ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.361 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-178-185

О значениях гипергеометрической функции с параметром из квадратичного поля

П. Л. Иванков

Иванков Павел Леонидович — доктор физико-математических наук, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (г. Москва).
e-mail: ivankovpl@mail.ru

Аннотация

Для исследования арифметических свойств значений обобщенных гипергеометрических функций с рациональными параметрами обычно применяют метод Зигеля. Этим методом были получены наиболее общие результаты, относящиеся к упомянутым свойствам. Основной недостаток метода Зигеля состоит в невозможности его применения к гипергеометрическим функциям с иррациональными параметрами. В этой ситуации исследование обычно основывается на эффективной конструкции функциональной приближающей формы (в методе Зигеля существование такой формы доказывается с помощью принципа Дирихле). Построение и исследование приближающей формы является первым шагом в сложном рассуждении, которое ведет к получению арифметического результата.

Используя эффективный метод, мы сталкиваемся по крайней мере с двумя проблемами, которые в значительной степени сужают область его применимости. Во-первых, неизвестна более или менее общая конструкция приближающей формы для произведений гипергеометрических функций. Используя метод Зигеля, мы не имеем дела с такой проблемой. По этой причине приходится рассматривать лишь вопросы линейной независимости над тем или иным алгебраическим полем. Выбор этого поля является второй проблемой. Подавляющее большинство опубликованных результатов, относящихся к рассматриваемому кругу задач, имеет дело с мнимым квадратичным полем (или с полем рациональных чисел). Лишь в отдельных случаях удается провести соответствующее исследование для какого-либо другого алгебраического поля.

Мы рассматриваем здесь случай вещественного квадратичного поля. С помощью специального технического приема мы устанавливаем линейную независимость значений некоторой гипергеометрической функции с иррациональным параметром над таким полем.

Ключевые слова: гипергеометрическая функция, эффективная конструкция, линейная независимость, вещественное квадратичное поле.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:

П. Л. Иванков. О значениях гипергеометрической функции с параметром из квадратичного поля // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 178–185.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 2.

UDC 511.361 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-178-185

On the values of hypergeometric function with parameter from quadratic field

P. L. Ivankov

Ivankov Pavel Leonidovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Bauman Moscow state technical University (Moscow).
e-mail: ivankovpl@mail.ru

Abstract

In order to investigate arithmetic properties of the values of generalized hypergeometric functions with rational parameters one usually applies Siegel's method. By means of this method have been achieved the most general results concerning the above mentioned properties. The main deficiency of Siegel's method consists in the impossibility of its application for the hypergeometric functions with irrational parameters. In this situation the investigation is usually based on the effective construction of the functional approximating form (in Siegel's method the existence of that form is proved by means of pigeon-hole principle). The construction and investigation of such a form is the first step in the complicated reasoning which leads to the achievement of arithmetic result.

Applying effective method we encounter at least two problems which make extremely narrow the field of its employment. First, the more or less general effective construction of the approximating form for the products of hypergeometric functions is unknown. While using Siegel's method one doesn't deal with such a problem. Hence the investigator is compelled to consider only questions of linear independence of the values of hypergeometric functions over some algebraic field. Choosing this field is the second problem. The great majority of published results concerning corresponding questions deals with imaginary quadratic field (or the field of rational numbers). Only in exceptional situations it is possible to investigate the case of some other algebraic field.

We consider here the case of a real quadratic field. By means of a special technique we establish linear independence of the values of some hypergeometric function with irrational parameter over such a field.

Keywords: hypergeometric function, effective construction, linear independence, real quadratic field.

Bibliography: 25 titles.

For citation:
P. L. Ivankov, 2019, "On the values of hypergeometric function with parameter from quadratic field", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 178–185.

1. Введение

Пусть

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)} \tag{1}$$

где $a(x)$ и $b(x)$ – многочлены, причем $a(x)b(x) \neq 0$ при $x = 1, 2, \dots$. Изучению арифметической природы значений функций вида (1) посвящен ряд работ; см., например, [4]–[13].

Рассмотрим функцию, получающуюся из (1) при $a(x) \equiv 1$, $b(x) = x(\lambda + x)$, т.е. функцию

$$K(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda + x}, \ \lambda \neq -1, -2. \dots .$$

Арифметическая природа чисел

$$K(\xi), \text{ и } K'(\xi), \tag{2}$$

$\xi \neq 0$, изучалась во многих работах; наиболее общие результаты получены при рациональных λ, см. [1], [2], а также [3, гл. 6,]. В частности, если $\lambda \in \mathbb{Q}$, то при некоторых естественных ограничениях на λ и ξ доказана алгебраическая независимость чисел (2). При иррациональном λ известные методы, как правило, позволяют доказать лишь линейную независимость этих чисел над соответствующим полем, причем в этом случае участвующие в рассуждениях линейные приближающие формы обычно строят эффективно. В частности, из результатов работы [14] следует линейная независимость чисел (2) над мнимым квадратичным полем, если λ и ξ берутся из этого же поля. Наибольшее внимание в этом направлении исследований уделяется количественным результатам. Применительно к рассматриваемому случаю это означает получение оценок снизу модуля линейной формы

$$h_1 K(\xi) + h_2 K'(\xi) \tag{3}$$

в зависимости от максимума модулей коэффициентов h_1 и h_2, которые должны быть целыми в соответствующем поле; см. по этому поводу работы [15]— [21]. В некоторых из перечисленных работ получены точные по высоте оценки, а также вычислены входящие в эти оценки постоянные. Эффективные конструкции линейных приближающих форм можно использовать также для изучения ситуации, в которой λ и ξ лежат не в мнимом квадратичном, а в каком-либо другом поле алгебраических чисел. Отметим в связи с этим работы [22] — [24]. В работе [22] рассмотрен случай мнимого кубического поля. В работах [23] и [24] изучается, как и в настоящей работе, случай вещественного квадратичного поля. Оценки линейных форм вида (3) в данной работе не рассматривается в основном из-за того, что ожидаемые здесь результаты весьма далеки от окончательных.

2. Результаты

Пусть

$$\chi_1(\zeta) = 1, \ \chi_2(\zeta) = \zeta, \ \chi_3(\zeta) = \zeta(\zeta + \lambda);$$

рассмотрим при $j = 1, 2$ и при $\lambda \neq -1, -2, \dots$ функции

$$K_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\chi_j(\nu) z^\nu}{\nu!} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda + x}.$$

Теорема 1. *При $\lambda = \sqrt{2}$ числа*

$$K_j\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \ j = 1, 2, \tag{4}$$

отличны от нуля и их отношение не принадлежит полю $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

В сформулированной теореме параметр λ и точка, в которой вычисляются значения функций $K_j(z)$ лежат в вещественном квадратичном поле; аналогичная ситуация рассматривается и в теоремах 2 и 3 работы [23], но там речь идет о линейной независимости чисел (2) над полем

$\mathbb{Q}$, и точка, в которой вычисляются значения функции, также рациональна; последнее замечание относится и к теоремам из [24]. В теореме 4 из [23] на число ξ из (2) наложены некоторые специальные ограничения, связанные с применяемым там методом. В теореме 1 настоящей работы мы отказываемся от этих ограничений, что удается сделать за счет использования новых технических приемов.

3. Леммы

Пусть n — натуральное число. Рассмотрим многочлены

$$P_j(z) = \sum_{s=0}^{n} p_{js} z^s,$$

где

$$p_{js} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\prod_{x=0}^{2n}(\zeta - x)d\zeta}{\chi_{j+1}(\zeta - s)\prod_{x=0}^{s-1}(\zeta - x)(\zeta + \lambda - x)}\,; \tag{5}$$

в последнем выражении γ есть положительно ориентированная окружность, охватывающая все полюсы подынтегральной функции.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$\sum_{j=1}^{2} P_j(z)K_j(z) = R(z), \tag{6}$$

где

$$R(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu \prod_{x=0}^{2n}(\nu - x)}{\nu!} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda + x}\,. \tag{7}$$

Доказательство. Заметим сначала, что (6) равносильно тому, что тождественно по ν выполняется равенство

$$\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{2} p_{js}\chi_j(\nu - s)\prod_{x=0}^{s-1}(\nu - x)(\nu + \lambda - x) = \prod_{x=0}^{2n}(\nu - x). \tag{8}$$

Мы видим здесь разложение в ряд Ньютона многочлена от ν из правой части. Известно, что коэффициенты такого разложения вычисляются по формулам (5); по поводу рядов Ньютона см., например, [25, гл. 4, § 4]. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\lambda \notin \mathbb{Z}$, а ξ — ненулевое число. Тогда при $n \to \infty$*

$$P_j(\xi) = \Gamma(\lambda + 2n + 1)\left(\frac{(-1)^j K_{3-j}(\xi)}{\Gamma(\lambda + 1)} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{9}$$

$$R(\xi) = \frac{\xi^{2n+1}\Gamma(\lambda + 1)}{(\lambda + 2n + 1)\Gamma(\lambda + 2n + 1)}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $j = 1$. Очевидно, $p_{10} = 0$; далее, по теореме о вычетах имеем

$$p_{1s} = -\frac{\prod_{x=0}^{2n}(\lambda + x)}{(s-1)!\prod_{x=0}^{s}(\lambda + x)} + \sum_{\tau=1}^{s-1}\frac{(-1)^{\tau-1}\prod_{x=0}^{2n-\tau}(\lambda + x)}{\tau!(s-\tau-1)!\prod_{x=0}^{s-\tau}(\lambda + x)}\,, \tag{11}$$

$s=1,\dots,n$. При $j=2$ аналогично получаем при $s=0,1,\dots,n$

$$p_{2s}=\frac{\prod_{x=0}^{2n}(\lambda+x)}{s!\prod_{x=0}^{s}(\lambda+x)}+\sum_{\tau=1}^{s}\frac{(-1)^{\tau}\prod_{x=0}^{2n-\tau}(\lambda+x)}{\tau!(s-\tau)!\prod_{x=0}^{s-\tau}(\lambda+x)}\,. \tag{12}$$

При рассматриваемых значениях λ модули сумм, входящих в правые части (11) и (12), оцениваются сверху (при достаточно большом n) величиной

$$C_1\frac{(s+1)2^s}{s!}\Gamma(2n+\lambda),\ s=0,1,\dots,n,$$

где положительная постоянная C_1 зависит лишь от λ. Отсюда следуют соотношения (9). Равенство (10) вытекает непосредственно из (7). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть α_1 и α_2 — ненулевые вещественные числа, а h_1 и h_2 — целые числа из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Тогда, если $\alpha_1/\alpha_2\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, и $h_1\alpha_1+h_2\alpha_2\neq 0$, то*

$$|h_1\alpha_1+h_2\alpha_2|>C_2H^{-1}, \tag{13}$$

где $C_2>0$ — постоянная, не зависящая от h_1 и h_2; H — максимум абсолютных величин чисел h_1, h_2 и их сопряженных в рассматриваемом поле.

Доказательство. Если $h_1\alpha_1+h_2\alpha_2\neq 0$, то и $h_1\eta+h_2\neq 0$, где $\eta=\alpha_1/\alpha_2$. Обозначим $\tilde h_1$, $\tilde h_2$ и $\tilde\eta$ числа, сопряженные соответственно h_1, h_2 и η в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Тогда при некотором натуральном q, зависящем лишь от η, выполняется неравенство

$$q|(h_1\eta+h_2)(\tilde h_1\tilde\eta+\tilde h_2)|\geqslant 1,$$

из которого вытекает (13). Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы

Обратимся к доказательству теоремы 1. Утверждение теоремы о том, что числа (4) отличны от нуля, очевидно. Предположим, что их отношение лежит в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. В лемме 3 положим

$$h_j=(\sqrt{2})^nP_j\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \alpha_j=K_j\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ j=1,2.$$

Заметим, что так определенные h_1 и h_2 будут целыми в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Чтобы убедиться в этом, следует записать в виде вычета относительно бесконечно удаленной точки интеграл из правой части (5). Далее,

$$\sum_{j=1}^{2}h_j\alpha_j=(\sqrt{2})^nR\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \tag{14}$$

причем правая часть последнего равенства отлична от нуля в силу (7). Из (9) и (10) вытекает, что при указанном выборе чисел α_j и h_j, $j=1,2$, и при $n\to\infty$ левая часть неравенства (13) бесконечно мала по сравнению с правой частью, т.е. это неравенство противоречиво, что и доказывает теорему.

5. Заключение

Применяемый в данной работе технический прием, основанный на использовании асимптотики коэффициентов эффективно построенных линейных приближающих форм, может, по-видимому, привести и к решению других аналогичных задач. Дело в том, что в последнее время опубликовано довольно много различных вариантов эффективных конструкций линейных приближающих форм, причем асимптотика величин, связанных с этими конструкциями, изучена недостаточно. Причиной последнего обстоятельства является то, что непосредственно не видно, каким образом можно было бы применить соответствующие асимптотические оценки для получения новых результатов. Заметим, что в теореме, доказанной в настоящей работе, к успеху привела именно высокая точность оценок (9) и (10).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Siegel C. L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1929. № 1. S. 1–70.

2. Siegel C. L. Transcendental numbers. Princeton University Press. Princeton, 1949.

3. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа М.: Наука, 1987.

4. Шидловский А. Б. О трансцендентности и алгебраической независимости значений целых функций некоторых классов // ДАН СССР. 1954. Т. 96, № 4. С. 697–700.

5. Шидловский А. Б. О трансцендентности и алгебраической независимости значений E-функций, удовлетворяющих линейным неоднородным дифференциальным уравнениям второго порядка // ДАН СССР. 1966. Т. 169, № 1. С. 42–45.

6. Шидловский А. Б. Об алгебраической независимости значений некоторых гипергеометрических E-функций // Труды Московского математического общества. 1967. Т. 18. С. 55–64.

7. Белогривов И. И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых гипергеометрических E-функций // ДАН СССР. 1967. Т. 174, № 2. С. 267–270.

8. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Вестник МГУ. Серия 1, математика, механика. 1978, № 5. С. 3–8.

9. Салихов В. Х. Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E-функций // Acta Arithm. 1990. **53**:5. P. 453–471.

10. Черепнев М.А. Об алгебраической независимости значений гипергеометрических E-функций // Математические заматки. 1995. **57**:6. С. 896–912.

11. Салихов В. Х. Критерий алгебраической независимости значений гипергеометрических E-функций (четный случай) // Математические заматки. 1998. **64**:2. С. 273–284.

12. Горелов В. А. Об алгебраической независимости значений обобщенных гипергеометрических функций // Математические заматки. 2013. **94**:1. С. 94–108.

13. Горелов В. А. Об алгебраических свойствах решений неоднородных гипергеометрических уравнений // Математические заматки. 2016. **99**:5. С. 658–672.

14. Osgood Ch. F. Some theorems on diophantine approximation // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 123, № 1. P. 64–87.

15. Галочкин А. И. Оценки снизу линейных форм от значений некоторых гипергеометрических функций // Математические заметки. 1970. Т. 8, № 1. С. 19–28.

16. Галочкин А. И. Уточнение оценок некоторых линейных форм // Математические заметки. 1976. Т. 20, № 1. С. 35–45.

17. Галочкин А. И. Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций // Сибирский математический журнал. 1976. Т. 17, № 6. С. 1220–1235.

18. Галочкин А. И. О неулучшаемых по высоте оценках некоторых линейных форм // Математический сборник. 1984. Т. 124, № 3. С. 416–430.

19. Коробов А. Н. Оценки некоторых линейных форм // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1983, № 6. С. 36–41.

20. Попов А. Ю. Приближения некоторых степеней числа e // Диофантовы приближения, часть I. Изд-во МГУ, 1985. С. 77–85.

21. Иванков П. Л. О приближении значений некоторых функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1994, № 4. С. 12–15.

22. Иванков П. Л. О совместных приближениях значений некоторых целых функций числами из кубического поля // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1987. № 3. С. 53–56.

23. Иванков П. Л. О линейной независимости значений целых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Сибирский математический журнал. 1993. Т. 34, № 5. С. 53–62.

24. Иванков П. Л. О приближении значений гипергеометрической функции с параметром из вещественного квадратичного поля // Математика и математическое моделирование. 2017, № 1. С. 25–33.

25. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций, том 1. М.: Наука, 1967.

REFERENCES

1. Siegel, C. L. 1929, "Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen *Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys.-Math. Kl.* no. 1, pp. 1–70.

2. Siegel, C. L. 1949, "Transcendental numbers."Princeton University Press.

3. Shidlovskii, A. B. 1987, *"Transtsendentnye chisla"* , [Transcendental numbers] Nauka, Moscow, 448 pp. (Russian)

4. Shidlovskii, A. B. 1954, "On transcendentality and algebraic independence of the values of entire functions of certain class *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 96, № 4, pp. 697–700. (Russian)

5. Shidlovskii, A. B. 1954, "Transcendence and algebraic independence of values of E-functions satisfying linear nonhomogeneous differential equations of the second order *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* vol. 169, № 1. pp. 42–45. (Russian)

6. Shidlovskii, A. B. 1968, "Algebraic independence of the values of certain hypergeometric E-functions *Trudy Moskov. Mat. Obsh.*, vol. 18, № 4. pp. 55–64. (Russian)

7. Belogrivov, I. I., 1967, "On transcendence and algebraic independence of values of certain hypergeometric E-functions *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 174, № 2, pp. 267–270. (Russian)

8. Chirsky, V. G., 1978, "On arithmetic properties of the values of hypergeometric functions with irrational parameters *Vestnik Moskov. Univ.* Ser. 1. Mat. Meh. no. 5, pp. 3–8.

9. Salikhov, V. Kh., 1990, "Irreducibility of hypergeometric equations and algebraic independence of values of E-functions 1990, *Acta Arithm.*, **53**:5, pp. 453–471.

10. Cherepnev, M. A., 1995, "On algebraic independence of values of hypergeometric E-functions *Mat. Zametki*, vol. 57, no. 6, pp. 896–912.

11. Salikhov, V. Kh., 1998, "Criterion for the algebraic independence of the values of hypergeometric E-functions (even case) *Mat. Zametki*, vol. 64, no. 2, pp. 273–284.

12. Gorelov, V. A., 2013, "On algebraic independence of the values of hypergeometric functions *Mat. Zametki*, vol. 94, no. 1, pp. 94–108.

13. Gorelov, V. A., 2016, "On algebraic properties of the solutions of nonhomogeneous hypergeometric equations" , *Mat. Zametki*, vol. 99, no. 5, pp. 658–672.

14. Osgood, Ch. F. 1966, "Some theorems on diophantine approximation" *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1966, vol. 123, no. 1, pp. 64–87.

15. Galochkin, A. I. 1970, "Lower estimates of the linear forms in the values of some hypergeometric functions *Mat. Zametki*, v. 8, no. 1, pp. 19–28. (Russian).

16. Galochkin, A. I. 1976, "Sharpening of the estimates of some linear forms *Mat. Zametki*, v. 20, no. 1, pp. 35–45. (Russian).

17. Galochkin, A. I. 1976, "On arithmetic properties of the values of some entire hypergeometric functions *Sibirsk. Mat. Zh.*, vol. 17, no. 6, pp. 1220–1235. (Russian)

18. Galochkin, A. I., 1984, "Estimates, unimprovable with respect to height, for certain linear forms Mat. Sb., vol. 124(166), no. 3, pp. 416–430. (Russian).

19. Korobov, A. N. 1983, "Estimates of some linear forms *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh.*, no. 6, pp. 36–41. (Russian).

20. Popov, A. Yu. 1985, "Approximations of some degrees of the number e" , *Diophantovy priblizhenija*, part 1. Moskov. Gos. Univ., Moscow (Russian).

21. Ivankov, P. L. 1994, "On approximation of the values of some functions *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh.*, no. 4, pp. 12–15. (Russian).

22. Ivankov, P. L. 1987, "On simultaneous approximations of the values of some entire functions by the numbers from a cubic field *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1, Mat. Meh.*, no. 3, pp. 53–56. (Russian).

23. Ivankov, P. L. 1993, "On linear independence of values of entire hypergeometric functions with irrational parameters *Sibirsk. Mat. Zh.*, vol. 34, no. 5, pp. 839–847. (Russian)

24. Ivankov, P. L. 2017, "On approximation of the values of hypergeometric function with a parameter from real quadratic field *Mathematics and Mathematical Modelling*, no. 1, pp. 25–33. (Russian)

25. Markushevich, A. I. 1967, "Teorija analiticheskikh funktsii"[Theory of analytic functions], v. I. *"Nauka Moscow*, 486 pp. (Russian)

Получено 1.04.2018 г.
Принято в печать 12.07.2019 г.