ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-207-220

Тригонометрические суммы в метрической теории диофантовых приближений

Э. И. Ковалевская

Ковалевская Элла Ивановна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Белорусский государственный аграрный технический университет (г. Минск).
e-mail: ekovalevsk@mail.ru

Аннотация

Это обзор результатов по метрической теории диофантовых приближений на многообразиях в n-мерном евклидовом пространстве, в доказательстве которых используюся тригонометрические суммы.

Мы приводим как классические теоремы, так и современные результаты для многообразий Γ, $\dim \Gamma = m$, $n/2 < m < n$. Мы также показываем, как происходит переход от задачи о диофантовых приближениях к оценке тригонометрической суммы или тригонометрического интеграла, и приводим необходимые соображения теории меры.

Если $m \leqslant n/2$, то обычно используют другие методы. Например, метод существенных и несущественных областей или методы эргодической теории.

Здесь даны две фундаментальные теоремы рассматриваемой теории. Одну из них в 1977 г. доказал В. Г. Спринджук. Другую теорему в 1998 г. получили Д. И. Клейнбок и Г. А. Маргулис. Первая теорема была доказана методом *тригонометрических сумм*. Вторая теорема — *методами эргодической теории*. Для ее доказательства авторами была найдена связь между диофантовыми приближения и однородными динамическими системами.

В заключении кратко упоминаем о тенденциях развития метрической теории диофантовых приближений зависимых величин, даем ссылки на ее современные аспекты.

Ключевые слова: диофантовы приближения, метрическая теория, дифференцируемые многообразия, тригонометрические суммы, метод Ван дер Корпута, метод тригонометрических сумм И. М. Виноградова.

Библиография: 31 название

Для цитирования:

Э. И. Ковалевская. Тригонометрические суммы в метрической теории диофантовых приближений // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 207–220.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 2.

UDC 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-207-220

Trigonometric sums in the metric theory of Diophantine approximation

E. I. Kavaleuskaya

Kavaleuskaya Ela Ivanaŷna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of department of vysshaya mathematics, Belarusian State Agricultural Technic University (Minsk).
e-mail: ekovalevsk@mail.ru

Abstract

It is a survey with respect to using trigonometric sums in the metric theory of Diophantine approximation on the manifolds in n-dimensional Euclidean space.

We represent both classical results and contemporary theorems for Γ, dim $\Gamma = m$, $n/2 < m < n$. We also discuss reduction of a problem about Diophantine approximation to trigonometric sum or trigonometric integral, and indicate measure-theoretic considerations.

If $m \leqslant n/2$ then usually it is used the other methods. For example, the essential and inessential domains method or methods of Ergodic Theory.

Here we cite two fundamental theorems of this theory. One of them was obtained by V. G. Sprindzuk (1977). The other theorem was proved by D. Y. Kleinbock and G. A. Margulis (1998). The first result was obtained using *method of trigonometric sums*. The second theorem was proved using *methods of Ergodic Theory*. Here the authors applied new technique which linked Diophantine approximation and homogeneous dynamics.

In conclusion, we add a short comment concerning the tendencies of a development of the metric theory of Diophantine approximation of dependent quantities and its contemporary aspects.

Keywords: Diophantine approximation, metric theory, differentiable manifolds, trigonometric sums, Van der Corput's method, I. M. Vinogradov's method of trigonometric sums.

Bibliography: 31 titles.

For citation:
E. I. Kavaleuskaya, 2019, "Trigonometric sums in the metric theory of Diophantine approximation", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 207–220.

1. Введение

Эта работа расширяет и дополняет [7], [8]. Мы приводим как классические теоремы, так и современные результаты по метрической теории диофантовых приближений на многообразиях.

В теории диофантовых приближений выделяют три подхода [14]. Один их них, *глобальный*, изучает общие законы аппроксимации, справедливые для всех чисел определенных классов. Второй, *индивидуальный подход*, имеет дело с аппроксимационными свойствами специальных чисел. Например, e, π, $\ln 2$, $\sqrt[3]{2}$ и т. д. Третий, *метрический подход*, занимает промежуточное положение между двумя названными и требует для описания аппроксимационных свойств чисел применения понятий *теории меры* [14].

Напомним, что метрическая теория диофантовых приближений на многообразиях начала формироваться во 2-й половине прошлого столетия после появления работ Й. П. Кубилюса [10], [11], Дж. В. С. Касселса (1951) (см. [3] гл. 7, с. 161; 197), В. М. Шмидта [28], [29] и В. Г. Спринджука (1964 г., см. [12]). Эта теория была связана с решением задач, мотивированных классификациями К. Малера (1932 г.) и Дж. Коксмы (1939 г.) трансцендентных чисел. Точнее, с определением меры Лебега множеств "*плохо*"и "*хорошо*" *аппроксимируемых чисел* рациональными дробями. С тех пор многие авторы внесли большой вклад в исследование по диофантовым приближениям на многообразиях, установив их арифметические и геометрические свойства. В частности, для более полного описания меры указанных точек была использована размерность Хаусдорфа [2], [17]–[23].

К настоящему времени сформировалось несколько методов для исследования диофантовых приближений на многообразиях: **(1)** *метод тригонометрических сумм*, использующий методы математического анализа [1], [2] (гл. 3, § 2), [4]-[8], [10], [11], [16], [21]–[23], [26], [28], [29]; **(2)** *метод существенных и несущественных областей* В. Спринджука, основанный на специальных свойствах целочисленных многочленов, [2], [9], [12], [13], [17]–[23]; **(3)** *методы эргодической теории* [20], [24], [25].

Для полноты изложения отметим также публикации [30], [31] и приложения метрической теории диофантовых приближений к задачам математической физики [24] (изучение явления резонанса) и к задачам теории коммуникаций [15] (регулировка помех при передаче сигналов).

2. Основная задача

Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$, и пусть $w(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ обозначает точную верхнюю грань таких $w > 0$, для которых неравенство

$$||\gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_n a_n|| < a^{-w}, \quad a = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i| \neq 0, \tag{2.1}$$

где $||x||$ — расстояние от $x \in \mathbb{R}$ до ближайшего целого, имеет бесконечно много решений в наборах целых чисел $(a_1, \dots, a_n)$.

Из "принципа ящиков" Дирихле следует, что

$$w(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \geqslant n.$$

В 1926 г. А. Я. Хинчин показал, что $w(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = n$ для почти всех $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$. Здесь и далее мы имеем в виду *меру Лебега*.

Вместо неравенства (2.1) можно рассматривать систему неравенств

$$\max\left(||\gamma_1 q||, \dots, ||\gamma_n q||\right) < q^{-v}, \quad v > 0, \quad q \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}. \tag{2.2}$$

Пусть $v(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ обозначает точную верхнюю грань таких $v > 0$, для которых система неравенств (2.2) имеет бесконечно много решений в целых числах $q > 0$. В этом случае из "принципа ящиков" Дирихле получим неравенство

$$v(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \geqslant 1/n.$$

Здесь нижняя граница также достижима (А. Хинчин, 1925 г.) для почти всех $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$. В силу "принципа переноса" Хинчина существуют определенные соотношения между величинами $w(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ и $v(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ [14] с. 65. В частности, равенства

$$w(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = n, \quad v(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = 1/n \tag{2.3}$$

эквивалентны.

Определение 1. *Будем называть числа $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ "плохо" аппроксимируемыми, если для них выполняются неравенства* (2.3).

Здесь мы имеем в виду, что они "плохо" аппроксимируются рациональными дробями с одним и тем же знаменателем, так как для них система неравенств (2.2) имеет только конечное число решений в целых числах $q > 0$ для $v > 1/n$.

Основная задача состоит в следующем: *дать описание многообразий Γ in $\mathbb{R}^n$,* $\dim \Gamma < n$, *почти все точки которых (в смысле меры на Γ) являются системами плохо аппроксимируемых чисел.*

Определение 2. *Многобразие Γ, удовлетворяющее этому условию, называется экстремальным* (согласно [14] с. 137).

Отметим, что раньше всех были найдены экстремальные многобразия Γ размерности $\dim \Gamma = 1$ в [10]–[12], [29].

3. Некоторые результаты

Сформулируем шесть теорем, в доказательстах которых применяется *метод тригонометрических сумм.* Более полную информацию можно найти в [2], [13]–[14], [22], [23]. Многобразие Γ в этих теоремах имеет *большую* размерность, т. е.

$$n/2 < \dim \Gamma < n.$$

Так как $\dim \Gamma < n$, то между точками на Γ существуют функциональные связи. Так возникает метрическая теория диофантовых приближений *зависимых величин*, которая исследует многообразия на *экстремальность.*

Чтобы упростить формулировку результатов, будем предполагать ([14], с. 66), что Γ определено в $\mathbb{R}^{m+n}$, $\dim \Gamma = m$,

$$\Gamma = (t_1, \dots, t_m, f_1, \dots, f_n) \tag{3.1}$$

где $t_1, \dots, t_m$ — независимые переменные в некоторой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $f_1, \dots, f_n$ — непрерывные функции от $(t_1, \dots, t_m) \subseteq \Omega$. Это предположение не является каким-либо ограничением, так как на Γ всегда можно выбрать локальные координаты так, чтобы получить представление Γ в виде (3.1). Далее, если будет установлена "локальная" экстремальность Γ, то, очевидно, получим и его "глобальную" экстремальность.

Когда мы делаем переход от *независимых* величин к *зависимым* величинам, то первоначально исследуется случай "слабой" зависимости. Итак, рассмотрим топологическое произведение

$$\Gamma = \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_m, \tag{3.2}$$

где m — *достаточно велико* по сравнению с размерностями компонент Γ_i.

Экстремальность следующих двух многообразий Γ обусловлена *арифметическими* свойствами. Здесь имеем $\dim \Gamma_i = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. В доказательствах соответствующих теорем используется *метод оценки тригонометрических сумм И. М. Виноградова.*

Теорема 3.1 ([26]). *Пусть* $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$, $K = \max(k_1, \dots, k_m)$, $K > 1$, $k = \min(k_1, \dots, k_m)$. *Предположим, что действительные числа* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ *таковы, что неравенство*

$$||\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m|| < (a_1' \cdots a_m')^{-1-\gamma}, \quad a_i' = |a_i| + 1,$$

при некотором фиксированном γ, $0 < \gamma < (k_1 + \dots + k_m)m^{-2}$, *имеет только конечное число решений в целых числах* $a_1, \dots, a_m$. *Тогда произведение многообразий*

$$\Gamma_i = (\lambda_i, \lambda_i x, \lambda_i x^2, \dots, \lambda_i x^{k_i}) \quad (i = 1, \dots, m) \tag{3.3}$$

Экстремально, если : 1) $m \geqslant 2$, $K = 1$, *и* 2) $m \gg K^3 k^{-1} \ln K$, $K \geqslant 2$.

В следующей теореме многообразие задается *квадратичными* многочленами.

Теорема 3.2 ([5]). *Для любого данного* $\delta > 0$, *неравенство*

$$\prod_{1 \leqslant i \leqslant m} ||t_i q|| \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m} ||t_i t_j q|| < q^{-1-\delta} \tag{3.4}$$

имеет только конечное число решений в целых числах $q > 0$ *для почти всех* $(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$.

Экстремальность следующего многообразия обусловлена определенными свойствами дифференцируемых функций. Пусть I_i $(i = 1, \dots, m)$ — интервалы в $\mathbb{R}$. Пусть $k_1, \dots, k_m$ определены как в теореме 3.1. Пусть

$$f_{ij}(x) \quad (j = 1, \dots, k_i)$$

— (k_i+1)-раз *непрерывно дифференцируемые* действительные функции на интервалах I_i, и *вронскианы*

$$W(f_{i1}^{'},\dots,f_{ik_i}^{'})\neq 0 \quad (i=1,\dots,m) \tag{3.5}$$

почти всюду на I_i. Рассмотрим многообразие (3.2), где

$$\Gamma_i=(f_{i1},\dots,f_{ik_i}) \quad (i=1,\dots,m). \tag{3.6}$$

Здесь каждая компонента является *одномерным* многообразием общего типа. В [1] было найдено простое условие, связывающее величины $m, k_1,\dots,k_m$ и гарантирующее экстремальность Γ.

Теорема 3.3 ([1]). *Многообразие* Γ, *определенное в* (3.2), (3.5), (3.6) *экстремально, если*

$$K^2\leqslant 1+k_1+\dots+k_m.$$

В доказательстве теорем 3.2 и 3.3 используется *метод Ван дер Корпута* для оценки тригонометрических сумм. Отметим, что приведенные теоремы являются примерами "гладких" (дифференцируемых) экстремальных многообразий.

Теперь приведем один из фундаментальных результатов метрической теории диофантовых приближений на многообразиях, доказанный методом тригонометрических сумм.

Теорема 3.4 ([14] с. 78). *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $1\leqslant n<m$. *Пусть* Ω — *область в* $\mathbb{R}^m$, *и пусть* $f_j=f_j(t_1,\dots,t_m)$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ — *действительные функции, определенные в* Ω, *удовлетворяющие условиям:*

а) *частные производные* $\partial^2 f_j/\partial t_i\partial t_k$ *непрерывны в* Ω $(1\leqslant j\leqslant n)$, $(1\leqslant i,k\leqslant m)$;

б) *определитель (якобиан)*

$$\det(\partial^2 f_j/\partial t_i\partial t_k)_{j,k=1,2,\dots,n}\neq 0 \quad \textit{почти всюду в } \Omega,$$

в) *любая линейная комбинация*

$$h(t_k)=c_1(\partial^2 f_1/\partial t_1\partial t_k)+\dots+c_n(\partial^2 f_n/\partial t_1\partial t_k)$$

с целыми коэффициентами $c_1,\dots,c_n$, *рассматриваемая как функция одной переменной* t_k $(1\leqslant k\leqslant n)$ *при фиксированных остальных переменных, такова, что любой интервал, где она определена, можно разбить на ограниченное, не зависящее от* $c_1,\dots,c_n$ *число подынтервалов, на которых* $h(t_k)$ *монотонна.*

Тогда Γ, *определяемое по* (3.1), *экстремально.*

В этой теореме экстремальность Γ обусловлена общими *аналитическими* предпосылками. Условие **в)**, имеющее длинную формулировку, просто по содержанию и выполняется для "стандартных" функций ([14] с. 78). Если же f_j — *аналитические* функции, то условие **в)** всегда выполняется, и его можно исключить из формулировки. Некоторые детали доказательства этой теоремы будут приведены в §§4 – 7 настоящей работы.

Следующая теорема является двумерным аналогом результата Шмидта [29].

Теорема 3.5 ([6]). *Пусть поверхность* $\Gamma\subset\mathbb{R}^3$ *задана уравнением* $z=f(x,y)$, *где функция* f —*трижды непрерывно дифференцируема в* $\mathbb{R}^2$. *Пусть общая (гауссова) кривизна поверхности* Γ *отлична от нуля почти всюду в* $\mathbb{R}^2$. *Тогда* Γ *экстремальна.*

Доказательство этой теоремы основывается на теореме 3.4 $(n=1, m=2)$.

Следующая теорема является новым результатом в теории экстремальных непрерывно дифференцируемых m-мерных многообразий $\Gamma=(f_1(\overline{x}),\dots,f_N(\overline{x}))$, $\overline{x}\in\mathbb{E}^m=[0,1)\times\dots\times[0,1)$ в $\mathbb{R}^N$ $(1\leqslant m<N)$.

Пусть $h \geqslant 1$ — целое число, $mh > N$. Рассмотрим преобразование

$$\varphi_j : \mathbb{E}^{mh} \to \mathbb{R}^N,$$

определяемое уравнениями

$$\varphi_j(\overline{x}) = \varphi_j(\overline{x_1}, \dots, \overline{x}_h) = f_j(\overline{x}_1) + \dots + f_j(\overline{x}_h), \quad \overline{x}_s = (x_{s1}, \dots, x_{sm}) \;\; (1 \leqslant j \leqslant N), \;\; (1 \leqslant s \leqslant h).$$

Матрица *Якоби* этого преобразования $(\overline{x_1}, \dots, \overline{x}_h) \to (\varphi_1(\overline{x}), \dots, \varphi_N(\overline{x}))$ имеет вид

$$J(\varphi_1, \dots, \varphi_h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{11}} \cdots \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{hm}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \varphi_N}{\partial x_{11}} \cdots \frac{\partial \varphi_N}{\partial x_{hm}} \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.6 ([16]). *Если для некоторого числа h, определенного выше, якобиан $J(\varphi_1, \dots, \varphi_h)$ имеет минимальный ранг почти всюду в $\mathbb{E}^m$, то многообразие Γ экстремально.*

В доказательстве теоремы используется теория знакопеременных интегралов и формула *Парсеваля.*

4. Рациональные точки вблизи гладких многообразий

Рассмотрим многообразие Γ, определенное в (3.1), точки которого удовлетворяют неравенству (2.2), где n заменяется на $m+n$. Покажем, что доказательство экстремальности Γ приводится к отысканию оценки сверху для числа *рациональных точек*, имеющих один и тот же знаменатель q и находящихся вблизи Γ. Идея такого приведения принадлежит Касселсу (1950) (см. [3] гл. 7).

Асимптотическая оценка числа этих точек при $q \to \infty$ должна быть "неулучшаемой т. е. иметь порядок истинного числа таких точек ([14] с. 82-83). Этого можно достить при определенных ограничениях на Γ, как в теоремах 3.1-3.6.

Пусть $\mathbb{E}^m = [0,1) \times \dots \times [0,1)$ в $\mathbb{R}^m$, и пусть $f_1, \dots, f_n$ — действительные функции от $t_1, \dots, t_m$, определенные в $\mathbb{E}^m$ с непрерывными производными

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m).$$

Рассмотрим систему диофантовых неравенств

$$\max(||t_1 q||, \dots, ||t_m q||, ||f_1 q||, \dots, ||f_n q||) < q^{-v} \tag{4.1}$$

для точек многообразия Γ. Из (4.1) следует, что

$$|t_i - a_i/q| < q^{-1-v} \quad (1 \leqslant i \leqslant m),$$
$$|f_j - b_j/q| < q^{-1-v} \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

при некоторых целых числах a_i, b_j. Отсюда находим

$$f_j(t_1, \dots, t_m) = f_j(a_1/q, \dots, a_m/q) + O(q^{-1-v}),$$
$$||q f_j(a_1/q, \dots, a_m/q)|| \ll q^{-v} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \tag{4.2}$$

где $0 \leqslant a_i \leqslant q$, так как переменные t_i принадлежат $\mathbb{E}^m$. Запись $X \ll Y$ эквивалетна обозначению $X = O(Y)$. Таким образом, мы видим, что при заданном q мера множества тех точек $(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{E}^m$, для которых выполняется (4.1), оценивается величиной

$$\ll q^{-m(1+v)} N_v(q),$$

где $N_v(q)$— число решений в целых числах $a_1, \dots, a_m$, $0 \leqslant a_i \leqslant q$, системы неравенств (4.2).

5. Редукция к тригонометрической сумме или тригонометрическому интегралу

Следующая лемма позволяет получить оценку сверху для числа решений системы диофантовых неравенств, не прибегая к разложению в ряды Фурье характеристических функций соответствующих интервалов. Она дает возможность сразу работать с конечными суммами вместо бесконечных рядов. Й. Кубилюс [11] был первым, кто применил эти конструктивные соображения.

Лемма 5.1 ([14] с. 81). *Пусть n, q, Q — натуральные числа, $g_{ij}, r_i > 0$ — действительные числа ($1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant Q$). Пусть $N(q, Q)$ — число таких чисел j, для которых величины $g_{1j}, \dots, g_{nj}$ одновременно удовлетворяют неравенствам*

$$||g_{1j}|| < q^{-r_1}, \dots, ||g_{nj}|| < q^{-r_n}. \tag{5.1}$$

Тогда

$$N(q, Q) \ll q^{-r} \sum_{|c_1| < q^{r_1}} \cdots \sum_{|c_n| < q^{r_n}} |\sum_{j=1} e^{2\pi i (c_1 g_{j1} + \dots + c_n g_{jn})}|,$$

где $r = r_1 + \dots + r_n$ и символ $\ll$ скрывает величину, зависисящую только от n.

Эта лемма применяется при доказательствах теорем 3.1, 3.4 и 3.5.

Следующая лемма позволяет сразу оценивать меру точек $(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{E}^m$, для которых выполняется, например, (3.4), без перехода к промежуточным неравенствам типа (4.2). Это используется в доказательстве теорем 3.2, 3.3, 3.5 и 3.6.

Лемма 5.2 ([14] с. 99-100). *Для заданных натуральных чисел m, n и Q пусть $f_j(\overline{x})$ — действительные измеримые функции, определенные в $\mathbb{E}^m$ ($1 \leqslant j \leqslant n$), и пусть $r_j > 0$ как в лемме 5.1. Обозначим через $\mu(q)$ меру множества тех точек $\overline{x} \in \mathbb{E}^m$, для которых выполняется система неравенств*

$$\max_{(j)} ||f_j(\overline{x})|| < q^{-r_j} \quad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Тогда

$$\mu(q) \ll q^{-r} \sum_{|c_1| < q^{r_1}} \cdots \sum_{|c_n| < q^{r_n}} |\int_{\mathbb{E}^m} e^{2\pi i (c_1 f_1 + \dots + c_n f_n)} \, d\overline{x}|,$$

где $r = r_1 + \dots + r_n$ и символ $\ll$ скрывает величину, зависисящую только от n.

6. Упрощения, использующие соображения теории меры

В. Шмидт [29] был первым, кто предложил такие упрощения. Они подробно изложены в [14] с. 85–87. Мы покажем их применение на примере теоремы 3.3. Согласно условиям (3.5) этой теоремы можно считать, что *вронскианы* $W(f'_{i1}, \dots, f'_{ik_i})$ удовлетворяют неравенствам

$$0 < \alpha \leqslant W(f'_{i1}, \dots, f'_{ik_i}) \leqslant \beta \quad (1 \leqslant i \leqslant m)$$

с некоторыми числами α, β и что они монотонны на соответствующих интервалах I_i.

Действительно, для заданного $\delta > 0$ пусть $A_i(\delta)$ — множество таких точек $x \in I_i$, для которых $|W(f'_{i1}, \dots, f'_{ik_i})| > \delta$. Так как $W(f'_{i1}, \dots, f'_{ik_i})$ — непрерывная функция, то $A_i(\delta)$ — открытое множество, т. е.

$$A_i(\delta) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{ik}(\delta),$$

где $I_{ik}(\delta)$ — интервалы и знак суммы означает объединение *непересекающихся* множеств. Из того, что $W(f'_{i1},\dots,f'_{ik_i}) \neq 0$ почти всюду на I_i следует, что $|A_i(\delta)| \to |I_i|$, когда $\delta \to 0$. Поэтому, рассматривая множество

$$A_1(\delta) \times \cdots \times A_m(\delta) = \sum_{k_1,\dots,k_m} I_{1k_1}(\delta) \times \cdots \times I_{mk_m}(\delta),$$

вместо $I = I_1 \times \cdots \times I_m$, мы сделаем переход к множеству, *мера* которого при достаточно малом δ будет *сколь угодно мало* отличаться от *меры исходного множества*. Следовательно, достаточно доказать экстремальность Γ на интервалах $I_{1k_1}(\delta),\dots,I_{mk_m}(\delta)$. Но на этих интервалах вронскианы $W(f'_{i1},\dots,f'_{ik_i})$ удовлетворяют неравенствам $|W(f'_{i1},\dots,f'_{ik_i})| > \delta$, и будучи непрерывными функциями, они ограничены в любом замкнутом подынтервале. Несколько уменьшив длины интервалов, $I_{1k_1}(\delta),\dots,I_{mk_m}(\delta)$, мы перейдем к *замкнутым* интервалам, на которых $|W(f'_{i1},\dots,f'_{ik_i})| \leqslant \Delta < \infty$. Каждый такой интервал представляет собой *не более чем счетную* систему подынтервалов, на которых $W(f'_{i1},\dots,f'_{ik_i})$ монотонны [14] с. 86. Действительно, функции $W'(f'_{i1},\dots,f'_{ik_i})$ непрерывны по условию теоремы, и множества $\{x : W(f'_{i1},\dots,f'_{ik_i}) > 0\}$, $\{x : W(f'_{i1},\dots,f'_{ik_i}) < 0\}$ открыты и представляют собой не более чем счетные системы интервалов, так что $W'(f'_{i1},\dots,f'_{ik_i})$ *не более чем счетное число раз меняет знак.*

Таким образом, получены разбиения интервалов $I_{1k_1}(\delta),\dots,I_{mk_m}(\delta)$, в которых обеспечено выполнение условий, указанных в начале этого параграфа. Не прибегая к новым обозначениям, будем полагать, что эти новые интервалы и есть $I_1,\dots,I_m$. Более того, можем считать, что $I_1,\cdots,I_m$ — интервалы единичной длины [14] с. 87.

Далее, следует обратить внимание на следующий факт: согласно лемме *Бореля-Кантелли* [14, с. 10] *для того, чтобы доказать экстремальность* Γ, *достаточно установить сходимость ряда* $\sum_{q=1}^{\infty} q^{-m(1+v)}N_v(q)$, *где* $N_v(q)$ *определено в конце* §4, *при любом* $v > 1/(m+n)$ (см. [14] с. 83). Очевидно, этот ряд сходится, если при $v > 1/(m+n)$ сходится ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} q^{-m(1+v)}N(q), \tag{6.1}$$

где $N(q)$ — число решений системы неравенств (4.2) при $v = v_0 = 1/(m+n)$, так как $N_v(q) \leqslant N(q)$. Получение оценки

$$N(q) \ll q^{m(1+v_0)-1+\varepsilon}, \tag{6.2}$$

где $\varepsilon > 0$ — как угодно мало, достаточно для *обеспечения* сходимости ряда (6.1) при любом $v > v_0$.

7. Некоторые этапы доказательства теоремы 3.4

Основываясь на §§4–6, обсудим доказательство теоремы 3.4.Чтобы оценить число решений неравенств во второй строке формул (4.2), применим лемму 5.1. Тогда получим

$$N(q) \ll q^{-nv_0} \sum_{\overline{c}} \Big|\sum_{\overline{a}} e^{2\pi i q F(a/q)}\Big|, \tag{7.1}$$

где $F(t_1,\dots,t_m) = c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n$, векторы $\overline{c} \in \mathbb{Z}^n$ с условием $|\overline{c}| \ll q^{v_0}$, векторы $\overline{a} \in \mathbb{Z}^m$ имеют координаты $a_1,\dots,a_m$, удовлетворяющие условиям

$$0 \leqslant a_i \leqslant q \quad (1 \leqslant i \leqslant m). \tag{7.2}$$

Далее, применяем следующие аргументы [14] с. 84-85. Пусть q_0 — целое число из интервала $[q^{(1-v_0)/2}] \leqslant q_0 \leqslant 2[q^{(1-v_0)/2}]$, где $[x]$ — целая часть $x \in \mathbb{R}$. Разделим множество $A(q)$ всех целых точек $\overline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ с координатами, удовлетворяющими (7.2), на подмножества $A_{\overline{s}}(q_0)$, полагая $\overline{a} = q_0\overline{s} + \overline{a_0}$, $\overline{a_0} = (a_{01}, \dots, a_{0m})$, $0 \leqslant a_{0i} < q_0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, $\overline{s} = (s_1, \dots, s_m)$, $0 \leqslant s_i \leqslant S = [qq_0^{-1}]$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Собираем в $A_{\overline{s}}(q_0)$ все векторы $\overline{a}$ с одним и тем же $\overline{s}$. Получим

$$f_j(\frac{\overline{a}}{q}) = f_j(\frac{q_0\overline{s}}{q}) + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t_i} f_j(\frac{q_0\overline{s}}{q}) a_{0i} + O(q^{-1-v_0})$$

для $\overline{a} \in A_{\overline{s}}(q_0)$. Следовательно, соответственно различным множествам $A_{\overline{s}}(q_0)$ система неравенств во второй строке формулы (4.2) распадается на $\ll S^m$ систем вида

$$||\alpha_{0j} + \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij}\alpha_{0i}|| \ll q^{-v_0} \quad (i = 1, \dots, n), \tag{7.3}$$

где

$$\alpha_{0j} = qf_j(\frac{q_0\overline{s}}{q}), \quad \beta_{ij} = \frac{\partial}{\partial t_i} f_j(\frac{q_0\overline{s}}{q})$$

и $a_{0i} \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant a_{0i} < q_0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$.

Чтобы оценить N_0 — число решений системы (7.3), применим лемму 5.1. Получим

$$N_0 \ll q^{-nv_0} \sum_{\overline{c}} |\sum_{\overline{a}} e^{2\pi i\{\sum_{j=1}^{n} c_j(\alpha_{0j} + \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij}\alpha_{0i})\}}|,$$

где $\overline{c} \in \mathbb{Z}^n$, $|\overline{c}| \ll q^{v_0}$, и $\overline{a_0} \in \mathbb{Z}^m$, $0 \leqslant a_{0i} < q_0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Далее, суммируя по $\overline{a_0}$, находим

$$N_0 \ll q^{-nv_0} \sum_{\overline{c}} \prod_{i=1}^{m} \min(q_0, ||L_i(\overline{c})||^{-1}), \tag{7.4}$$

где

$$L_i(\overline{c}) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}c_j, \quad \beta_{ij} = \frac{\partial}{\partial t_i} f_j(\frac{q_0\overline{s}}{q}) \quad (i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n),$$

$$\max_{(j)} |c_j| \ll q^{v_0} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Далее для оценивания соответствующих тригонометрических сумм применяется метод *Ван дер Корпута*. Затем, суммируя найденные для (7.4) оценки по различным целым векторам $\overline{s}$, получим оценку для $N(q)$ вида (6.2). Другие детали доказательства теоремы 3.4 можно найти в [14] § 8.

8. Заключение

Здесь дадим краткий комментарий относительно тенденций развития метрической теории диофантовых приближений в 80-е и 90-е годы прошедшего столетия (см. также [22]). Современные аспекты развития и результаты см. в [9], [15]–[21], [23], [27], [31].

1) Вместо (2.1) можно рассматривать обобщенное неравенство

$$||\gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_n a_n|| < \psi(a), \quad a = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i| \neq 0,$$

где $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, $\psi(a) \downarrow 0$, когда $a \to \infty$ и

$$\sum_{a_1, \dots, a_n = 1}^{\infty} \psi^n(a) < \infty.$$

Такие точки $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ называются *ψ-аппроксимируемыми.*

2) Отметим, что большинство теорем, которые мы рассмотрели, можно усилить, если экстремальность заменить на "*усиленную*" экстремальность (оценивать приближения в терминах *произведения* коэффициентов, а не в терминах *высоты* линейных форм). Например, см. [5], [18], [22].

3) Стоит упомянуть следующую работу: V. Sprindžuk "Eine diophantische Eigenschaft der Traectorien der Brownischen Bewegung". Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena/Thüringen, 21 (1972), p. 157–160. Здесь доказаны две теоремы о приближениях на траекториях *случайных процессов.* Приведем одну из них.

Теорема ([14] с. 113-116). *Пусть $\xi(t)$ — вероятностный процесс броуновского движения. Тогда случайные кривые $\Gamma = (t, \xi(t))$, $0 \leqslant t \leqslant T$, с вероятностью 1 экстремальны.*

4) Метрическая теория диофантовых приближений получила развитие и в полях $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$, рассматриваемых с соответствующими архимедовыми или неархимедовыми метриками (см. [18], [22], [23], [27]).

5) Отметим, что в 1972 г. Спринджук сформулировал центральную проблему рассматриваемой теории ([13], см. также [14] с. 136):

Если $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ —действительные аналитические функции, определенные на интервале I, причем $1, f_1(x), \ldots, f_n(x)$ линейно независимы над полем действительных чисел, то многообразие

$$\Gamma = (f_1(x), \ldots, f_n(x)), \quad x \in I,$$

экстремально.

Д. Клейнбок и Г. Маргулис в 1998 г. доказали это утверждение [25]. Они нашли связь между диофантовыми приближениями и однородными динамическими системами и использовали методы эргодической теории.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берник В. И., Ковалевская Э. И. Экстремальное свойство некоторых поверхностей в n-мерном евклидовом пространстве // Матем. Заметки, 1974, Т. 15, № 2. С. 247–254.

2. Берник В. И., Мельничук Ю. В. Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. – Минск: Наука и техника, 1988.

3. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. М: Иностр. лит. 1961. (перевод с англ. А.М. Полосуева); Cassels J. W. S. An introduction to Diophantine Approximation. Cambridge Tracts in Math and Math. Phys., 45. Cambridge Univ. Press. 1957.

4. Ковалевская Э. И. "Гиперболические" диофантовы приближения на аналитических многообразиях // Докл. АН БССР, 1975, Т. 19, № 3. С. 200–203.

5. Ковалевская Э. И. Диофантовы приближения с квадратичными многочленами // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. н. 1975, № 4. С. 5–14.

6. Ковалевская Э. И. Одно геометрическое свойство экстремальной поверхности // Матем. заметки. 1978. № 23(2). С. 177–181.

7. Ковалевская Э. И. Тригонометрические суммы и метрическая теория диофантовых приближений на многообразиях. Материалы конференции // XV Международная конференция "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения посвященная столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Коробова

Николая Михайловича: тезисы докладов международной конференции (Тула, 28–31 мая 2018 г.). — Тула, 2018. С. 257–260.

8. Ковалевская Э. И. Геометрическое и арифметическое описание экстремальных многообразий в метрической теории диофантовых приближений. Материалы конференции // XVI Международная конференция "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения и проблемы истории посвященная 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза.: тезисы докладов международной конференции (Тула, 13–18 мая 2019 г.). — Тула, 2019. С. 239–241.

9. Ковалевская Э. И., Рыкова О. В. Развитие метода существенных и несущественных областей для подсчета векторов с действительными алгебраическими координатами вблизи гладких поверхностей // Чебышевский сборник — Тула: Изд-во ТПГУ, 2013, Т. 14, вып. 4. С. 119–126.

10. Кубилюс Й. П. О применении метода академика Виноградова к решению одной задачи метрической теории чисел // Докл. АН СССР. 1949. Том 67. С. 783–786.

11. Кубилюс Й. П. О применении метода академика Виноградова к решению одной задачи метрической теории чисел // Докл. АН СССР. 1949. Том 67. С. 783–786.

12. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел // Минск: Изд-во Наука и техника, 1967. 184 с.

13. Спринджук В. Г. Метод тригонометрических сумм в метрической теории диофан товых приближений зависимых величин // Труды Матем. ин-та АН СССР, 1972. Т. 128, № 2. С. 212–254.

14. Спринджук В. Г. Метрическая теория диофантовых приближений / В. Г. Спринджук // Москва: Изд-во Наука, 1977. 144 с.

15. Adiceam F., Beresnevich V., Levesley V., Velani S., Zorin E. Diophantine approximation and applications in interference alignment // Advances in Math. 302. 2016, P. 231–279.

16. Bayramoglu M., Jabbarov I. Sh., Kazimova L. G. On some theoretic-functional results concerning the theory of extremality and their application // Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. 44(2). 2018, P. 229–237.

17. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. Integral polynomials with small discriminants and resultants // Advances in Math. 298. 2016, P. 393–412.

18. Beresnevich V., Ramirez F., Velani S. Metric Diophantine approximation: aspects on recent work. In Dynamics and Analytic Number Theory. LMS Lecture Notes Ser. 437. 2016 (eds. D. Badziahin, A. Gorodnik, N. Reyerimhoff). Cambridge Univ. Press (Cambridge. 2016). P. 1–95.

19. Beresnevich V., Lee L., Vaughan R. C., Velani S. Diophantine approximation on manifolds and lower bounds Hausdorff dimension // Math. 63. 2017. P. 762–779.

20. Beresnevich V., Velani S. A note on three problems in metric Diophantine approximation. In recent Trends in Ergodic Theory and Dynamical Systems, Contemp. Math. 631. 2015. Amer. Math. Soc. Providence. R. I. 2015. P. 211–229.

21. Beresnevich V., Vaughan R. C., Velani S., Zorin E. Diophantine approximation on manifolds and the distribution of rational points: contributions to the convergence theory // Int. Math. Research Notices. 2016. P. 1–24.

22. Bernik V. I., DodsonM. M. Metric Diophantine Approximation of Manifolds. Cambridge Tracts in Math. Vol. 137. Cambridge University Press. Cambridge. 1999.

23. Bugeaud Y. Approximation by algebraic numbers. Cambridge Tracts in Math. Vol. 169. Cambridge Univ. Press, 2004.

24. Dodson M. M., Vickers J. A. G. Number Theory and dynamical systems // London Math. Soc. Lecture Note Ser. Vol. 134. Cambridge Univ. Press. 1989.

25. Kleinbock D. Y., Margulis G. A. Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds // Ann. Math. 1998. Vol. 148. P. 339–360.

26. Kovalevskaja E. I. Metric theorems on the approximation of zero by a linear combination of polynomials with integral coefficients, Acta Arith. 1973. Vol. 25. P. 93–104.

27. Kovalevskaya E. The convergence part of a Khintchne-type theorem in the ring of adeles // Tatra Mountains Math. Publ. 59. 2014. P. 39–50.

28. Schmidt W. M. Über Gitterpunkte auf gewissen Flächen // Monatch. Math. 68. 1964, No. 1. P. 59–74.

29. Schmidt W. M. Metrische Sätze Über simultane Approximationabhängiger Grössen // Monatch. Math. 1964. Vol. 68, No. 2. P. 154–166.

30. Schmidt W. M. Diophantine Approximation. Lecture Notes in Math. Vol. 785. Springer-Verlag, 1980.

31. Steuding J. Diophantine analysis. Course notes from a Summer School. Trends in Math. Birkhäuser. Springer Int. Publ. AG. 2016.

REFERENCES

1. Bernik V. I., Kovalevskaja E. I. Extremal properties of some surface in n-dimensional Euclidean space, Math. Notes, 15(2). 1974, pp. 247–254.

2. Bernik V. I., Melnichuk Yu. V. Diophantine approximation and Hausdorff dimension. Nauka i Nechnika, Minsk, 1988. 23. Cassels J. W. S. An introduction to Diophantine Approximation. Cambridge Tracts in Math and Math. Phys., 45. Cambridge Univ. Press. 1957.

3. Cassels J. W. S. An introduction to Diophantine Approximation. Cambridge Tracts in Math and Math. Phys., 45. Cambridge Univ. Press. 1957.

4. Kovalevskaja E. I. "Hyperbolic"approximation on analytic manifolds, Dokl. Akad. Nauk BSSR, vol. 19(3), 1975, pp. 200–203.

5. Kovalevskaja E. I. Diophantine approximation with quadratic polynomials, Vesci Akad. Navuk BSSR. Ser. Fiz.-Mat. Navuk, 4, 1975, pp. 5–14.

6. Kovalevskaja E. I. One geometric property of extremal surface, Math. Notes, 23(2), 1978, pp. 177–181.

7. Kovalevskaya, E. I. The trigonometric sums and the metric theory of Diophantine approximation on manifolds, Proc. XV Int. Conf. on Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Contemporary Problems and Applications devoted to centenary of professor N. M. Korobov. Tula, Russia, 28–31 May 2018, P. 257–260. (In Russian)

8. Kavaleuskaya, E. I. Geometric and arithmetic description of extremal manifolds in the metric theory of Diophantine approximation, Proc. XVI Int. Conf. on Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Contemporary Problems, Applications and Problem of History, devoted to eighty of professor Mishel Deza. Tula, Russia, 13–18 May 2019, P. 239–241.

9. Kovalevskaya, E. I., Rykova O. V. The development of the essential and inessential domains method for the calculation of vectors with real algebraic coordinates near smooth surfaces, Chebyshevskii Sbornik. — Tula: 14, 2013, pp. 119–126.

10. Kubilius I. P. On the application of I. M. Vinogradov's method to the solution of a problem of the metric theory of numbers, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 67, 1949, pp. 783–786.

11. Kubilius I. P. On the metrical problem in the theory of Diophantine approximation, Trudy Akad. Nauk Litov. SSR, Ser. B, 2(18), 1959, pp. 3–7.

12. Sprindžuk V. G. Mahler's problem in metric number theory. Minsk: Izdat. Nauka i Tehnika. 1967. English translation by B. Volkman. Transl. Math. Monographs, 25, Amer. Math. Soc., Providence, RI. 1969.

13. Sprindžuk V. G. The method of trigonometric sums in the metric theory of diophantine approximation of dependent quantities, Proc. Steklov Inst. Math. Akad. Nauk SSSR, 128(2), 1972, pp. 212–228.

14. Sprindžuk V. G. Metric theory of Diophantine approximations. Izdat. Nauka. Moscow, 1977. English translation by R. A. Silverman. John Wiley and Sons. New York – Toronto – London, 1979.

15. Adiceam F., Beresnevich V., Levesley V., Velani S., Zorin E. Diophantine approximation and applications in interference alignment, Advances in Math., 302 2016, pp. 231–279.

16. Bayramoglu M., Jabbarov I. Sh., Kazimova L. G. On some theoretic-functional results concerning the theory of extremality and their application, Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb., 44(2), 2018, pp. 229–237.

17. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. Integral polynomials with small discriminants and resultants, Advances in Math., 298, 2016, pp. 393–412.

18. Beresnevich V.,Ramirez F., Velani S. Metric Diophantine approximation: aspects on recent work. In Dynamics and Analytic Number Theory. LMS Lecture Notes Ser., 437, 2016 (eds. D. Badziahin, A. Gorodnik, N. Reyerimhoff). Cambridge Univ. Press (Cambridge. 2016), pp. 1–95.

19. Beresnevich V., Lee L., Vaughan R. C., Velani S. Diophantine approximation on manifolds and lower bounds Hausdorff dimension Math., 63, 2017, pp. 762–779.

20. Beresnevich V., Velani S. A note on three problems in metric Diophantine approximation. In recent Trends in Ergodic Theory and Dynamical Systems, Contemp. Math., 631, 2015, Amer. Math. Soc. Providence. R. I., 2015, pp. 211–229.

21. Beresnevich V., Vaughan R. C., Velani S., Zorin E. Diophantine approximation on manifolds and the distribution of rational points: contributions to the convergence theory. Int. Math. Research Notices, 2016, pp. 1–24.

22. Bernik V. I., Dodson M. M. Metric Diophantine Approximation of Manifolds. Cambridge Tracts in Math, 137. Cambridge Univ. Press. Cambridge, 1999.

23. Bugeaud Y. Approximation by algebraic numbers. Cambridge Tracts in Math., 169. Cambridge Univ. Press, 2004.

24. Dodson M. M., Vickers J. A. G. Number Theory and dynamical systems, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 134. Cambridge Univ. Press, 1989.

25. Kleinbock D. Y., Margulis G.A. Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds, Ann. Math., 148, 1998, pp. 339–360.

26. Kovalevskaja E. I. Metric theorems on the approximation of zero by a linear combination of polynomials with integral coefficients, Acta Arith., 25, 1973, pp. 93–104.

27. Kovalevskaya E. The convergence part of a Khintchne-type theorem in the ring of adeles, Tatra Mountains Math. Publ., 59, 2014, pp. 39–50.

28. Schmidt W. M. Über Gitterpunkte auf gewissen Flächen, Monatch. Math. 68(1), 1964, pp. 59–74.

29. Schmidt W. M. Metrische Sätze Über simultane Approximationabhängiger Grössen, Monatch. Math., 68(2), 1964, pp. 154–166.

30. Schmidt W. M. Diophantine Approximation, Lecture Notes in Math., 785. Springer-Verlag, 1980.

31. Steuding J. Diophantine analysis. Course notes from a Summer School. Trends in Math., Birkhäuser. Springer Int. Publ. AG, 2016.

Получено 14.05.2019 г.
Принято в печать 12.07.2019 г.