

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-156-168

Об одном обобщенном эйлеровом произведении, задающем мероморфную функцию на всей комплексной плоскости¹

Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Геофизический центр РАН (г. Москва).

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Аннотация

В работе изучается произведение Эйлера вида

$$P_{\pi}(M, a(p)|\alpha) = \prod_{p \in P(M)} \left(1 - \frac{a(p)}{p^{\alpha + \pi(p)}}\right)^{-1},$$

где M — произвольный моноид натуральных чисел, образованный множеством простых чисел $P(M)$.

Другим объектом изучения является ряд Дирихле вида

$$f_{\pi}(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^{\alpha + \pi(n)}}.$$

Оказывается, что они обладают совершенно разными свойствами. Ряд Дирихле $f_{\pi}(M|\alpha)$ определяет голоморфную функцию на всей комплексной плоскости.

А эйлерово произведение $P_{\pi}(M|\alpha)$ для моноида M , у которого множество простых $P(M)$ бесконечно, задает на всей комплексной плоскости мероморфную функцию, у которой имеется счетное множество особых вертикальных прямых, на каждой из которых счетное множество полюсов.

В заключении рассмотрена актуальная задача о нулях функции $f_{\pi}(M|\alpha)$.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел, эйлерово произведение.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Об одном обобщенном эйлеровом произведении, задающем мероморфную функцию на всей комплексной плоскости // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2, С. 156–168.

¹Работа подготовлена по гранту РФФИ № 19-41-710004_р_а.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-156-168

On a generalized Eulerian product defining a meromorphic function on the whole complex plane²

N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Dobrovol'skii Mikhail Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher, Geophysical centre of RAS (Moscow).

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Abstract

The paper studies the Euler product of the form

$$P_{\pi}(M, a(p)|\alpha) = \prod_{p \in P(M)} \left(1 - \frac{a(p)}{p^{\alpha + \pi(p)}}\right)^{-1},$$

where M is an arbitrary monoid of natural numbers formed by the set of primes $P(M)$.

Another object of study is the Dirichlet series of the form

$$f_{\pi}(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^{\alpha + \pi(n)}}.$$

It turns out that they have completely different properties. The Dirichlet series $f_{\pi}(M|\alpha)$ defines a holomorphic function on the entire complex plane.

And the Euler product $P_{\pi}(M|\alpha)$ for a monoid M whose set of primes $P(M)$ is infinite, sets on the entire complex plane a meromorphic function that has a countable set of special vertical lines, each of which has a countable set of poles.

In conclusion, the relevant problem of the zeros of the function $f_{\pi}(M|\alpha)$ is considered.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, zeta function of the monoid of natural numbers, Euler product.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2019, "On a generalized Eulerian product defining a meromorphic function on the whole complex plane", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 156–168.

²This work was prepared under a grant from the RFBR № 19-41-710004 _r_a.

1. Введение

За последние полтора года начало интенсивно развиваться новое направление исследований, связанное с изучением дзета-функций моноидов натуральных чисел [4, 5, 6, 8, 9, 10, 11].

В последней работе из этого списка показано, что теория дзета-функций моноидов натуральных чисел входит как составная часть в более общую теорию Алгебры рядов Дирихле моноида натуральных чисел, основы которой и были в ней изложены. Из анализа предыдущих статей видно, что особое место в данной теории занимают те ряды Дирихле моноидов натуральных чисел, которые имеют разложение в произведение Эйлера.

В настоящей работе центральное место занимает изучение произведения Эйлера вида

$$P_\pi(\alpha) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{\alpha+\pi(p)}} \right)^{-1}. \quad (1)$$

Кроме этого будут изучены и другие обобщённые произведения Эйлера для моноидов натуральных чисел.

С произведением Эйлера (1) тесно связан следующий ряд Дирихле

$$\zeta_\pi(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\pi(n)}}, \quad (2)$$

который, как будет показано далее, задает голоморфную функцию на всей комплексной плоскости.

2. Основные определения и обозначения

Пусть $M \subset \mathbb{N}$ — произвольный моноид натуральных чисел. Рассмотрим множество $P(M)$ — простых элементов из M . Если $P(M) \subset \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, то моноид M будет моноид с однозначным разложением на простые множители. В работе [5] описан общий вид моноидов с однозначным разложением на простые множители.

В работе [4] показано, что равенство эйлера произведения $P(M|\alpha)$ и дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ моноида M равносильно однозначности разложения на простые элементы в этом моноиде:

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^\alpha} = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha} \right)^{-1} = P(M|\alpha) \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_M, \quad (3)$$

где σ_M — абсцисса абсолютной сходимости дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$. Как хорошо известно [12, 15], для любого моноида $\sigma_M \leq 1$. Если $M \neq \{1\}$ не является тривиальным моноидом, то он содержит бесконечно много элементов и, следовательно, $\sigma_M \geq 0$.

В работе [4] показано, что для любого $q \geq 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ дзета ряд для дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ абсолютно сходится для любого α в полуплоскости $\sigma > 0$ и равномерно в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > 0$.

В работе [6] показано, что областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ является α -полуплоскость $\sigma > 0$. Таким образом, в данном случае $\sigma_M = 0$.

В случае, когда нет однозначности разложения на простые множители

$$P(M|\alpha) = \sum_{x \in M} \frac{k(x)}{x^\alpha}, \quad (4)$$

где $k(x)$ — количество различных канонических представлений числа x и каноническим разложением элемента x из мультипликативного моноида M натуральных чисел называется представление вида

$$x = r_1^{\alpha_1} \dots r_k^{\alpha_k}, \quad 1 < r_1 < \dots < r_k, \quad r_1, \dots, r_k \in P(M).$$

В работе [11] было показано, что ряд Дирихле $f_1(M|\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{Q}}$, заданный равенством

$$f_1(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^{\alpha} n!},$$

будет сходиться для любого комплексного α . Так как $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ для любого числового поля $\mathbb{K}$, то для любого числового поля $\mathbb{K}$ имеем: $\mathbb{DC}(M)_{\mathbb{K}}$ — множество рядов Дирихле, сходящихся для любого комплексного α , непусто.

Рассмотрим ряд Дирихле $f_{\pi}(M|\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{Q}}$, заданный равенством

$$f_{\pi}(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^{\alpha + \pi(n)}}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Ряд Дирихле $f_{\pi}(M|\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{Q}}$ сходится для любого комплексного α : $f_{\pi}(M|\alpha) \in \mathbb{DC}(M)_{\mathbb{K}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 24 мая 1848 г. П. Л. Чебышёв представил в Санкт-Петербургскую Академию наук мемуар “Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины” (Полн. собр. соч., т. I, с. 173–190). Таким образом, в прошлом году исполнилось 170 лет со дня выхода этой принципиальной работы, с которой началась современная теория распределения простых чисел.

Во втором мемуаре он доказал оценки

$$(0, 92 \dots) \frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq (1, 105 \dots) \frac{x}{\ln x}.$$

Обозначим через $c_1 = 0, 92 \dots$ и $c_2 = 1, 105 \dots$ константы из неравенств Чебышёва для функции $\pi(x)$. Заметим, что конечная разность $\Delta\pi(n) = \pi(n) - \pi(n-1)$ является на множестве натуральных чисел характеристической функцией множества простых чисел.

Из оценок П. Л. Чебышёва следует, что

$$\frac{1}{e^{\alpha \ln n + c_2 n}} \leq \frac{1}{n^{\alpha + \pi(n)}} \leq \frac{1}{e^{\alpha \ln n + c_1 n}}.$$

Для любого $\alpha = \sigma + it$ мажорирующим рядом для $f_{\pi}(M|\alpha)$ будет ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma} e^{c_1 n}},$$

который сходится по интегральному признаку Коши, так как сходится несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\sigma} e^{c_1 x}}, \quad \int_{x_{\sigma}}^{\infty} \frac{dx}{x^{\sigma} e^{c_1 x}} \leq \int_{x_{\sigma}}^{\infty} \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}} = \frac{2}{e^{\frac{x_{\sigma}}{2}}},$$

где $x_{\sigma} \geq 1$ определяется из условия $x > -\frac{2\sigma \ln x}{2c_1 - 1}$ при $x > x_{\sigma}$. $\square$

Рассмотрим множество $\mathbb{D}_{\pi}(M)$ — произвольных рядов Дирихле вида

$$f(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{a(n)}{n^{\alpha + \pi(n)}} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_f \geq \sigma_f^*,$$

где σ_f — абсцисса абсолютной сходимости и σ_f^* — абсцисса сходимости. Как хорошо известно [12, 15], для любых рядов Дирихле справедливо неравенство $\sigma_f \leq \sigma_f^* + 1$.

Пусть $\mathbb{K}$ — произвольное числовое поле. Таким образом, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$. Если все коэффициенты $a(n) \in \mathbb{K}$, то множество всех таких рядов Дирихле будем обозначать через $\mathbb{D}_\pi(M)_\mathbb{K}$ и оно является бесконечномерным линейным функциональным пространством над полем $\mathbb{K}$.

Выделим подпространство $\mathbb{D}_\pi^\infty(M)_\mathbb{K}$ условием $\sup_{n \in M} |a(n)| < \infty$. Из теоремы 1 сразу следует, что $\mathbb{D}_\pi^\infty(M)_\mathbb{K} \subset \mathbb{DC}(M)_\mathbb{K}$.

На $\mathbb{D}_\pi^\infty(M)_\mathbb{K}$ зададим норму

$$\|f(\alpha)\| = \sup_{n \in M} |a(n)|.$$

Относительно заданной нормы $\mathbb{D}_\pi^\infty(M)_\mathbb{K}$ является несепарабельным пространством. Оно будет банаховым, если поле $\mathbb{K}$ — банахово пространство над полем $\mathbb{Q}$ относительно нормы, заданной абсолютной величиной числа из поля $\mathbb{K}$. Так как отсюда следует, что либо $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, либо $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то $\mathbb{D}_\pi^\infty(M)_\mathbb{K}$ — банахово пространство, только для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, либо $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Нетрудно понять, что пространство $\mathbb{D}_\pi^\infty(M)_\mathbb{K}$ над полем $\mathbb{K}$ не является алгеброй, так как нет замкнутости относительно произведения рядов Дирихле. Действительно, если перемножить два ряда Дирихле из $\mathbb{D}_\pi^\infty(M)_\mathbb{K}$:

$$f(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{a(n)}{n^{\alpha + \pi(n)}}, \quad g(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{b(n)}{n^{\alpha + \pi(n)}},$$

то получим

$$f(\alpha)g(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{c(n)}{n^{\alpha + \pi(n)}},$$

$$c(n) = n^{\pi(n)} \sum_{m|n, m \in M} \frac{a(m)b\left(\frac{n}{m}\right)}{m^{\pi(m)}\left(\frac{n}{m}\right)^{\pi\left(\frac{n}{m}\right)}} = \sum_{m|n, m \in M} a(m)b\left(\frac{n}{m}\right) m^{\pi(n) - \pi(m)} \left(\frac{n}{m}\right)^{\pi(n) - \pi\left(\frac{n}{m}\right)}.$$

Таким образом, ограниченность коэффициентов $c(n)$, вообще говоря, отсутствует.

3. Ряд Дирихле геометрической прогрессии и теоремы Вейерштрасса и Миттаг–Леффлера

Рассмотрим геометрическую прогрессию $M(p)$:

$$M(p) = \{1, p, p^2, \dots, p^n, \dots\}$$

и ряд Дирихле из $\mathbb{D}_\pi(M(p))$

$$f_\pi(M(p), a|\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{p^{n(\alpha + \pi(p))}} = \left(1 - \frac{a}{p^{\alpha + \pi(p)}}\right)^{-1}, \quad |a| < |p^{\alpha + \pi(p)}|.$$

Для дальнейшего нам потребуются сведения из работы [8] относительно дзета-функции геометрической прогрессии, которые приведём без доказательства.

Прежде всего, рассмотрим целую функцию $q^\alpha - 1$, которая имеет бесконечно много нулей, а, именно, $\alpha = 0$ и $\alpha_n = \frac{2\pi ni}{\ln q}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$).

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство*

$$e^\alpha - 1 = e^{\frac{\alpha}{2}} \alpha \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2}{4\pi^2 n^2}\right). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [8]. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Справедливо равенство*

$$q^\alpha - 1 = q^{\frac{\alpha}{2}} (\alpha \ln q) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2} \right). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [8]. $\square$

Таким образом, для целой функции $q^\alpha - 1$ теорема Вейерштрасса имеет вид:

$$q^\alpha - 1 = q^{\frac{\alpha}{2}} (\alpha \ln q) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2} \right). \quad (7)$$

Дзета-функция геометрической прогрессии $M(q)$ задается формулой

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q^n)^\alpha} = \frac{1}{1 - \frac{1}{q^\alpha}} \quad (\alpha = \sigma + it, \sigma > 0). \quad (8)$$

Из формулы (8) следует, что дзета-функция геометрической прогрессии аналитическая функция во всей α -плоскости кроме точек $\alpha_0 = 0$, где у неё простой полюс с вычетом

$$\text{Res}_0 \zeta(M(q)|\alpha) = \frac{1}{\ln q}.$$

и точек $\alpha_k = \frac{2ki\pi}{\ln q}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), в которых простые полюса с вычетами

$$\text{Res}_{\frac{2ki\pi}{\ln q}} \zeta(M(q)|\alpha) = \frac{1}{\ln q}.$$

Отсюда следует, что $\zeta(M(q)|\alpha)$ — мероморфная функция на комплексной α -плоскости, которая имеет следующее разложение в бесконечное произведение

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{q^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha \ln q} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2} \right)^{-1}. \quad (9)$$

А следовательно, к ней применима теорема Миттаг–Леффлера (см. [16], стр. 225). Как показано в работе [8], теорема Миттаг–Леффлера для дзета-функции геометрической прогрессии записывается следующим образом:

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha \ln q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha \ln q}{\alpha^2 \ln^2 q + 4n^2 \pi^2}. \quad (10)$$

Из равенств (8)–(10) легко получаются функциональные уравнения для дзета-функции геометрической прогрессии:

$$\zeta(M(q)|\alpha) = -q^\alpha \zeta(M(q)|-\alpha), \quad (11)$$

$$\zeta(M(q)|\alpha) = 1 - \zeta(M(q)|-\alpha). \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$f_\pi(M(p), a|\alpha) = \left(1 - \frac{a}{p^{\alpha+\pi(p)}} \right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{p^{\alpha+\pi(p)-\frac{\ln a}{\ln p}}} \right)^{-1} = \zeta \left(M(p) \middle| \alpha + \pi(p) - \frac{\ln a}{\ln p} \right). \quad (13)$$

Отсюда следует, что ряд Дирихле $f_\pi(M(p), a|\alpha)$ аналитически продолжается и задаёт мероморфную функцию на всей комплексной плоскости, у которой бесконечное множество полюсов первого порядка с одним и тем же вычетом $\frac{1}{\ln p}$ в точках $\alpha_0 = -\pi(p) + \frac{\ln a}{\ln p}$ и $\alpha_k = -\pi(p) + \frac{\ln a}{\ln p} + \frac{2ki\pi}{\ln p}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$).

Для этого ряда Дирихле теоремы Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера запишутся следующим образом:

$$f_\pi(M(p), a|\alpha) = \frac{p^{\frac{\alpha+\pi(p)}{2}}}{((\alpha + \pi(p)) \ln p - \ln a) a^{\frac{1}{2}}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{((\alpha + \pi(p)) \ln p - \ln a)^2}{4\pi^2 n^2} \right)^{-1}, \quad (14)$$

$$f_\pi(M(p), a|\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{(\alpha + \pi(p)) \ln p - \ln a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((\alpha + \pi(p)) \ln p - \ln a)}{((\alpha + \pi(p)) \ln p - \ln a)^2 + 4n^2 \pi^2}. \quad (15)$$

Из найденных соотношений несложно вывести функциональные уравнения для функции $f_\pi(M(p), a|\alpha)$:

$$f_\pi(M(p), a|\alpha) = 1 - f_\pi \left(M(p), a \left| -\alpha - 2\pi(p) + \frac{2 \ln a}{\ln p} \right. \right), \quad (16)$$

$$f_\pi(M(p), a|\alpha) = -\frac{p^{\alpha+\pi(p)}}{a} f_\pi \left(M(p), a \left| -\alpha - 2\pi(p) + \frac{2 \ln a}{\ln p} \right. \right). \quad (17)$$

4. Ряд Дирихле геометрической прогрессии и гамма-функция Эйлера

Хорошо известна формула (см. [1], стр. 326)

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = \alpha e^{\gamma\alpha} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n} \right) e^{-\frac{\alpha}{n}}. \quad (18)$$

Из неё следует, что

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha)} = -\alpha^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2} \right).$$

Отсюда вытекает, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2} \right)^{-1} = - \left(\frac{\alpha i \ln q}{2\pi} \right)^2 \Gamma \left(\frac{\alpha i \ln q}{2\pi} \right) \Gamma \left(-\frac{\alpha i \ln q}{2\pi} \right).$$

Но тогда из равенства (9) следует, что

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{q^{\frac{\alpha}{2}} \alpha \ln q}{4\pi^2} \Gamma \left(\frac{\alpha i \ln q}{2\pi} \right) \Gamma \left(-\frac{\alpha i \ln q}{2\pi} \right). \quad (19)$$

Из формулы (19) сразу следует, что дзета-функция геометрической прогрессии имеет полюса в точках $\alpha = \frac{2\pi ni}{\ln q}$, ($n \in \mathbb{Z}$), так как гамма функция имеет полюса в 0 и в отрицательных целых точках.

Также из формулы (19) сразу следует функциональное уравнение для дзета-функции геометрической прогрессии:

$$\zeta(M(q)|-\alpha) = \frac{q^{\frac{-\alpha}{2}} (-\alpha) \ln q}{4\pi^2} \Gamma \left(\frac{\alpha i \ln q}{2\pi} \right) \Gamma \left(-\frac{\alpha i \ln q}{2\pi} \right) = -\frac{\zeta(M(q)|\alpha)}{q^\alpha}. \quad (20)$$

Так как

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \zeta(M(q)|\alpha) = 1 \quad (\alpha = \sigma + it),$$

то

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \zeta(M(q)|-\alpha) = 0 \quad (\alpha = \sigma + it).$$

Из равенств 13 и 19 следует, что

$$f_{\pi}(M(p), a|\alpha) = \frac{p^{\frac{\alpha+\pi(p)}{2}} \beta}{4\pi^2 a^{\frac{1}{2}}} \Gamma\left(\frac{i\beta}{2\pi}\right) \Gamma\left(-\frac{i\beta}{2\pi}\right), \quad \beta = (\alpha + \pi(p)) \ln q - \ln a. \quad (21)$$

5. Ряд Дирихле моноида с конечным числом простых чисел

Пусть $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ — произвольный вектор с простыми $p_1 < p_2 < \dots < p_n$. Через $M(\vec{p})$ обозначим минимальный моноид натуральных чисел, образованный простыми числами $p_1, \dots, p_n$, а через $a(p) \neq 0$ — произвольную функцию на множестве указанных простых, удовлетворяющую условию $0 < |a(p)| \leq p^{\pi(p)}$ и $\sigma_n < \sigma_{n-1} < \dots < \sigma_1$, где $\sigma_{\nu} = \operatorname{Re} \left(-\pi(p_{\nu}) + \frac{\ln a(p_{\nu})}{\ln p_{\nu}} \right)$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$).

Рассмотрим ряд Дирихле

$$f_{\pi}(M(\vec{p}), a(p)|\alpha) = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \frac{a^{m_1}(p_1) \dots a^{m_n}(p_n)}{p_1^{m_1(\alpha+\pi(p_1))} \dots p_n^{m_n(\alpha+\pi(p_n))}} = \prod_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{a(p_{\nu})}{p_{\nu}^{\alpha+\pi(p_{\nu})}} \right)^{-1},$$

который задает мероморфную функцию на всей комплексной плоскости с бесконечным множеством полюсов первого порядка в точках $\alpha_{\nu,0} = -\pi(p_{\nu}) + \frac{\ln a(p_{\nu})}{\ln p_{\nu}}$ и $\alpha_{\nu,k} = -\pi(p_{\nu}) + \frac{\ln a(p_{\nu})}{\ln p_{\nu}} + \frac{2ki\pi}{\ln p_{\nu}}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), ($\nu = 1, \dots, n$).

Через $P_{\pi}(M(\vec{p}), a(p)|\alpha)$ будем обозначать соответствующее обобщённое произведение Эйлера:

$$P_{\pi}(M(\vec{p}), a(p)|\alpha) = \prod_{\nu=1}^n f_{\pi}(M(p_{\nu}), a(p_{\nu})|\alpha) = \prod_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{a(p_{\nu})}{p_{\nu}^{\alpha+\pi(p_{\nu})}} \right)^{-1}.$$

Если взять $a(p) = p^{\pi(p)}$, то получим дзета-функцию моноида $M(\vec{p})$:

$$P_{\pi}(M(\vec{p}), p^{\pi(p)}|\alpha) = \prod_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_{\nu}^{\alpha}} \right)^{-1} = \sum_{n \in M(\vec{p})} \frac{1}{n^{\alpha}} = \zeta(M(\vec{p})|\alpha) \quad (\alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 0).$$

Очевидно, что для дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$ справедливо равенство

$$\zeta(M(\vec{p})|\alpha) = \prod_{\nu=1}^n \zeta(M(p_{\nu})|\alpha) = \prod_{\nu=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_{\nu}^{\alpha}}}. \quad (22)$$

Из равенств (22) и (9) следует, что дзета-функция $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$ — мероморфная функция на комплексной α -плоскости, которая имеет следующее разложение в бесконечное произведение

$$\zeta(M(\vec{p})|\alpha) = \prod_{\nu=1}^n \left(\frac{p_{\nu}^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha \ln p_{\nu}} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 p_{\nu}}{4\pi^2 m^2} \right)^{-1} \right). \quad (23)$$

Если положить $P(\vec{p}) = p_1 \dots p_n$, $Q(\vec{p}) = \ln p_1 \dots \ln p_n$, то равенство (23) можно переписать в следующем виде:

$$\zeta(M(\vec{p})|\alpha) = \frac{P(\vec{p})^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha^n Q(\vec{p})} \prod_{\nu=1}^n \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 p_{\nu}}{4\pi^2 m^2} \right)^{-1}. \quad (24)$$

Будем через $S(A)$ обозначать множество полюсов дзета-функции

$$\zeta(A|\alpha) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \sigma > 1)$$

произвольного множества натуральных чисел A . Если A — конечное множество, то $S(A) = \emptyset$.

Используя эти обозначения, получим равенство

$$S(M(\vec{p})) = \bigcup_{\nu=1}^n S(M(p_\nu)) = \left\{ \frac{2\pi ki}{\ln p_\nu} \mid k \in \mathbb{Z}, \nu = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Для дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$ справедливо функциональное уравнение

$$\zeta(M(\vec{p})|\alpha) = (-1)^n \frac{\zeta(M(\vec{p})|-\alpha)}{P(\vec{p})^\alpha}. \quad (25)$$

Рассмотрим обратный ряд $\zeta^*(M(\vec{p})|\alpha)$ для дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$. По принципу вложенности из работы [5] получаем, что

$$\begin{aligned} \zeta^*(M(\vec{p})|\alpha) &= \sum_{n \in M(\vec{p})} \frac{\mu(n)}{n^\alpha} = \prod_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_\nu^\alpha} \right), \\ \zeta^*(M^*(\vec{p})|\alpha) &= \sum_{n \in M^*(\vec{p})} \frac{\mu(n)}{n^\alpha} = \prod_{p \neq p_\nu (\nu=1, \dots, n)} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha} \right), \end{aligned}$$

где $\mu(n)$ — обычная функция Мёбиуса.

Функция $\zeta^*(M(\vec{p})|\alpha)$ задается своим эйлеровым произведением на всей комплексной плоскости и является целой функцией, для которой множество нулей совпадает с множеством полюсов $S(M(\vec{p}))$ дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$. Для неё справедливо функциональное уравнение

$$\zeta^*(M(\vec{p})|\alpha) = (-1)^n P(\vec{p})^\alpha \zeta^*(M(\vec{p})|-\alpha).$$

6. Обобщённые произведения Эйлера

Рассмотрим произвольную функцию $a(p) \neq 0$, удовлетворяющую условию $0 < |a(p)| \leq p^{\pi(p)}$. Ряд Дирихле

$$f\pi(M(p), a(p)|\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n(p)}{p^{n(\alpha + \pi(p))}} = \left(1 - \frac{a(p)}{p^{\alpha + \pi(p)}} \right)^{-1}$$

задает мероморфную функцию на всей комплексной плоскости с бесконечным множеством полюсов первого порядка с одним и тем же вычетом $\frac{1}{\ln p}$ в точках $\alpha_0 = -\pi(p) + \frac{\ln a(p)}{\ln p}$ и $\alpha_k = -\pi(p) + \frac{\ln a(p)}{\ln p} + \frac{2ki\pi}{\ln p}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$).

Пусть M — произвольный моноид с однозначным разложением на простые множители: $P(M) \subset \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел.

Через $P_\pi(M, a(p)|\alpha)$ обозначим обобщённое произведение Эйлера:

$$P_\pi(M, a(p)|\alpha) = \prod_{p \in P(M)} f\pi(M(p), a(p)|\alpha) = \prod_{p \in P(M)} \left(1 - \frac{a(p)}{p^{\alpha + \pi(p)}} \right)^{-1}.$$

При $a(p) \equiv 1$ будем писать просто $P_\pi(M|\alpha)$.

Если взять $a(p) = p^{\pi(p)}$, то получим дзета-функцию моноида M :

$$P_{\pi}(M, p^{\pi(p)}|\alpha) = \prod_{p \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{p^{\alpha}}\right)^{-1} = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_M,$$

где σ_M — абсцисса абсолютной сходимости.

В частности, при $M = \mathbb{N}$ получим дзета-функцию Римана:

$$P_{\pi}(\mathbb{N}, p^{\pi(p)}|\alpha) = \zeta(\alpha), \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1.$$

ТЕОРЕМА 2. Если $a(p) \neq 0$ — произвольная ограниченная функция, то обобщённое произведение Эйлера $P_{\pi}(M, a(p)|\alpha)$ задаёт мероморфную функцию на всей комплексной плоскости, которая имеет бесконечное множество полюсов первого порядка $S_{\pi}(M, a(p))$:

$$S_{\pi}(M, a(p)) = \bigcup_{p \in P(M)} \left\{ \alpha_{p,0} = -\pi(p) + \frac{\ln a(p)}{\ln p}, \alpha_{p,k} = -\pi(p) + \frac{\ln a(p)}{\ln p} + \frac{2ki\pi}{\ln p} (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $P(M)$ — конечное множество, то обобщённое произведение Эйлера $P_{\pi}(M, a(p)|\alpha)$ состоит из конечного числа сомножителей, каждый из которых мероморфная функция на всей комплексной плоскости, и, значит, утверждение теоремы выполнено.

Пусть теперь $P(M)$ — бесконечное множество:

$$P(M) = \{p_{\nu_1} < p_{\nu_2} < \dots < p_{\nu_n} < \dots\},$$

где используется естественная нумерация простых чисел в $\mathbb{P}$. Отсюда следует, что $\pi(p_{\nu_n}) = \nu_n$.

Рассмотрим последовательность абсцисс абсолютной сходимости сомножителей

$$f\pi(M(p_{\nu_n}), a(p_{\nu_n})|\alpha) : \quad \sigma_n = \operatorname{Re} \left(-\pi(p_{\nu_n}) + \frac{\ln a(p_{\nu_n})}{\ln p_{\nu_n}} \right),$$

придел которой равен $-\infty$. Отсюда следует, что для любого вещественного σ_0 найдётся номер N такой, что последовательность $\frac{a(p_{\nu_n})}{p_{\nu_n}^{\alpha + \pi(p_{\nu_n})}}$ мажорируется последовательностью $\frac{1}{p_{\nu_n}^2}$ в полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > \sigma_0$.

Отсюда следует, что произведение

$$\prod_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{a(p_{\nu_n})}{p_{\nu_n}^{\alpha + \pi(p_{\nu_n})}}\right)^{-1}$$

в полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > \sigma_0$ абсолютно и равномерно сходится, так как сходится произведение

$$\prod_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_{\nu_n}^2}\right)^{-1}.$$

Тем самым теорема полностью доказана в силу произвольности σ_0 . $\square$

7. Заключение

Известно логарифмическое свойство числа простых: $\pi(xy) > \pi(x) + \pi(y)$. Отсюда следует, что $\pi(p^n) > n\pi(p)$. Тогда для любого $\alpha > -\pi(p)$ имеем

$$\left(1 - \frac{1}{p^{\alpha + \pi(p)}}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{n(\alpha + \pi(p))}} > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{n(\alpha + \pi(p^n))}}.$$

Отметим, что последний ряд абсолютно сходится для любого комплексного α .

Так как для любого вещественного α имеем

$$\frac{1}{(nm)^{\alpha+\pi(nm)}} < \frac{1}{n^{\alpha+\pi(n)}m^{\alpha+\pi(m)}},$$

то

$$f_{\pi}(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^{\alpha+\pi(n)}} < \prod_{p \in P(M)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{n(\alpha+\pi(p^n))}} < \prod_{p \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{p^{\alpha+\pi(p)}}\right)^{-1} = P_{\pi}(M|\alpha).$$

Эта цепочка неравенств объясняет почему функция $f_{\pi}(M|\alpha)$ голоморфна на всей плоскости, а произведение $P_{\pi}(M|\alpha)$ мероморфно, причём имеет счетное множество особых вертикальных прямых, на каждой из которых имеется счетное множество полюсов.

Интересно было бы выяснить: имеет ли функция $f_{\pi}(M|\alpha)$ нули на комплексной плоскости? Очевидно, что их нет на вещественной прямой. Кроме того, если они есть, то они симметричны относительно вещественной прямой, так как образуют пары сопряженных значений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.
2. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.
3. Демидов С. С., Морозова Е. А., Чубариков В. Н., Реброва И. Ю., Балаба И. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М., Добровольская Л. П., Родионов А. В., Пихтилькова О. А. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 6–85.
4. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.
5. Добровольский Н. Н. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 79–105.
6. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 142–150.
7. Добровольский Н. Н. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 148–163.
8. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 106–123.
9. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2, С. 123–141.
10. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 3, С. 95–108.
11. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.

12. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. 188 с.
13. Чебышёв П. Л. Полное собрание сочинений, т. I–V. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1944–1951.
14. Чебышёв П. Л. Избранные труды. — М.: Изд-во АН СССР, 1955, 926 с.
15. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L -функций Дирихле. — М.-Л.: ОГИЗ, 1947. 204 с.
16. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1969. — 576 с.

REFERENCES

1. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, *Dzeta-funkcija Rimana*, Izd-vo Fiz-matlit, Moskva, 376 p.
2. Gurvic A., Kurant R., 1968, *Teorija funkcij*, Izd-vo Nauka, Moskva, 618 p.
3. Demidov S. S., Morozova E. A., Chubarikov V. N., Rebrov I. Yu., Balaba I. N., Dobrovol'skii N. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovol'skaya L. P., Rodionov A. V., Pikhtil'kova O. A., 2017, "Number-theoretic method in approximate analysis" *Chebyshevskii Sbornik* vol. 18, № 4. pp. 6–85.
4. Dobrovolsky N. N., 2017, "The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization", *Chebyshevskii Sbornik*, vol 18, № 4 pp. 188–208.
5. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 79–105.
6. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "The zeta function of monoids with a given abscissa of absolute convergence", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 142–150.
7. N. N. Dobrovol'skii, 2019, "One model Zeta function of the monoid of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 148–163.
8. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, "About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 106–123.
9. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the number of prime elements in certain monoids of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 123–141.
10. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the monoid of quadratic residues", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 95–108.
11. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2019, "Dirichlet series algebra of a monoid of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 180–196.
12. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.
13. Chebyshev P. L., 1944–1951, "Complete works, v. I–V. ", *M.-L.: Izd-vo AN SSSR*.
14. Chebyshev P. L., 1955, "Selected works.", *M.: Izd-vo AN SSSR*, 926 p.
15. Chudakov N. G., 1947, *Introduction to the theory of L-Dirichlet functions* — M.-L.: OGIZ, — 204 p.

16. Shabat B. V., 1969, *Introduction to complex analysis*. — М.: Science, 576 p.

Получено 18.05.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.