотношений (9) имеет вид $A^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-\alpha)^{-1} \end{pmatrix}$. Справедливы равенства

$$B = (A - \alpha E)^{-1} = (-2\alpha)^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_{11} = E_{21} LA^+ = (-\alpha)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & l_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_{12} = E_{22} L (A - \alpha E)^{-1} = E_{22} LB = (-2\alpha)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}.$$

Пусть $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$, тогда с учетом (22) матрица X_2 имеет вид $X_2 = E_{21} Y E_{21} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $t = y_{11} \in \mathbb{R}$. Из Теоремы 3 получим, что решение X определяется соотношением

$$X = -\alpha^{-1} \begin{pmatrix} 0 & l_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - (2\alpha^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2l_{12} & l_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha^{-1} \begin{pmatrix} t\alpha & -l_{12} \\ -l_{12} & -2^{-1}l_{22} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Используя (24) найдем $\det X = \alpha^{-1} (-2^{-1}t\alpha l_{22} - l_{12}^2)$.

Если выполнено неравенство $l_{12}^2 > -2^{-1}t\alpha l_{22}$, то $\det X < 0$. Для матрицы L получим, что $\det L = -l_{12}^2$ при этом $\det L \geq 0$ только в случае когда $l_{12} = 0$.

Если $l_{12} = 0$, то $\det X = -2^{-1}t l_{22}$. Пусть $l_{12} = 0$, $l_{22} < 0$, тогда $\det L \leq 0$. Используя критерий Сильвестра для матрицы X , получим, что при $t < 0$ выполняется неравенство $\det X < 0$, а при $t > 0$ справедливы соотношения $\det X > 0$, $X = X^T > 0$, матрица X является положительно определенной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $A, B \in \mathbb{M}^{n \times m}$, $A_{n,m} = (a_{i,j})$, $B_{n,m} = (b_{i,j})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ под Адамаровым произведением матриц A и B будем понимать матрицу $C = A \circ B = (a_{ij}b_{ij})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть

$$A = \text{diag}(-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n), \quad (\alpha_i + \alpha_j) \neq 0, \quad i, j = \overline{1, n},$$

$$B_i = (A - \alpha_i E)^{-1} = \text{diag}(b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in}), \quad i = \overline{1, n}, \quad B = (b_{ij}), \quad i, j = \overline{1, n},$$

тогда решение уравнения (1) имеет вид $X = L \circ B$. Если $L < 0$, $B < 0$, то $X > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя условие Теоремы 4, $A = \text{diag}(-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n)$ и обозначения $e_i = \text{colon}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $E_{ni} = e_i \otimes e_i^T$, найдем матрицу Q

$$Q = (A \otimes E + E \otimes A)^{-1} = e_1 \otimes e_2^T \otimes (A - \alpha_2 E)^{-1} + \dots +$$

$$+ e_n \otimes e_n^T \otimes (A - \alpha_n E)^{-1} = E_{n1} \otimes B_1 + E_{n2} \otimes B_2 + \dots + E_{nn} \otimes B_n. \quad (25)$$

Соотношения (8), (25), (3), (5), (10) позволяют определить решение уравнения (1)

$$X = (E \otimes [E]^T) ((E_{n1} \otimes B_1 + E_{n2} \otimes B_2 + \dots + E_{nn} \otimes B_n) [L] \otimes E) =$$

$$= E_{n1} L B_1^T + E_{n2} L B_2^T + \dots + E_{nn} L B_n^T = L \circ B.$$

Используя, теорему Шура [2] для решения $X = L \circ B$ получим, что если $L < 0$, $B < 0$, то $X > 0$. Теорема 4 доказана. $\square$

3. Система матричных уравнений

Рассмотрим систему матричных уравнений (1), (2) относительно неизвестных матриц X , L . Пусть для уравнения (1) выполнены условия Теоремы 3, тогда его решение определяется соотношением (23). С учетом (23) для матрицы X справедливо равенство

$$X = (E_{n1} + \dots + E_{nm}) L A^+ + E_{n(m+1)} L B_1 + \dots + E_{nn} L B_k + X_2, \quad (26)$$

где $B_i = (A - \alpha_i E)^{-1}$, $i = \overline{1, k}$, $X_2 = (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y (E_{n1} + \dots + E_{nm})$, Y — произвольная матрица. Подставим решение X в уравнение линейной связи (2)

$$[(E_{n1} + \dots + E_{nm}) L A^+ q + E_{n(m+1)} L B_1 q + \dots + E_{nn} L B_k q] = [r - X_2 q]. \quad (27)$$

Используя формулу (3) и то, что $A^{+T} = A^+$, $B_i^T = B_i$, получим

$$[(E_{n1} + \dots + E_{nm}) L A^+ q + E_{n(m+1)} L B_1 q + \dots + E_{nn} L B_k q] =$$

$$= ((E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes q^T A^+ + E_{n(m+1)} \otimes q^T B_1 + \dots + E_{nn} \otimes q^T B_k) [L]. \quad (28)$$

Принимая во внимание условия Теоремы 2, для матрицы L справедливо соотношение

$$[L] = [Z] - ((E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes (E_{n1} + \dots + E_{nm})) [Z] =$$

$$= (E_{n2} - (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes (E_{n1} + \dots + E_{nm})) [Z], \quad (29)$$

где Z — произвольная матрица. С учетом (9), (10), (28) определим

$$[(E_{n1} + \dots + E_{nm}) L A^+ q + E_{n(m+1)} L B_1 q + \dots + E_{nn} L B_k q] =$$

$$= ((E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes q^T A^+ + E_{n(m+1)} \otimes q^T B_1 + \dots + E_{nn} \otimes q^T B_k) [Z]. \quad (30)$$

Принимая во внимание (27), (30), уравнение (2) можно записать в виде

$$K [Z] = [b], \quad (31)$$

где Z — произвольная матрица,

$$K = (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes q^T A^+ + E_{n(m+1)} \otimes q^T B_1 + \dots + E_{nn} \otimes q^T B_k, \quad K \in \mathbb{R}^{n \times n^2}, \quad (32)$$

$$b = r - X_2 q. \quad (33)$$

Введем следующие обозначения $q_0 = \text{colon}(0, \dots, 0, q_{m+1}, \dots, q_n)$,

$$\Delta_{q_0} = q^T A^+ A q = q_{m+1}^2 + \dots + q_n^2, \quad \Delta_{q^T B_i} = q^T B_i B_i q, \quad i = \overline{1, k}.$$

По определению обобщенно обратной матрицы показывается, что K^+ имеет вид

$$K^+ = \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes A q + E_{n(m+1)} \otimes \Delta_{q^T B_1}^{-1} B_1 q + \dots + E_{nn} \otimes \Delta_{q^T B_k}^{-1} B_k q. \quad (34)$$

В силу соотношений (32), (34) справедливы равенства

$$\begin{aligned} K K^+ &= \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes \underbrace{q^T A^+ A q}_{\Delta_{q_0}} + 0 + \dots + 0 + E_{n(m+1)} \otimes \Delta_{q^T B_1}^{-1} \underbrace{q^T B_1 B_1 q}_{\Delta_{q^T B_1}} + \dots + \\ &+ E_{nn} \otimes \Delta_{q^T B_k}^{-1} \underbrace{q^T B_k B_k q}_{\Delta_{q^T B_k}} = (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes 1 + (E_{n(m+1)} + \dots + E_{nn}) \otimes 1 = E_n, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} K K^+ &= \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes A q q^T A^+ + E_{n(m+1)} \otimes \Delta_{q^T B_1}^{-1} B_1 q q^T B_1 + \dots + \\ &+ E_{nn} \otimes \Delta_{q^T B_k}^{-1} B_k q q^T B_k, \quad K^+ \underbrace{K K^+}_{E_n} = K^+, \quad \underbrace{K K^+}_{E_n} K = K. \end{aligned} \quad (36)$$

Из (35) вытекает $K K^+ [b] = [b]$, следовательно для уравнения (31) выполнены необходимые и достаточные условия разрешимости. В силу Теоремы 2 [2] решение $[Z]$ уравнения (31) имеет вид

$$[Z] = K^+ [b] + (E_{n^2} - K^+ K) [W], \quad (37)$$

где W — произвольная матрица. Введем обозначения

$$[Z_1] = K^+ [b], \quad (38)$$

$$[Z_2] = (E_{n^2} - K^+ K) [W]. \quad (39)$$

Используя (4), (38), (34), (5), (33) найдем Z_1

$$\begin{aligned} Z_1 &= (E \otimes [E]^T) ([Z_1] \otimes E) = (E \otimes [E]^T) (K^+ [b] \otimes E) = \\ &= \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) r q^T A + E_{n(m+1)} r \Delta_{q^T B_1}^{-1} q^T B_1 + \dots + \\ &+ E_{nn} r \Delta_{q^T B_k}^{-1} q^T B_k - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) X_2 q q^T A - \\ &- \Delta_{q^T B_1}^{-1} E_{n(m+1)} X_2 q q^T B_1 - \dots - \Delta_{q^T B_k}^{-1} E_{nn} X_2 q q^T B_k. \end{aligned} \quad (40)$$

Учитывая, что $(E_{n1} + \dots + E_{nm}) X_2 = (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y (E_{n1} + \dots + E_{nm})$, $E_{n(m+i)} X_2 = 0$, $i = \overline{1, k}$ выражение (40) примет вид

$$\begin{aligned} Z_1 &= \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) r q^T A + E_{n(m+1)} r \Delta_{q^T B_1}^{-1} q^T B_1 + \dots + E_{nn} r \Delta_{q^T B_k}^{-1} q^T B_k - \\ &- \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y (E_{n1} + \dots + E_{nm}) q q^T A. \end{aligned} \quad (41)$$

В силу соотношений (4), (39), (36), (5) матрица Z_2 определяется равенством

$$\begin{aligned} Z_2 &= W - (E \otimes E^T) ((K^+ K) [W] \otimes E) = W - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) W A q q^T A^+ + \\ &+ \Delta_{q^T B_1}^{-1} E_{n(m+1)} W B_1 q q^T B_1 + \dots + \Delta_{q^T B_k}^{-1} E_{nn} W B_k q q^T B_k. \end{aligned} \quad (42)$$

Из (41), (42), (37), (38), (39) получим

$$\begin{aligned} Z = & \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) r q^T A + E_{n(m+1)} r \Delta_{q^T B_1}^{-1} q^T B_1 + \dots + E_{nn} r \Delta_{q^T B_k}^{-1} q^T B_k - \\ & - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y (E_{n1} + \dots + E_{nm}) q q^T A + W - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \times \\ & \times W A q q^T A^+ + \Delta_{q^T B_1}^{-1} E_{n(m+1)} W B_1 q q^T B_1 + \dots + \Delta_{q^T B_k}^{-1} E_{nn} W B_k q q^T B_k. \end{aligned} \quad (43)$$

Из соотношений (8), (29), (43) найдем вид матрицы L

$$\begin{aligned} L = & \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) r q^T A + E_{n(m+1)} r \Delta_{q^T B_1}^{-1} q^T B_1 + \dots + E_{nn} r \Delta_{q^T B_k}^{-1} q^T B_k - \\ & - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y (E_{n1} + \dots + E_{nm}) q q^T A + W - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \times \\ & \times W A q q^T A^+ + \Delta_{q^T B_1}^{-1} E_{n(m+1)} W B_1 q q^T B_1 + \dots + \Delta_{q^T B_k}^{-1} E_{nn} W B_k q q^T B_k - \\ & - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) r q^T A (E_{n1} + \dots + E_{nm}) - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y \times \\ & \times (E_{n1} + \dots + E_{nm}) q q^T A (E_{n1} + \dots + E_{nm}) - (E_{n1} + \dots + E_{nm}) W \times \\ & \times (E_{n1} + \dots + E_{nm}) + \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) W A q q^T A^+ (E_{n1} + \dots + E_{nm}). \end{aligned} \quad (44)$$

Тогда в силу (26), (44) решение X представимо в виде

$$\begin{aligned} X = & (E_{n1} + \dots + E_{nm}) L A^+ + E_{n(m+1)} L B_1 + \dots + E_{nn} L B_k + \\ & + (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y \times (E_{n1} + \dots + E_{nm}) = \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \times \\ & \times r q^T A A^+ - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y \times (E_{n1} + \dots + E_{nm}) q q^T A A^+ + \\ & + (E_{n1} + \dots + E_{nm}) W A^+ - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) W A \times q q^T A^+ A^+ - \\ & - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) r q^T A (E_{n1} + \dots + E_{nm}) A^+ - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \times \\ & \times Y (E_{n1} + \dots + E_{nm}) q q^T A (E_{n1} + \dots + E_{nm}) A^+ - (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \times \\ & \times W (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \times A^+ + \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) W A q q^T A^+ \times \\ & \times (E_{n1} + \dots + E_{nm}) A^+ + E_{n(m+1)} r \Delta_{q^T B_1}^{-1} q^T B_1 B_1 + \dots + E_{nn} r \Delta_{q^T B_k}^{-1} q^T B_k B_k + \\ & + E_{n(m+1)} W B_1 + \dots + E_{nn} W B_k + \Delta_{q^T B_1}^{-1} E_{n(m+1)} W B_1 q q^T B_1 B_1 + \dots \\ & + \Delta_{q^T B_k}^{-1} q^T E_{nn} W B_k q q^T B_k B_k + (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y (E_{n1} + \dots + E_{nm}), \end{aligned} \quad (45)$$

где W, Y — произвольные матрицы.

ТЕОРЕМА 5. Для того чтобы система матричных уравнений (1), (2) имела решение необходимо и достаточно чтобы выполнялись условия Теоремы 2. Матрицы X, L системы уравнений (1), (2) определяются соотношениями (44), (45).

4. Практическое приложение результатов

Пример 2. Рассмотрим уравнение (1) с матрицей $A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{pmatrix}, n = 2, m = 0, k = 2$. Следуя (41), (42) получим

$$Z_1 = \Delta_{q^T B_1}^{-1} E_{21} r q^T B_1 + \Delta_{q^T B_2}^{-1} E_{22} r q^T B_2,$$

$$Z_2 = W - \Delta_{q^T B_1}^{-1} E_{21} W B_1 q q^T B_1 + \Delta_{q^T B_2}^{-1} E_{22} W B_2 q q^T B_2, \quad W \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Из равенства $L = Z = Z_1 + Z_2$ найдем, что матрица $L = L^T$ имеет вид

$$L = L(t) = \begin{pmatrix} -2r_1\alpha_1q_1^{-1} - 2q_2\alpha_1tq_1^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} & t \\ t & -2r_2\alpha_2q_2^{-1} - 2q_1\alpha_2tq_2^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

где $t \in \mathbb{R}$.

В силу Теоремы 5 решение системы (1), (2) определяется равенством

$$X = X(t) = \begin{pmatrix} r_1q_1^{-1} + q_2tq_1^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} & -t(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \\ -t(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} & r_2q_2^{-1} + q_1tq_2^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \quad (47)$$

Пусть $B = \begin{pmatrix} (2\alpha_1)^{-1} & (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \\ (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} & (2\alpha_2)^{-1} \end{pmatrix}$, тогда с учетом (46), (47) выполняется соотношение $X = L \circ B$, что подтверждается результатами Теоремы 4. Система матричных уравнений (1), (2) имеет бесконечно много решений L, X .

ЛЕММА 1. Пусть существует t , для которого выполнены неравенства

$$f_1(t) = l_{11} = -2r_1\alpha_1q_1^{-1} - 2q_2\alpha_1tq_1^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} < 0, \quad (48)$$

$$f_2(t) = \begin{vmatrix} -2r_1\alpha_1q_1^{-1} - 2q_2\alpha_1tq_1^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} & t \\ t & -2r_2\alpha_2q_2^{-1} - 2q_1\alpha_2tq_2^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \end{vmatrix} > 0. \quad (49)$$

тогда существуют матрицы $X = X^T, L = L^T < 0$, определяемые формулами (46), (47), удовлетворяющие соотношениям (1), (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Доказательство Леммы 1 следует из Теоремы 5 и примера 2. Решения системы (1), (2) определяется числом решений системы уравнений (46), (47). $\square$

Пример 3. Рассмотрим систему уравнений (1) и (2) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.05 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = -0.1, \quad \alpha_2 = 0.8.$$

Найдем $\Gamma = -r^T q = -0.75, \nu = r^T A q = -0.12$. Матрицы L, X определяются соотношениями (46), (47). Используя неравенства (48), (49), определим условия, при которых $L < 0$. Получим, что если $t < T = 11.2$, то $f_1(t) < 0$. Если $t \in (T_1; T_2) = (-0.646; 4.7942)$, то $f_2(t) > 0$. Таким образом, при любом $t \in (-0.646; 4.7942)$ для матрицы L будет выполняться соотношение $L < 0$. Решение системы (1), (2) будет зависеть от переменной t и представимо в виде (47) $X = X_1(t)$. Пусть $R = 0.8$. Изобразим графически решение системы на концах интервала $(T_1; T_2)$, с помощью матриц $X_1(T_1), X_1(T_2)$. Определим линии $G_1 = \{x : x^T X_1(T_1)x = -R^2, R = 0.8\}, G_2 = \{x : x^T X_1(T_2)x = -R^2, R = 0.8\}$. Обозначим $l^T = c^T A, P_1 = \{x : c^T x = \sqrt{\Gamma}R, R = 0.8\}, P_2 = \{c^T x = -\sqrt{\Gamma}R, R = 0.8\}, P_3 = \{l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x = 0\}$. На рисунке 1 изображены линии $G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3$.

Рис.1 $\det X_1 < 0$

Пример 4. Рассмотрим систему матричных уравнений

$$A^T H + H A = L < 0, \quad (50)$$

$$H b = -c. \quad (51)$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$, $q = b = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ 1 \end{pmatrix} = -r$, $c^T b = -\Gamma < 0$, $c^T A b = \nu > 0$, $\alpha_1 = 0.2, \alpha_2 = 1.05$, $q_1 = 0.04$, $q_2 = -0.3$, тогда $\nu = 0.3234$, $\Gamma = 0.342$, матрицы L , $H = X$, определяются соотношениями (46), (47). Для неравенств (48), (49) получим, что если $t < T = 4.375$, то $f_1(t) < 0$. Если $t \in (T_1; T_2) = (-44.9545; 3.5358)$, то $f_2(t) > 0$. Таким образом, при любом $t \in (-44.9545; 3.5358)$ для матрицы L будет выполняться соотношение $L < 0$. Решение системы (50), (51) будет зависеть от переменной t и представимо в виде $X = X_2(t)$. Элементы матрицы $X_2(t) = X$ определяются формулой (47). Изобразим графически решение системы (50), (51) на концах интервала $(T_1; T_2)$. С помощью матриц $X_2(T_1)$, $X_2(T_2)$ определим линии $G_1 = \{x : x^T X_2(T_1) x = R^2\}$, $G_2 = \{x : x^T X_1(T_2) x = -R^2, R = 0.8\}$. На рисунке 2 изображены линии G_1 , G_2 , G_3 , P_1 , P_2 , P_3 .

Для построения положительно инвариантных и гиперболических множеств систем фазовых систем частотно-фазовой автоподстройки частоты возникает необходимость изучения системы трех матричных уравнений [12,18]

$$A^T H + H A = -L_1 - 2\alpha_1 H, \quad (52)$$

$$(A + 2kdc^T)^T H + H (A + 2kdc^T) = -L_2 + 2m_1 cc^T - 2\alpha_1 H, \quad (53)$$

$$H b = -c. \quad (54)$$

Решения уравнений (52), (53), (54) позволяют определить область начальных условий автомодуляционных колебаний и предложить эффективные численные методы обнаружения скрытой синхронизации [13].

Рис.2 $X_2 = X_2^T$

Изучение системы (52), (54) основано на использовании Теоремы 5, которая позволяет найти матрицы H , L_1 , для уравнений (52), (53), (54). Уравнение (53) рассматривается относительно неизвестной матрицы L_2 и значения m_1 . Практическое значение имеет представление матриц H , L_1 , L_2 через векторы $l^T = c^T A$, c , b [10-15]. Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Система матричных уравнений (52), (53), (54) относительно матриц H , L_1 , L_2 и значения m_1 , для случая, когда $H = H_1 > 0$, $A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$, $c_1 b_1^{-1} < 0$, $c_2 b_2^{-1} < 0$, $c^T b = -\Gamma < 0$, $c^T A b = \nu > 0$, $\varepsilon_0 = \Gamma^{-1} \nu$, $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ имеет решение $H = H_1$, L_1 , L_2 , такое что

$$H_1 = \gamma_1 c c^T + \gamma_2 (l + \nu \Gamma^{-1} c) (l + \nu \Gamma^{-1} c)^T, \quad (55)$$

$$\gamma_1 = \Gamma^{-1}, \quad \gamma_2 = (\Gamma (\alpha_2 - \varepsilon_0) (\varepsilon_0 - \alpha_1))^{-1}, \quad (56)$$

$$L_1 = 2\eta_1 (l + \eta_2 c) (l + \eta_2 c)^T, \quad \eta_1 = (\Gamma (\varepsilon_0 - \alpha_1))^{-1}, \quad \eta_2 = \alpha_1,$$

$$L_2 = 2\nu_1 (l + \nu_2 c) (l + \nu_2 c)^T, \quad \nu_1 = -(\alpha b_2 c_2)^{-1}, \quad \nu_2 = \alpha_1 + k c_2 b_2 (d_1 b_1^{-1} - d_2 b_2^{-1}),$$

$$m_1 = -\alpha^{-1} k^2 c_2 b_2 (d_1 b_1^{-1} - d_2 b_2^{-1})^2 - 2k d_1 b_1^{-1}.$$

Пример 5. Рассмотрим систему матричных уравнений (52), (53), (54) при $k = 0$, $m_2 = 0$, в этом случае система трех матричных уравнений эквивалентна системе двух матричных уравнений (1), (2). Пусть $A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$, $q = b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ 1 \end{pmatrix} = -r$, $c^T b = -\Gamma < 0$, $c^T A b = \nu > 0$, $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 1.05$, $b_1 = 0.04$, $b_2 = -0.3$, тогда $\nu = 0.3234$, $\Gamma = 0.342$, выполнены условия Леммы 2. Матрица H_1 , определяется соотношениями (55), (56). Изобразим графически решение системы (1), (2) при $R = 0.8$. На Рис.2 добавлена линия: $G_3 = \{x : x^T H_1 x = R^2\}$.

5. Заключение

В статье получены условия существования решения системы матричных уравнений Лурье. Практическая значимость полученных результатов заключается в возможности их использования при определении режимов скрытой синхронизации и синхронизации второго рода в системах фазовой и частотно-фазовой автоподстройки частоты [6-8,10-15,18].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984. 192с.
2. Прасолов В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука, 1996. 304с.
3. Чурилов А. Н. О разрешимости матричных неравенств // Математические заметки. 1984. Т.36, №5. С.725-732.
4. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655с.
5. Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. Устойчивость систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
6. Леонов Г. А., Буркин И. М., Шепелявый А. И. Частотные методы в теории колебаний. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992.
7. Якубович В. А. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // Докл. АН СССР. 1962. Т.143, №6. С.1304-1307.
8. Леонов Г. А., Смирнова В. Б. Математические проблемы теории фазовой синхронизации. СПб.: Наука, 2000. 400с.
9. Нелинейные системы. Частотные и матричные неравенства. Под ред. А.Х. Гелига, Г.А. Леонова, А.Л. Фрадкова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 608с.
10. Мамонов С. С., Ионова И. В. Исследование биений поисковой системы фазовой автоподстройки частоты // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2014. № 48. С. 52–59.
11. Ионова И. В. Численно-аналитический подход построения области начальных условий циклов второго рода. // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2015. № 3. С. 49–55.
12. Мамонов С. С., Харламова А. О. Квазисинхронные режимы фазовой системы // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2016. № 56. С. 45–51.

13. Мамонов С. С., Харламова А. О. Вынужденная синхронизация систем фазовой автоподстройки с запаздыванием // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2017. № 62. С. 26–35.
14. Мамонов С. С., Харламова А. О. Определение условий существования предельных циклов первого рода систем с цилиндрическим фазовым пространством // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т.19. №1. С. 67–76.
15. Харламова А. О. Предельные циклы первого рода фазовых систем. // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2016. № 16. С. 68–74.
16. Мамонов С. С. Решение матричных неравенств // Дифференциальные уравнения (качественная теория): межвуз. сб. науч. тр. Рязань: Изд-во РГПУ, 1994. С. 71–74.
17. Мамонов С. С., Ионова И. В. Решение системы матричных уравнений при наличии линейной связи // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 2. С. 90–102.
18. Шалфеев В. Д., Матросов В. В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Н. Новгород.: Изд-во ННГУ, 2013.

REFERENCES

1. Ikramov, Kh. D. 1984, "Numerical solution of matrix equations" Moscow, Nauka Publ., 192 p.
2. Prasolov, V. V. 1996. "Problems and theorems of linear algebra" Moscow, Nauka Publ., 304 p.
3. Churilov, A. N. 1984, "On the solvability of matrix inequalities" Mathematical Notes. vol. 36, no.5. pp.725-732.
4. Horn, R. & Johnson, Ch. 1989, "Matrix analysis" Moscow, Mir Publ., 655p.
5. Gelig, A. Kh. & Leonov, G. A. & Yakubovich, V. A. 1978, "The stability of nonlinear systems with nonunique equilibrium" Moscow, Nauka Publ., 400 p.
6. Leonov, G. A. & Burkin, I. M. & Shepelyavy, A. I. 1992, "Frequency methods in the theory of oscillations" SPb., Science Publ. of St. Petersburg State University.
7. Yakubovich, V. A. 1962. "Solution of certain matrix inequalities encountered in the theory of automatic control" Dokl. AN SSSR. vol.143, no. 6. pp. 1304-1307.
8. Leonov, G. A. & Smirnova, V. B. 2000, "Mathematical problems of the theory of phase synchronization" . SPb., Science Publ., 400 p.
9. "Nonlinear systems. Frequency and matrix inequalities" . Ed. Gelig, A. KH., Leonova, G.A., Fradkov, A.L., Moscow. FIZMATLIT, 2008. 608 p.
10. Mamonov, S. S. & Ionova, I. V. 2014, "Investigation of the beats of the search system of phase-locked loop frequency" Bulletin of the Ryazan State Radio Engineering University. no. 48. pp. 52–59.
11. Ionova, I. V. 2015, "A numerical-analytical approach to constructing a domain of initial conditions for cycles of the second kind" Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential equations. no. 3. pp. 49-55.

12. Mamonov, S. S. & Kharlamova, A.O. 2016, "Quasisynchronous regimes of the phase system" Bulletin of the Ryazan State Radio Engineering University. no. 56. pp. 45–51.
13. Mamonov, S. S. & Kharlamova, A.O. 2017, "Forced synchronization of phase-locked loop systems with delay" Bulletin of the Ryazan State Radio Engineering University. no. 62. pp. 26–35.
14. Mamonov, S. S. & Kharlamova, A.O. 2017, "Determination of the conditions for the existence of limit cycles of the first kind of systems with cylindrical phase space" Journal of the Srednevolzhsky Mathematical Society. vol.19. no.1. pp. 67-76.
15. Kharlamova, A.O. 2016, "Limit cycles of the first kind of phase systems" Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential equations. no. 16. pp. 68–74.
16. Mamonov, S. S. 1994. "Solution of matrix inequalities" Differential equations (qualitative theory): interuniversity. Sat. sci. tr. Ryazan Publ., of the RSPU. pp. 71-74.
17. Mamonov, S. S. & Ionova, I. V. 2014, "Solution of the system of matrix equations in the presence of linear coupling" Izvestiya Tula State University. Natural Sciences. no. 2. pp. 90-102.
18. Shalfeev, V. D. & Matrosov, V. V. 2013, "Nonlinear dynamics of phase synchronization systems" N. Novgorod Publ. of the UNN.

Получено 18.07.2018 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.