ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 1.

УДК 511

О НУЛЯХ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА $\zeta(S)$, ЛЕЖАЩИХ НА ПОЧТИ ВСЕХ КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКАХ КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

До Дык Там (г. Белгород)

Аннотация

Настоящая работа посвящена проблеме распределения нетривиальных нулей дзета-функция Римана $\zeta(s)$ на критической прямой $\Re s = 1/2$. На полуплоскости $\Re s > 1$ дзета-функция Римана задаётся рядом Дирихле

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s},$$

и аналитически продолжается на всю комплексную плоскость кроме точки $s = 1$. Хорошо известно, что все нетривиальные нули дзета-функция Римана расположены симметрично действительной оси и прямой $\Re s = 1/2$, которая называется критической. В 1959 г. Риман высказал гипотезу о том, что все нетривиальные нули $\zeta(s)$ лежат на критической прямой $\Re s = 1/2$. Первое доказательство бесконечности множества нулей $\zeta(s)$ на критической прямой принадлежит Г. Харди. В 1942 г. А. Сельберг установил, что больше, чем $cH \ln T$ нулей нечетного порядка функции $\zeta(0,5+it)$ лежит на отрезке $[T, T+H], H = T^{0,5+\varepsilon}$, где ε — произвольная малая постоянная. В 1984 г. А. А. Карацуба усилил результат Сельберга, а именно для отрезка критической прямой меньшей длины $[T, T+H], H = T^{27/82+\varepsilon}$. Проблема уменьшения длины выше указанного отрезка представляет собой трудность. Тем не менее, если рассматривать эту задачу «в срденем», то она решена А. А. Карацубой. Он доказал, что почти все отрезки прямой $\Re s = 1/2$ вида $[T, T+X^{\varepsilon}]$, где $0 < X_0(\varepsilon) < X \leqslant T \leqslant 2X$, содержат более $c_0(\varepsilon)T^{\varepsilon} \ln T$ нулей нечетного порядка функции $\zeta(1/2+it)$. В 1988 г. Киселёва Л. В. получила результат подобного рода, но для отрезка $(X, X + X^{11/12+\varepsilon})$. В настоящей работе длина отрезка осреднения уменьшена. Автор доказал результат Карацубы для отрезка $(X, X + X^{7/8+\varepsilon})$.

Ключевые слова: дзета-функция, нетривиальные нули, критическая прямая.

Библиография: 17 названий.

ON THE ZEROS OF THE RIEMANN ZETA FUNCTION, LYING IN ALMOST ALL SHORT INTERVALS OF THE CRITICAL LINE.

Do Duc Tam (Belgorod)

Abstract

In this paper, we study the distribution of non-trivial zeros of the Riemann zeta function $\zeta(s)$, which are on the critical line $\Re s = 1/2$. On the half-plane $\Re s > 1$, the Riemann zeta function is defined by Dirichlet series

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s},$$

and it can be analytically continued to the whole complex plane except the point $s = 1$. It is well-known that the non-trivial zeros of the Riemann zeta function are symmetric about the real axis and the line $\Re s = 1/2$. This line is called critical. In 1859, Riemann conjectured that all non-trivial zeros of the Riemann zeta function lie on the critical line $\Re s = 1/2$. Hardy was the first to show in 1914 that $\zeta(1/2 + it)$ has infinitely many real zeros. In 1942, Selberg obtained lower bound of the correct order of magnitude for the number zeros of the Riemann zeta functions on intervals of critical line $[T, T+H], H = T^{0.5+\varepsilon}$, where ε — an arbitrary small constant. In 1984, A. A. Karatsuba proved Selberg's result for shorter intervals of critical line $[T, T+H], H = T^{27/82+\varepsilon}$. It is difficult to reduce the length of interval, which was pointed out above. However, if we consider this problem on average, then it was solved by Karatsuba. He proved that almost all intervals of line $\Re s = 1/2$ of the form $[T, T+X^{\varepsilon}]$, where $0 < X_0(\varepsilon) < X \leqslant T \leqslant 2X$, contain more than $c_0(\varepsilon)T^{\varepsilon}\ln T$ zeros of odd orders of the function $\zeta(1/2+it)$. In 1988, Kicileva L. V. obtained result of this kind, but for the averaging intervals $(X, X + X^{11/12+\varepsilon})$. In this paper, the length of the averaging interval has reduced. We proved Karatsuba's result for interval $(X, X + X^{7/8+\varepsilon})$.

Keywords: the Riemann zeta function, non-trivial zeros, critical line.

Bibliography: 17 titles.

1. Введение

Дзета-функция Римана задаётся на полуплоскости $\Re s > 1$ рядом Дирихле

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s},$$

и аналитически продолжается на всю комплексную плоскости кроме точки $\Re s = 1$. Леонард Эйлер доказал следующее замечательное тождество, выражающее $\zeta(s)$ через эйлерово произведение

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \Re s > 1.$$

Бернхард Риман стал изучать дзета-функцию как функцию комплексного переменного. В 1859 г. Б. Риман [1] высказал гипотезу о том, что все нетривиальные нули $\zeta(s)$ дзета-функции лежат на критической прямой $\Re s = 1/2$.

Первое доказательство бесконечности количества нулей $\zeta(s)$ на критической прямой принадлежит Г. Харди [2]. Пусть $N_0(T)$ — число нулей нечетного порядка функции $\zeta(0,5 + it)$, лежащих на промежутке $(0, T]$. В 1921 г. Г. Харди и Д. Литтлвуд [2] доказали следующую теорему:

Для любого $\varepsilon > 0$ существуют $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0, c = c(\varepsilon) > 0$ такие, что при $T > T_0, H = T^{0.5+\varepsilon}$ справедливо неравенство:

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geq cH.$$

В 1942 г. А. Сельберг улучшил результат Харди и Литтлвуда. Он доказал, что при условиях теоремы Харди и Литтлвуда справедливо неравенство:

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geq cH \ln T. \tag{1}$$

Из формулы Мангольдта

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T)$$

для числа $N(T)$ нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0 \le \Re s \le 1$, $0 \le \Im s \le T$ следует, что оценка Сельберга (1) является неулучшаемой по порядку роста при $T \to +\infty$.

Сельберг [3] высказал гипотезу о том, что оценка (1) имеет место при меньших H, то есть, при $H = T^{\alpha+\varepsilon}$, где α положительная постоянная, меньшая $1/2$.

Ряд замечательных работ о нулях дзета-функкции Римана выполнил А. А. Карацуба [4]–[10]. В 1984 г. А. А. Карацуба установил, что неравенство (1) справедливо при $H = T^{27/82+\varepsilon}$. Тем самым он доказал гипотезу Сельберга о числе нулей дзета-функкции Римана, лежащих на критической прямой. А. А. Карацуба решил задачу о числе нулей дзета-функкции Римана на очень коротких промежутках критической прямой «в среднем». В [6] доказана следующая теорема:

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно малое фиксированное число, $X \geqslant X_0(\varepsilon) > 0$, $H = X^{\varepsilon}$, $X \leqslant T \leqslant 2X$. Рассмотрим соотношение:

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant c_1 H \ln T, \tag{2}$$

где $c_1 = c_1(\varepsilon) > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от ε, и через E_1 обозначим множество тех T из промежутка $X \leqslant T \leqslant 2X$, для которых (2) не выполняется. Тогда для меры этого множества $\mu(E_1)$ справедлива оценка:

$$\mu(E_1) \leqslant X^{1-0{,}5\varepsilon}.$$

В 1988 г. Киселёва Л. В. [12] получила результат подобного рода, но для отрезка $(X, X+$ $+X^{11/12+\varepsilon})$. В настоящей работе автор уменьшил длину отрезка осреднения. Сформулируем основные теоремы:

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, $X > X_0(\varepsilon) > 0$, $H = X^{\varepsilon}$, $X_1 \ge X^{7/8+\varepsilon}$, $X \le T \le X + X_1$.*

Через E обозначим множество тех T из промежутка $[X, X+X_1]$, для которых интервал $[T, T+H]$ содержит меньше, чем $c_0 H \ln T$ нулей нечетного порядка функции $\zeta(0{,}5+it)$, где $c_0 = c_0(\varepsilon) > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от ε. Тогда для меры этого множества $\mu(E)$ справедлива оценка $\mu(E) \leqslant X_1 X^{-0{,}5\varepsilon}$.

Теорема 2. *Пусть $0 < \varepsilon$ — произвольно малое число, $X \ge X_0(\varepsilon) > 0$, $H = X^{\varepsilon}$, $X_1 \geqslant X^{7/8+\varepsilon}$, $X \le T \le X + X_1$, $M = [X/H]$, $M_1 = [X_1/H]$. При $m = M+1, M+2, \cdots, M+M_1$ рассмотрим интервалы вида $[mH, mH+H]$.*

Тогда в каждом из указанных интервалов, за исключением не более $M_1 M^{-0{,}5\varepsilon}$ из них, содержится более чем $c_1 H \ln T$ нулей нечетного порядка функции $\zeta(0{,}5+it)$, где $c_1 = c_1(\varepsilon) > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от ε.

2. Вспомогательные утверждения

В дальнейшем будем употреблять следующие обозначения: $\varepsilon, \varepsilon_1 \cdots > 0$ — произвольно малые фиксированные числа, X — растущий параметр, $X_1 \geqslant X^{7/8+\varepsilon}$, $X \le T \le X + X_1$, $P = \sqrt{T/2\pi}$, $H = X^{\varepsilon}$, $L = \ln X$, $Y = H^{0{,}01}$, $0 < h < h_1 < 1$ — параметры, зависящие от T, значение которых будет определено позднее, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \cdots$ — положительные рациональные числа, знаменатель которых не превосходит Y, действительные числа $\alpha(\nu)$ находятся из соотношения

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta(s)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^2}, \qquad \Re s > 1,$$

числа $\beta(\nu)$ и $a(\lambda)$ определяются следующим образом:

$$a(\lambda) = \sum_{n\nu_1 = \lambda\nu_2} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{\nu_2}, \quad \beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\left(1 - \ln\nu/\ln Y\right), \text{если } 1 \le \nu < Y, \\ 0, \text{если } \nu \ge Y. \end{cases}$$

Лемма 1. *Пусть при $j=1,2$ суммы $W_j(T)$ определяются равенствами:*

$$W_1(T)=\sum_{\lambda_1<\lambda_2\le P}\frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2\right),$$

$$W_2(T)=\sum_{\lambda_1<\lambda_2\le P}\frac{a(\lambda_1)d(\lambda_1)a(\lambda_2)\overline{d(\lambda_2)}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2\right),$$

где

$$d(\lambda)=\int_{-h_1}^{h_1}e^{-(u/h)^2}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{iu}du.$$

Тогда справедливы следующие оценки:

$$\int_X^{X+X_1}W_1^2(T)dT\ll\frac{X_1Y^{11}L^{10}}{H},\quad \int_X^{X+X_1}W_2^2(T)dT\ll\frac{h^4X_1Y^{11}L^{10}}{H},$$

где постоянные в знаке $\ll$ зависят только от ε.

Доказательство. Пусть $W(T)$ — одна из двух сумм $W_j(T), j=1,2$. Через $D(\lambda_1,\lambda_2)$ будем обозначать слагаемые $W(T)$. Пусть далее, $d_1(\lambda)=1$, $h_2=1$, если $W(T)=W_1(T)$, а $d_1(\lambda)=d(\lambda)$, $h_2=h$, если $W(T)=W_2(T)$. Легко видеть, что часть суммы $W(T)$, отвечающая таким слагаемым, у которых $\lambda_2>\lambda_1(1+L/H)$, есть величина $O(e^{-0{,}01L^2})$. Таким образом, в силу определения $a(\lambda)$, имеем

$$|W(T)|^2\ll\left|\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4\leqslant Y}S(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)\right|^2+O(e^{-0{,}02L^2}),$$

где

$$S(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)=\sum_{n_1\leqslant P\nu_2/\nu_1}\sum_{\substack{n_1\nu_1\nu_4/(\nu_2\nu_3)<n_2\leqslant n_1\nu_1\nu_4/(\nu_2\nu_3)(1+L/H)\\ n_2<P\nu_4/\nu_3}}D\left(\frac{n_1\nu_1}{\nu_2},\frac{n_2\nu_2}{\nu_3}\right).$$

Далее, применяя неравенство Коши к сумме по ν_1,ν_2,ν_3,ν_4, получаем

$$|W(T)|^2\ll Y^4\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4\leqslant Y}|S(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)|^2+O(e^{-0{,}02L^2}).$$

Следовательно,

$$\int_X^{X+X_1}|W(T)|^2\,dT\ll Y^8\int_X^{X+X_1}\left|\sum_{n_1\leqslant\alpha P}\sum_{\substack{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+L/H)\\ n_2\leqslant\gamma P}}\Phi(n_1,n_2,T)\right|^2dT,$$

где

$$\Phi(n_1,n_2,T)=\frac{d_1(n_1\nu_1/\nu_2)\overline{d_1(n_2\nu_3/\nu_4)}}{\sqrt{n_1n_2\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{n_2}{n_1\beta}\right)\right)^2\right),$$

$\alpha=\nu_2/\nu_1,\beta=\nu_1\nu_4/(\nu_2\nu_3),\gamma=\nu_4/\nu_3$ и ν_1,ν_2,ν_3,ν_4 — некоторые фиксированные натуральные числа, не превосходящие Y. Пусть $P_0=\sqrt{X/(2\pi)}$. Разбивая промежуток суммирования по n_1 на два промежутка точкой $P_0\alpha$, приходим к неравенству:

$$\int_X^{X+X_1}|W(T)|^2\,dT\ll Y^8\left(\int_X^{X+X_1}\left|\sum_{n_1\leqslant P_0\alpha}\sum_{\substack{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+L/H)\\ n_2\leqslant P\gamma}}\Phi(n_1,n_2,T)\right|^2dT+\right.$$

$$+\int_X^{X+X_1}\left|\sum_{P_0\alpha<n_1\leqslant P\alpha}\ \sum_{\substack{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+L/H)\\ n_2\leqslant P\gamma}}\Phi(n_1,n_2,T)\right|^2 dT\Bigg). \tag{3}$$

Обозначаем интегралы в правой части (3) через J_1 и J_2. В подынтегральной сумме для J_1 $n_1\leqslant P_0\alpha$, а для J_2 — $P_0\alpha<n_1\leqslant P\alpha$.

Оценим J_2 сверху. Пусть $P_2=\sqrt{(X+X_1)/(2\pi)}$ и $M=[P_2Y]+1$. Пользуясь формулой

$$\frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1}\ \sum_{P_0\alpha<n'\leqslant P\alpha} e^{2\pi il(n-n')/M}=\begin{cases}1, & \text{если } n=n',\\ 0, & \text{если } n\neq n',\end{cases}$$

преобразуем подынтегральную сумму по n_1,n_2 в J_2 так:

$$\sum_{\substack{P_0\alpha<n_1\leqslant P\alpha\\ n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+L/H)\\ n_2\leqslant P\gamma}}\Phi(n_1,n_2,T)=\frac{1}{M^2}\sum_{l_1,l_2=0}^{M-1}\ \sum_{P_0\alpha<n_1',n_2'\leqslant P\alpha}\exp\left(-\frac{2\pi i\,(n_1'l_1+n_2'l_2)}{M}\right)K(l_1,l_2,T),$$

где

$$K(l_1,l_2,T)=\sum_{P_0\alpha<n_1\leqslant \alpha P_2}\ \sum_{\substack{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+L/H)\\ n_2\leqslant \gamma P_2}}\Phi(n_1,n_2,T)\exp\left(\frac{2\pi in_1l_1}{M}\right)\exp\left(\frac{2\pi in_2l_2}{M}\right).$$

Переходя от последнего равенства к неравенству и применяя неравенство Коши, получаем:

$$\left|\sum_{P_0\alpha<n_1\leqslant \alpha P}\ \sum_{\substack{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+L/H)\\ n_2\leqslant \gamma P}}\Phi(n_1,n_2,T)\right|^2\leqslant L^2\sum_{l_1=0}^{M-1}\sum_{l_2=0}^{M-1}\frac{1}{l_1+1}\frac{1}{l_2+1}\left|K(l_1,l_2,T)\right|^2.$$

Следовательно,

$$J_2\leqslant L^2\sum_{l_1=0}^{M-1}\sum_{l_2=0}^{M-1}\frac{1}{l_1+1}\frac{1}{l_2+1}\int_X^{X+X_1}\left|K(l_1,l_2,T)\right|^2dT\leqslant L^4\int_X^{X+X_1}\left|K(l_1',l_2',T)\right|^2dT, \tag{4}$$

где $0\leqslant l_1',l_2'<M$ — некоторые фиксированные натуральные числа. Заметим, что в случае $W(T)=W_2(T)$ выражение $K(l_1',l_2',T)$ содержит множители $d(n_1\nu_1/\nu_2)$ и $\overline{d(n_2\nu_3/\nu_4)}$, которые зависят от T. С помощью преобразования Абеля и интегрального неравенства Коши, получаем:

$$\left|K(l_1',l_2',T)\right|^2\ll h^8\left(\int_{A_1}^{B_1}\int_{A_2}^{B_2}\frac{\left|F(u,v)\right|^2}{uv}dudv\right)+$$

$$+h^6\left(\int_{A_1}^{B_1}\frac{\left|F(u,B_2)\right|^2}{u}du+\int_{A_2}^{B_2}\frac{\left|F(B_1,v)\right|^2}{v}dv\right)+h^4\left|F(B_1,B_2)\right|^2,$$

где $A_1=P_0\alpha$, $B_1=P_2\alpha$, $A_2=P_0\gamma$, $B_2=P_2\gamma$,

$$F(u,v)=\sum_{A_1<n_1\leq u}\ \sum_{A_2<n_2\leq v}\frac{1}{\sqrt{n_1n_2\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{n_2}{n_1\beta}\right)\right)^2\right)\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT}\times$$

$$\times\exp\left(\frac{2\pi in_1l_1'}{M}\right)\exp\left(\frac{2\pi in_2l_2'}{M}\right)E(n_1,n_2),$$

$$E(n_1, n_2) = \begin{cases} 1, \text{ если } n_1\beta < n_2 \leq n_1\beta(1 + L/H), \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Из (4) и последнего неравенства следует, что:

$$J_2 \ll L^4 h^4 I(B_1', B_2'),$$

где

$$I(B_1', B_2') = \max_{\substack{A_1 < u \leq B_1 \\ A_2 < v \leq B_2}} \int_X^{X+X_1} |F(u,v)|^2 \, dT.$$

Если $W(T) = W_1(T)$, то для J_2 выполняется неравенство:

$$J_2 \ll L^4 I(B_1', B_2').$$

Тем самым, получаем

$$J_2 \ll h_2^4 L^4 I(B_1', B_2'), \tag{5}$$

Оценим теперь $I(B_1', B_2')$. Применяя известный приём (см., например в [5, с. 576]), получаем:

$$I(B_1', B_2') \ll \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-((T-X)/X_1)^2} \left|F(B_1', B_2')\right|^2 dT \ll$$

$$\ll \frac{X_1}{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} \sum_{A_1 < n_1, n_3 \leq B_1'} \sum_{A_2 < n_2, n_4 \leq B_2'} \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2 n_3 n_4}} \exp\left(-\left(\frac{X_1}{2}\ln\left(\frac{n_2 n_3}{n_1 n_4}\right)\right)^2\right) E(n_1,n_2)E(n_3,n_4) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{X_1}{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4 P_0^2 \alpha\gamma} \sum_{P_0\alpha < n_1, n_3 \leq P_2\alpha} \sum_{\substack{n_1\beta < n_2 \leq n_1\beta(1+L/H) \\ n_3\beta < n_4 \leq n_3\beta(1+L/H) \\ |n_2 n_3 - n_1 n_4| \leq P_2^2 \alpha\gamma L/X_1}} 1 + O\left(e^{-0{,}01L^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{X_1}{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4 P_0^2 \alpha\gamma} R + O\left(e^{-0{,}01L^2}\right),$$

где R — число возможных n_1, n_2, n_3, n_4, удовлетворяющих условиям:

$$P_0\alpha < n_1, n_3 \leq P_2\alpha, n_1\beta < n_2 \leq n_1\beta(1 + L/H),$$

$$n_3\beta < n_4 \leq n_3\beta(1 + L/H), |n_2 n_3 - n_1 n_4| \leq P_2^2 \alpha\gamma L/X_1.$$

Если зафиксируем числа n_1, и n_4 то число возможных пар n_2, n_4 не превосходит величины R_1, где

$$R_1 = \sum_{-P_2^2\alpha\gamma L/X_1 + n_1 n_4 \leqslant m \leqslant n_1 n_4 + P_2^2 \alpha\gamma L/X_1} \tau(m) \ll \frac{P_2^2 \alpha\gamma L^2}{X_1}.$$

Откуда получаем

$$R \ll (P_2 - P_0)\alpha \frac{P_2\gamma L}{H} \frac{P_2^2\alpha\gamma L^2}{X_1} \ll \frac{X(\alpha\gamma)^2 L^3}{H}.$$

Следовательно,

$$I(B_1', B_2') \ll \frac{X_1}{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4 P_0^2 \alpha\gamma} \frac{X(\alpha\gamma)^2 L^3}{H} = \frac{X_1 L^3}{H}.$$

Из (5) и этого неравенства получаем:

$$J_2 \ll \frac{h_2^4 L^7 X_1}{H}. \tag{6}$$

Оценим интеграл J_1 сверху. Заметим, что в формуле, которой определяется J_1, условие $n_2 \leqslant P\gamma$ лишнее, так как

$$n_2 \leqslant n_1\beta(1+L/H) \leqslant P_0\alpha\beta(1+L/H) < P_2\gamma.$$

Разбивая промежуток суммирования по n_1 в этой формуле на $\ll L$ промежутков вида $N < n_1 \leq N_1 \leq 2N \leq P_0\alpha$, приходим к неравенству

$$J_1 \ll L^2 \int_X^{X+X_1} \left| \sum_{N<n_1\leq N_1} \sum_{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+L/H)} \Phi(n_1,n_2,T) \right|^2 dT.$$

Повторяя такие же рассуждения, как и в случае для J_2, получаем неравенство:

$$J_1 \ll h_2^4 L^2 I_1, \tag{7}$$

где

$$I_1 = \int_X^{X+X_1} \left| \sum_{N<n_1\leq N_2} \sum_{N\beta<n_2\leq N_3\beta} \frac{e^{-(H\ln(n_2/n_1\beta)/2)^2}}{\sqrt{n_1n_2\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT} E(n_1,n_2) \right|^2 dT,$$

$$E(n_1,n_2) = \begin{cases} 1, \text{ если } N < n_1 \leq N_1 \text{ и } n_1\beta < n_2 \leq n_1\beta(1+L/H), \\ 0, \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

$N < N_2 \leqslant N_1$ и $N < N_3 \leqslant N_1(1+L/H)$ — некоторые фиксированные числа.

Оценим теперь I_1 сверху. Рассуждая так же как это было сделано для оценки $I(B_1', B_2')$, имеем

$$I_1 \ll X_1 \left| \sum_{N<n_1,n_3\leq N_2} \sum_{N\beta<n_2,n_4\leq N_3\beta} \left(\frac{n_2n_3}{n_1n_4}\right)^{iX} \eta(n_1,n_2,n_3,n_4)E(n_1,n_2)E(n_3,n_4) \right|,$$

где

$$\eta(n_1,n_2,n_3,n_4) = \frac{e^{-(H\ln(n_2/(n_1\beta))/2)^2} e^{-(H\ln(n_4/(n_3\beta))/2)^2} e^{-(X_1\ln(n_2n_3/(n_1n_4))/2)^2}}{\sqrt{n_1n_2n_3n_4}}.$$

Если $|n_2n_3 - n_1n_4| > N^2\beta L/X_1$, то

$$\left|\ln\left(\frac{n_2n_3}{n_1n_4}\right)\right| \geqslant \frac{L}{2X_1}.$$

Отсюда следует, что часть последней кратной суммы по n_1, n_2, n_3, n_4, отвечающая таким слагаемым, есть величина $O(e^{-0{,}01L^2})$. Тем самым получаем:

$$I_1 \ll X_1 \left(\Sigma + |W|\right) + O\left(e^{-0{,}01L^2}\right), \tag{8}$$

где Σ — часть последней суммы, отвечающая таким слагаемым, у которых $n_2n_3 = n_1n_4$, а W — слагаемым, у которых $1 \leq n_2n_3 - n_1n_4 \leq N^2\beta L/X_1$.

Оценим сумму Σ тривиально. Имеем:

$$\Sigma \leqslant \frac{1}{N^2\beta} \sum_{N<n_1,n_3\leqslant N_1} \sum_{\substack{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+L/H) \\ n_3\beta<n_4\leqslant n_3\beta(1+L/H) \\ n_1n_4=n_2n_4}} 1.$$

Пусть $d = (n_1, n_3)$. Тогда $n_1 = db$, $n_3 = da$, $(b, a) = 1$. Из условия $n_1 n_4 = n_2 n_3$ следует, что $n_4 = ma$ и $n_2 = mb$. Откуда получаем

$$\Sigma \leqslant \frac{1}{N^2\beta} \sum_{1\leqslant d\leqslant N} \sum_{\substack{N/d<b,a\leqslant N_1/d \\ (b,a)=1}} \sum_{d\beta<m\leqslant d\beta(1+L/H)} 1 \leqslant \frac{1}{N^2\beta} \sum_{1\leqslant d\leqslant N} \frac{N^2}{d^2}\frac{d\beta L}{H} \leqslant \frac{L^2}{H}. \tag{9}$$

Оценим сумму W. Вместо множителя $E(n_1, n_2), E(n_3, n_4)$ наложим на переменные n_1, n_2, n_3, n_4 дополнительные условия

$$0 < n_2 - n_1\beta \le \frac{c_2 N\beta L}{H} \text{ и } 0 < n_4 - n_3\beta \le \frac{c_3 N\beta L}{H}.$$

От такого преобразования сумма W изменится на величину $O(e^{-0{,}01L^2})$. Пусть $l = n_2n_3 - n_1n_4$, $1 \le l \le N^2\beta L/X_1$ и $d = (n_1, n_3)$. Тогда $n_3 = da$, $n_1 = db$, $(b, a) = 1$, $l = dl_1$, $1 \le l_1 \le \le N^2\beta L/(X_1 d)$, $an_2 - bn_4 = l_1$. Последнее равенство равносильно тому, что $n_4 \equiv -l_1\bar{b} \pmod a$ и $n_2 = (bn_4 + l_1)/a$. Пользуясь формулой:

$$\frac{1}{a} \sum_{-a/2\le x<a/2} \exp\left(\frac{2\pi i x(n_4 + l_1\bar{b})}{a}\right) = \begin{cases} 1, \text{ если } n_4 \equiv -l_1\bar{b} \pmod a, \\ 0, \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

преобразуем сумму W следующим образом:

$$W = \sum_{d\le N^2\beta L/X_1} \sum_{1\le l_1\le N^2\beta L/(X_1 d)} \sum_{\substack{N/d<b,\, a\le N_2/d \\ (b,\, a)=1}} \frac{1}{a}\times$$

$$\times \sum_{-a/2\le x<a/2} \sum_{\substack{0<(bn_4+l_1)/a-db\beta\le c_2N\beta L/H \\ 0<n_4-da\beta\le c_3N\beta L/H}} \left(1 + \frac{l_1}{bn_4}\right)^{iX} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{2\pi i x(n_4 + l_1\bar{b})}{a}\right)\eta_1(b, a, l_1, n_4) + O(e^{-0{,}01L^2}),$$

где $\eta_1(b, a, l_1, n_4) = \eta(b, (bn_4 + l_1)/a, a, n_4)$. Разобьем сумму W на две суммы: W_1 — часть этой суммы, отвечающая слагаемым с условием $x \ne 0$, W_2 — остальным слагаемым.

Оценим теперь сумму W_2. Если пропустим условие

$$0 < \frac{bn_4 + l_1}{a} - db\beta \le \frac{c_2 N\beta L}{H},$$

то сумма W_2 изменится на величину $O(e^{-0{,}01L^2})$. Пользуясь формулой

$$\sum_{d_1/(b,a)} \mu(d_1) = \begin{cases} 1, \text{ если } (b, a) = 1, \\ 0, \text{ если } (b, a) > 1, \end{cases}$$

преобразуем сумму W_2 так:

$$W_2 = \sum_{d\leqslant N^2\beta L/X_1} \sum_{1\le l_1\leqslant N^2\beta L/(X_1 d)} \sum_{d_1\leqslant N_2/d} \frac{\mu(d_1)}{d_1} \sum_{N/(dd_1)<a_1\leqslant N_2/(dd_1)} \frac{1}{a_1}\times$$

$$\times \sum_{0<n_4-dd_1a_1\beta\le c_3N\beta L/H} \sum_{N/(dd_1)<b_1\le N_2/(dd_1)} \left(1 + \frac{l_1}{d_1b_1n_4}\right)^{iX} \times$$

$$\times\eta_1(d_1b_1, d_1a_1, l_1, n_4) + O(e^{-0,01L^2}).$$

Разобьем последнюю сумму на две суммы $W_{2.1}$ и $W_{2.2}$, где в $W_{2.1}$ входят слагаемые, у которых $d_1 < X/X_1$, а в $W_{2.2}-$ слагаемые с $d_1 \geq X/X_1$.

Оценивая тривиально сумму $W_{2.2}$, получаем:

$$|W_{2.2}| \ll \frac{Y^2L^2}{H}.$$

Оценим сумму $W_{2.1}$. Применяя к сумме по b_1 преобразование Абеля, приходим к неравенству:

$$|W_{2.1}| \ll \sum_{d\leq N^2\beta L/X_1} \frac{1}{d} \sum_{1\leq l_1\leq N^2\beta L/X_1 d} \sum_{d_1\leq X/X_1} \frac{1}{d_1}\times$$

$$\times \sum_{N/(dd_1)<a_1\leq N_2/(dd_1)} \frac{1}{a_1} \sum_{0<n_4-dd_1a_1\beta\leq c_3N\beta L/H} \frac{d}{N^2\beta}\left|W_{2.3}\right|, \tag{10}$$

где

$$W_{2.3} = \sum_{M<b_1\leq M_1} \exp\left(iX\ln\left(1+\frac{l_1}{d_1b_1n_4}\right)\right),$$

$M = N/(dd_1)$, и $N/(dd_1) < M_1 \leq N_4/(dd_1)$ — некоторое фиксированное число. Применяя к сумме $W_{2.3}$ лемму о замене тригонометрической суммы интегралом и полагая в ней

$$a = M,\ b = M_1,\ f(x) = \frac{X}{2\pi}\ln\left(1+\frac{l_1}{d_1xn_4}\right),$$

$$\left|f'(x)\right| = \left|\frac{Xl_1}{2\pi x(d_1n_4x+l_1)}\right| \ll \frac{X^2N\beta L}{X_1^3} < X^{-0,1} < 1,$$

находим

$$W_{2.3} = \left|\int_M^{M_1} e^{2\pi if(x)}dx\right| + O(1).$$

Оценивая последний интеграл по первой производной, имеем:

$$\left|\int_M^{M_1} e^{2\pi if(x)}dx\right| \ll \frac{N^3}{Xl_1d^2d_1}.$$

Тем самым получаем:

$$W_{2.3} \ll \frac{N^3}{Xl_1d^2d_1^2} + 1.$$

Подставляя последнюю оценку в (10), приходим к неравенству:

$$|W_{2.1}| \ll \frac{Y^2L^3}{H}.$$

Из оценок для $W_{2.1}$ и $W_{2.2}$ следует, что

$$W_2 \ll \frac{Y^2L^3}{H}. \tag{11}$$

Оценим теперь сумму W_1 сверху. Можно считать, что N не меньше, чем $X_1^{1/2-\varepsilon/2}$. Если это не так, то $1 \leq l_1 \leq \beta LX^{-\varepsilon} < 1$. Из условия $da\beta < n_4$ следует, что $db\beta < (bn_4+l_1)/a$. Таким образом, если пропустим условие

$$0 < \frac{bn_4+l_1}{a} - db\beta \leq \frac{c_2N\beta L}{H},$$

то сумма W_1 изменится на величину $O\left(e^{-0{,}01L^2}\right)$. Кроме этого, имеет место равенство

$$\exp\left(2\pi i\left(\frac{X}{2\pi}\ln\left(1+\frac{l_1}{bn_4}\right)\right)\right)=\exp\left(2\pi i\left(\frac{Xl_1}{2\pi bn_4}\right)\right)+O\left(X^{-0{,}7}\right).$$

Далее, применяя к суммам по b и n_4 преобразование Абеля, потом переходя от получившего равенства к неравенству, получаем:

$$W_1\ll\frac{L^4}{N^2\beta}\sum_{d\le N^2\beta L/X_1}\ \sum_{1\le l_1\le N^2\beta L/(X_1d)}\ \sum_{N/d<a\le N_2/d}\frac{1}{a}S+O\left(X^{-0{,}075-\varepsilon}\right),\tag{12}$$

где

$$S=\sum_{\substack{-a/2\leqslant x<a/2\\ x\ne0}}\ \sum_{\substack{N/d<b\le N_4/d\\ (b,a)=1\\ ad\beta<n_4\le N_5\beta}}\exp\left(\frac{iXl_1}{bn_4}\right)\exp\left(\frac{2\pi ix(n_4+l_1\bar b)}{a}\right),$$

$N<N_4\le N_2$, $ad<N_5\le ad+c_3NL/H$.

Применим преобразование Абеля к сумме по b в S, потом освободимся от зависимости предела суммирования по b от переменного интегрирования. Получаем:

$$S=S_1+S_2,\tag{13}$$

где

$$S_1=\frac{1}{a}\sum_{-a/2\leqslant y<a/2}\int_{N/d}^{N_4/d}\sum_{\substack{-a/2\leqslant x<a/2\\ x\ne0}}\ \sum_{\substack{N/d<b\le N/d+a\\ (b,a)=1}}\exp\left(\frac{2\pi i(xl_1\bar b+yb)}{a}\right)\times$$

$$\times\sum_{N/d<r\leqslant u}\exp\left(-\frac{2\pi iyr}{a}\right)\sum_{ad\beta<n_4\le N_5\beta}\frac{1}{n_4}\exp\left(2\pi i\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi un_4}\right)\right)\frac{iXl_1}{u^2}du,$$

$$S_2=\sum_{\substack{-a/2\leqslant x<a/2\\ x\ne0}}\ \sum_{\substack{N/d<b\le N_4/d\\ (b,a)=1\\ ad\beta<n_4\le N_5\beta}}\exp\left(\frac{2\pi ixl_1\bar b}{a}\right)\exp\left(2\pi i\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1d}{2\pi N_4n_4}\right)\right).$$

Разобъем сумму S_1 на 3 суммы: $S_{1.1}$ отвечает таким слагаемым, у которых

$$x<Xl_1a/(2\pi uN_5^2\beta^2),$$

$S_{1.2}$ — слагаемым, у которых $Xl_1a/(2\pi uN_5^2\beta^2)\leqslant x<Xl_1a/(2\pi ua^2d^2\beta^2)$ и $S_{1.3}$ — остальным слагаемым. Тогда из (12) и (13) следует

$$W_1\ll\frac{L^4}{N^2\beta}\sum_{d\le N^2\beta L/X_1}\ \sum_{1\le l_1\le N^2\beta L/(X_1d)}\ \sum_{N/d<a\le N_2/d}\frac{S_{1.1}+S_{1.2}+S_{1.3}+S_2}{a},\tag{14}$$

Разобъем сумму в правой части последнего неравенства на 4 суммы W_3, W_4, W_5, W_6, соответственно суммам $S_{1.1}$, $S_{1.2}$, $S_{1.3}$, S_2.

1) Оценим W_6. Имеет место неравенство:

$$|W_6|\le\frac{L^5}{N^2\beta}\sum_{d\le N^2\beta L/X_1}\ \sum_{1\le l_1\le N^2\beta L/(X_1d)}\ \sum_{N/d<a\le N_2/d}\ \sum_{\substack{-a/2\leqslant x<a/2\\ x\ne0}}\frac{\sqrt{(xl_1,a)}}{a^{0{,}5-\varepsilon_1}}\left|E\right|,$$

где

$$E = \sum_{ad\beta < n_4 \le N_5\beta} \exp\left(2\pi i\left(\frac{xn_4}{a} + \frac{Xl_1d}{2\pi N_4 n_4}\right)\right).$$

Здесь мы воспользовались оценкой, (см. [13, с. 50]):

$$\sum_{\substack{N/d < b \leqslant N/d+a \\ (b,a)=1}} \exp\left(2\pi i\left(\frac{xl_1\bar{b} + yb}{a}\right)\right) <_{\varepsilon_1} a^{0,5+\varepsilon_1}\sqrt{(xl_1, a)}L, \tag{15}$$

где $0 < \varepsilon_1 < 0,01\varepsilon$ — произвольная малая постоянная.

Если x не принадлежит $[Xl_1/(32\pi N^2\beta^2), 2Xl_1/(\pi N^2\beta^2))$, то для оценки E воспользуемся леммой о замене тригонометрической суммы интегралом (см. [16, гл. 3]). Получаем:

$$E = \int_{ad\beta}^{N_5\beta} \exp\left(2\pi i\left(\frac{xz}{a} + \frac{Xl_1d}{2\pi N_4 z}\right)\right) dz + O(1).$$

Применяя к интегралу в правой части лемму об оценке интеграла по первой производной (см. [14, гл. 4]), найдём оценку

$$E \ll a/|x|.$$

Если $Xl_1/(32\pi N^2\beta^2) < x \le 2Xl_1/(\pi N^2\beta^2)$, то для оценки V воспользуемся теоремой Ван дер Корпута (см. [16, с. 362]). Полагая $f(n_4) = xn_4/a + Xl_1d/(2\pi N_4 n_4)$, $k = 2$, найдём $E \ll N^2/\sqrt{Xl_1d}$.

Из полученных оценок для E следует, что

$$W_6 \ll \frac{1}{H}.$$

2) Оценим W_3. Имеет место неравенство

$$W_3 \ll \frac{XL^6}{N^3\beta} \sum_{d \le N^2\beta L/X_1} d \sum_{1 \le l_1 \le N^2\beta L/(X_1d)} l_1 \sum_{N/d < a \le N_2/d} a^{-0,5+\varepsilon_1} \times$$

$$\times \sum_{\substack{-a/2 \leqslant x < Xl_1a/(2\pi u_0 N_5^2\beta^2) \\ x \ne 0}} \sqrt{(xl_1, a)} \left| \sum_{ad\beta < n_4 \le N_5\beta} \frac{1}{n_4} \exp\left(2\pi i\left(\frac{xn_4}{a} + \frac{Xl_1}{2\pi u_0 n_4}\right)\right)\right|, \tag{16}$$

где u_0 — некоторое число из промежутка $[N/d, N_4/d]$. Через Q обозначаем сумму по n_4 в правой части последнего неравенства. Применяя к Q преобразования Абеля, потом переходя от получившего равенства к неравенству, получаем:

$$Q \ll \frac{1}{N\beta} Q_1,$$

где

$$Q_1 = \left| \sum_{ad\beta < n_4 \leqslant N_6\beta} \exp\left(\frac{xn_4}{a} + \frac{Xl_1}{2\pi u_0 n_4}\right)\right|,$$

где $ad < N_6 \leqslant N_5$ — некоторое фиксированное число. Если $x < 0$, то Q_1 оценивается по аналогии с оценкой E в пункте 1). Получаем оценку $Q \ll a/(N\beta\,|x|)$. А если

$0<x<Xl_1a/(2\pi u_0N_5^2\beta^2)$, то применяя к Q_1 теорему о замене тригонометрической суммы интегралом, приходим к неравенству:

$$|Q|\leqslant\frac{1}{N\beta}\left|\int_{ad\beta}^{N_6\beta}\exp\left(2\pi i\left(\frac{xz}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u_0z}\right)\right)dz\right|+O\left(\frac{1}{N\beta}\right).$$

Оценивая последний интеграл по второй производной, получаем

$$\left|\int_{ad\beta}^{N_6\beta}\exp\left(2\pi i\left(\frac{xz}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u_0z}\right)\right)dz\right|\ll\frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1d}}.$$

С другой стороны, так как $0<x<Xl_1a/(2\pi u_0N_5^2\beta^2)$, то по теореме об оценке интеграла по первой производной, имеем

$$\left|\int_{ad\beta}^{N_6\beta}\exp\left(2\pi i\left(\frac{xz}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u_0z}\right)\right)dz\right|\ll\left\|\frac{x}{a}-\frac{Xl_1}{2\pi u_0(N_6\beta)^2}\right\|^{-1}.$$

Таким образом, справедлива оценка для Q:

$$Q\ll\frac{1}{N\beta}\min\left(\left\|\frac{x}{a}-\frac{Xl_1}{2\pi u_0(N_6\beta)^2}\right\|^{-1},\frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1d}}\right)+\frac{1}{N\beta}.$$

Пусть $q=(xl_1,a)$, $a=mq$, $xl_1=sq$, $x=x_1q_1$, $l_1=l_2q_2$, $q_1q_2=q$. Собирая выше полученные оценки для Q, из (16) получаем

$$W_3\ll\frac{XL^6}{N^4\beta^2}\sum_{d\le N^2\beta L/X_1}d\sum_{q_2\leqslant N_2/d}q_2^{1+\varepsilon_1}\sum_{1\le l_2\le N^2\beta L/(X_1dq_2)}l_2\left(\sum_{q_1<2N/d}q_1^{\varepsilon_1}\times\right.$$
$$\times\sum_{m\asymp N/(dq_1q_2))}m^{-0,5+\varepsilon_1}\sum_{-mq_2/3\leqslant x_1<0}\frac{mq_2}{|x_1|}+\sum_{q_1\ll X/X_1}q_1^{\varepsilon_1}\sum_{m\asymp N/(dq_1q_2)}m^{-0,5+\varepsilon_1}\times$$
$$\left.\times\sum_{1\leqslant x_1\ll Xl_2q_2/(N^2\beta^2)}\min\left(\left\|\frac{x_1}{mq_2}-\frac{Xl_2q_2}{2\pi iu_1(N_7\beta)^2}\right\|^{-1},\frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_2q_2d}}\right)\right)+O(H^{-1}).$$

Применяя к сумме по x_1 лемму из [15, с. 94], получаем:

$$W_3\ll\frac{1}{H}.$$

4) Сумму W_5 оценим по аналогии с W_3:

$$W_5\ll\frac{1}{H}.$$

5) Оценим теперь сумму W_4. Через P будем обозначать сумму по n_4 в $S_{1.3}$. Применяя к этой сумме лемму о замене тригонометрической суммы интегралом (см. [16, гл. 3]), получаем:

$$P=\int_{ad\beta}^{N_5\beta}\frac{1}{z}\exp\left(2\pi i\left(\frac{xz}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi uz}\right)\right)dz+O\left(\frac{1}{N\beta}\right).$$

Далее, применим к последнему интегралу метод стационарной фазы (см. [16, гл. 3]). Получаем

$$P=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\pi ua}{Xl_1x}\right)^{1/4}\exp\left(4\pi i\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ua}}\right)+O(R),$$

где

$$R=\frac{1}{N\beta}+\frac{N^2H}{Xl_1}+\frac{1}{N\beta}\min\left(\left\|\frac{x}{a}-\frac{Xl_1}{2\pi u(ad\beta)^2}\right\|^{-1},\frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1d}}\right)+$$
$$+\frac{1}{N\beta}\min\left(\left\|\frac{x}{a}-\frac{Xl_1}{2\pi u(N_5\beta)^2}\right\|^{-1},\frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1d}}\right).$$

Подставляя это равенство в формулу, определяющую W_4, потом переходя от получившего равенства к неравенству и пользуясь неравенством (15), получаем:

$$W_4\ll\frac{X^{3/4}L^5}{N^2\beta}\sum_{d\le N^2\beta L/X_1}\sum_{1\le l_1\le N^2\beta L/(X_1d)}l_1^{3/4}\sum_{N/d<a\le N_2/d}a^{-5/4+\varepsilon_1}\sum_{-a/2\leqslant y<a/2}\times$$
$$\times\sum_{x\asymp Xl_1/(N\beta)^2}\frac{\sqrt{(xl_1,a)}}{x^{1/4}}\left|\int_U^{U_1}\sum_{N/d<r\leqslant u}\exp\left(-\frac{2\pi iyr}{a}\right)\exp\left(4\pi i\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ua}}\right)\frac{1}{u^{7/4}}du\right|+O\left(\frac{Y^3L^8}{H}\right),\tag{17}$$

где

$$U=max\left(\frac{N}{d},\frac{Xl_1a}{2\pi xN_5^2\beta^2}\right)\asymp\frac{N}{d},U_1=min\left(\frac{N_4}{d},\frac{Xl_1a}{2\pi xa^2d^2\beta^2}\right)\asymp\frac{N}{d}.$$

Через G будем обозначать интеграл в правой части (17). Меняем порядок интегрирования и суммирования по r в G, потом интегрируем по частям. Получаем

$$G=\sum_{N/d<r\leqslant U}e^{-2\pi iyr/a}\int_U^{U_1}\exp\left(4\pi i\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ua}}\right)\frac{1}{u^{7/4}}du-\frac{\sqrt{2\pi a}}{2\pi iU_1^{1/4}\sqrt{Xl_1x}}\exp\left(4\pi i\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi U_1a}}\right)\times$$
$$\times\sum_{U<r\leqslant U_1}\exp\left(-\frac{2\pi iyr}{a}\right)-\frac{\sqrt{2\pi a}}{8\pi i\sqrt{Xl_1x}}\int_U^{U_1}\sum_{U<r\leqslant u}\exp-\left(\frac{2\pi iyr}{a}\right)\exp\left(4\pi i\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ua}}\right)\frac{1}{u^{5/4}}du+$$
$$+\frac{\sqrt{2\pi a}}{2\pi i\sqrt{Xl_1x}}\sum_{U<r\leqslant U_1}\exp\left(2\pi i\left(-\frac{yr}{a}+2\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ra}}\right)\right)\frac{1}{r^{1/4}}.\tag{18}$$

Через S будем обозначать сумму по r в последнем слагаемом равенства (18). Применяя к S преобразование Абеля, потом переходя к неравенству, получаем:

$$S\ll\left(\frac{d}{N}\right)^{1/4}\left|\sum_{U<r\leqslant U_2}\exp\left(2\pi i\left(-\frac{yr}{a}+2\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ra}}\right)\right)\right|,$$

где $U<U_2\leqslant U_1$ — некоторое фиксированное число. Далее, к сумме по r применим лемму о замене суммы интегралом. Получаем:

$$\sum_{U<r\leqslant U_2}\exp\left(2\pi i\left(-\frac{yr}{a}+2\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ra}}\right)\right)=\int_U^{U_2}\exp\left(2\pi i\left(-\frac{yv}{a}+2\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi va}}\right)\right)dv+O(1).$$

Оценивая первый интеграл в правой части (18) по первой производной и пользуясь неравенством

$$\left|\sum_{U<r\leqslant U_1}\exp\left(-\frac{2\pi iyr}{a}\right)\right|\ll\frac{a}{|y|+1},$$

приходим к неравенству

$$G \ll \sqrt{\frac{a}{Xl_1x}}\left(\frac{d}{N}\right)^{1/4}\left(\frac{a}{|y|+1}+\left|\int_U^{U_2}\exp\left(2\pi i\left(-\frac{yv}{a}+2\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi va}}\right)\right)dv\right|+1\right).$$

Оценим последний интеграл зависимости от значения y. Обозначим этот интеграл через V. Если $y=0$, то для оценки V воспользуемся теоремой об оценке по первой производной. Получаем

$$V \ll \sqrt{\frac{N^3a}{Xl_1xd^3}} \asymp \frac{N^3}{Xl_1d^2}.$$

Если

$$y < -\sqrt{\frac{2Xl_1xad^3}{\pi N^3}} = M \text{ или } \frac{a}{2} > y > -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{Xl_1xad^3}{\pi N^3}} = M_1 \text{ и } y \neq 0,$$

то оценивая интеграл V по аналогии с пунктом 1), найдем

$$V \leqslant \frac{a}{|y|}.$$

В случае когда $M \leqslant y \leqslant M_1$, применяя к V теорему об оценке интеграла по второй производной, получаем

$$V \ll \sqrt[4]{\frac{N^5a}{Xl_1xd^5}} \asymp \frac{N^2}{\sqrt{d^3Xl_1}}.$$

Собирая полученные оценки, из (17) следует

$$W_4 \ll \frac{X^{1/4}L^5}{N^{9/4}\beta}\sum_{d\le N^2\beta L/X_1} d^{1/4}\sum_{1\le l_1\le N^2\beta L/(X_1d)} l_1^{1/4}\sum_{N/d<a\le N_2/d} a^{-3/4+\varepsilon_1}\times$$

$$\times\sum_{x\asymp Xl_1/(N\beta)^2}\frac{\sqrt{(xl_1,a)}}{x^{3/4}}\left(\sum_{\substack{y\notin[M,M_1]\\ y\neq 0}}\frac{a}{|y|}+\frac{N^3}{Xl_1d^2}+\sum_{M\leqslant y\leqslant M_1}\frac{N^2}{\sqrt{Xl_1d^3}}\right)+O\left(\frac{Y^3L^8}{H}\right).$$

После несложных вычислений получим

$$W_4 \ll \frac{Y^3L^8}{H}.$$

Из (11), (14), и оценок для сумм W_j, $j=3,4,5,6$, получаем:

$$W \ll \frac{Y^3L^8}{H}.$$

Из (8), (9) и оценки для W следует:

$$I_1 \ll \frac{X_1Y^3L^8}{H}.$$

Подставляя это неравенство в (7), получаем

$$J_1 \ll \frac{h_2^4X_1Y^3L^{10}}{H}. \tag{19}$$

Из (3), (6) и (19) следует утверждение леммы.

Следствие 1. *Пусть δ — произвольное положительное число, не превосходящее 1, E_2 — множество таких T из интервала $[X, X+X_1]$, для которых выполняются неравенства*

$$W_1^2(T) \geq \frac{X_1^{1-\delta}Y^{11}L^{10}}{H}, \qquad W_2^2(T) \geq \frac{h^4X_1^{1-\delta}Y^{11}L^{10}}{H}.$$

Тогда для меры множества E_2 справедлива оценка $\mu(E_2) \ll X_1^{\delta}$.

Лемма 2. *При обозначениях теоремы 2 справедливы неравенства*

$$\sum_{m=M+1}^{M+b} W_1^2(mH) \ll \frac{M_1Y^{11}L^{11}}{H}, \quad \sum_{m=M+1}^{M+b} W_1^2(mH) \ll \frac{h^4M_1Y^{11}L^{11}}{H}.$$

Лемма 2 доказывается по аналогии с доказательством леммы 1.

3. Доказательство основной теоремы

В следствии 1 полагаем $\delta = 1 - 4/7\varepsilon$. Будем рассматривать те числа T из $X \leq T \leq X + X_1$, которые не принадлежат множеству E_2; для них выполняются оценки

$$W_1^2(T) < \frac{Y^{11}L^{10}}{\sqrt{H}}, W_2^2(T) < \frac{h^4Y^{11}L^{10}}{\sqrt{H}}. \tag{20}$$

Из рассматриваемых чисел T выбросим те, для которых выполняется неравенство

$$\left|\int_{1/2}^{2}\zeta(\sigma+i(T+H-1))\varphi^2(\sigma+i(T+H-1))d\sigma\right| +$$
$$+\left|\int_{1/2}^{2}\zeta(\sigma+i(T+1))\varphi^2(\sigma+i(T+1))d\sigma\right| > \frac{H}{L}. \tag{21}$$

В силу леммы 7 статьи [12] следует, что мера выброшенных чисел есть величина порядка $O(X_1X^{-\varepsilon})$.

Далее доказательство проводится по схеме работы А. А. Карацубы [5]. Введём следующие параметры $h = A/(c\ln T)$, $h_1 = 2h$, $T \geq X > 0$. Будем считать, что X так велико, что $0 < h < h_1 < 1$. Числа $0 < c < 1$ и $0 < A$ будут определены позднее. При $T \leq t \leq T+H$ рассматриваются интегралы $j_1(t)$ и $j_2(t)$:

$$j_1(t) = \int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u/h)^2}\left|F(t+u)\right| du, \; j_2(t) = \left|\int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u/h)^2}F(t+u)du\right|,$$

где $F(t)$ — функция Харди–Сельберга (см. [16, гл. 3]).

Обозначим через E_4 подмножество интервала $(T, T+H)$, на котором выполняется неравенство $j_1(t) > j_2(t)$. Так как вне E_4 два интеграла $j_1(t)$ и $j_2(t)$ равны, то имеем

$$\int_{E_4} j_1(t)dt = \int_{T}^{T+H} j_1(t)dt - \int_{\bar{E}_4} j_2(t)dt \geq \int_{T}^{T+H} j_1(t)dt - \int_{T}^{T+H} j_2(t)dt.$$

Применяя интегральное неравенство Коши, приходим к соотношению:

$$\sqrt{\mu(E_4)I_1} + \sqrt{HI_2} \geq I_3, \tag{22}$$

где $\mu(E_4)$ — мера множества E_4,

$$I_1 = \int_T^{T+H} (j_1(t))^2\, dt,\ I_2 = \int_T^{T+H} (j_2(t))^2\, dt,\ I_3 = \int_T^{T+H} j_1(t)dt.$$

Пользуясь способом из работы А. А. Карацубы ([5, с. 572]) и неравенством (21), оценим интеграл I_3 так:

$$I_3 \geq hH + c_4 hHL^{-1}. \tag{23}$$

Интеграл I_1 оценен в [5, 576]:

$$I_1 \ll h^2 H \left(\frac{\ln T}{\ln Y} + W_1(T) \right),$$

где $W_1(T)$ — тригонометрическая сумма леммы 1. Для суммы W_1 справедлива оценка, которая следует из (20):

$$W_1(T) < H^{-0{,}25} Y^{5{,}5} L^5.$$

Таким образом получаем оценку сверху для I_1:

$$I_1 \leq c_5 h^2 H \left(\frac{\ln T}{\ln Y} + H^{-0{,}25} Y^{5{,}5} L^5 \right). \tag{24}$$

Интеграл I_2 оценим сверху, пользуясь способом из работы [17, с. 195]. Получаем

$$I_2 \ll H \left(h^2 \frac{\ln T}{\ln Y} \left(c + \frac{1}{(ch \ln T)^2 e^{2(h_1/h)^2}} + \frac{1}{e^{2(hc \ln T)^2}} \right) + W_2(T) \right) + h^2 H T^{-0{,}02},$$

где $W_2(T)$ — тригонометрическая сумма леммы 1. Сумма $W_2(T)$ оценивается с помощью (20):

$$W_2(T) < h^2 H^{-0{,}25} Y^{5{,}5} L^5.$$

В силу определения Y, h, h_1 получаем

$$I_2 \leq c_6 h^2 H \left(\frac{\ln T}{\ln X} 100\varepsilon^{-1} \left(c + \frac{1}{A^2 e^8} + \frac{1}{e^{2A^2}} \right) + H^{-0{,}25} Y^{5{,}5} L^5 + T^{-0{,}02} \right).$$

Возьмем теперь

$$c = \frac{\varepsilon}{4800 c_6},\ A = \left(\frac{4800 c_6}{\varepsilon} \right)^{0{,}5},$$

и число X выберем так велико, чтобы выполнялось неравенство

$$H^{-0{,}25} Y^{5{,}5} L^5 + T^{-0{,}02} < \frac{1}{8c_6}.$$

В итоге получаем

$$I_2 < \frac{1}{4} h^2 H. \tag{25}$$

Из оценок (22) — (25) получаем неравенство $\mu(E_4) \geq c_7 H$, $c_7 = c_7(\varepsilon) > 0$, откуда следует утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 2 проводится по аналогии с доказательством теоремы 1 и с использованием леммой 2.

4. Заключение

Доказательство главной теоремы основано на получении оценку сверху для специальной кратной тригонометрической суммы. В работе автор пользуется методами А. А. Карацубы получения оценки "сельберговского типа" для числа нулей $\zeta(s)$ на "почти всех" коротких промежутках критической прямой.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю С. А. Гриценко за поставленную в работе проблему и внимание к ее решению.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Риман Б. Сочинения. М.–Л.: ОГИЗ, 1948. 479 с.
2. Hardy G. H., Littlewood J. E. The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line // Mathematische Zeitschrift. 1921. Vol. 10. pp. 283–317.
3. Selberg A. On the zeros of Riemann's zeta-function // Skr. Norske Vid. Akad. Oslo. 1942. Vol. 10. pp. 1–59.
4. Карацуба А. А. О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Тр. МИАН СССР. 1981. Т. 157, С. 49–63.
5. Карацуба А. А. О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48, №3. С. 569–584.
6. Карацуба А. А. Распределение нулей функции $\zeta(1/2 + it)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48, вып. 6. С. 1214–1224.
7. Карацуба А. А. О нулях дзета-функции Римана на критической прямой // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 167, С. 167–178.
8. Карацуба А. А. О вещественных нулях функции $\zeta(1/2 + it)$ // УМН. 1985. Т. 40, №4. С. 171–172.
9. Карацуба А. А. Дзета-функция Римана и ее нули // УМН. 1985. Т. 40, №5. С. 23–82.
10. Карацуба А. А. О количестве нулей дзета-функции Римана, лежащих на почти всех коротких промежутках критической прямой // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56, №2. С. 372–397.
11. Карацуба А. А. Уточнение теорем о количестве нулей, лежащих на отрезках критической прямой, некоторых рядов Дирихле // УМН. 1992. Т. 47, №2. С. 193–194.
12. Киселева Л. В. О количестве нулей функции $\zeta(s)$ на "почти всех" коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52, вып. 3. С. 479–500.
13. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Тр. МИАН СССР 1962. Т. 65. С. 3–212.
14. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана // М.: Мир, 1953. 406 с.
15. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983. 240 С.
16. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. // М.: Физматлит, 1994. 376 с.

17. Карацуба А. А. Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле // Сборник статей. Труды Международной конференции по теории чисел, посвященной 100-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова Тр. МИАН 1994. вып. 207. С. 180–196.

REFERENCES

1. Riemann, B. 1948, "Xachinenia." (Russian) [The works], *OGIZ*, Moskva–Leningrad. 479 p.

2. Hardy, G. H. & Littlewood, J. E. 1921. "The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line", *Mathematische Zeitschrift*, vol. 10, pp. 283–317.

3. Selberg, A. 1942, "On the zeros of Riemann's zeta-function", *Skr. Norske. Vid. Akad Oslo*, vol. 10, pp. 1–59.

4. Karatsuba, A. A. 1981, "On the distance between consecutive zeros of the Riemann zeta function that lie on the critical line", *Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 157 , pp. 49-63. (Russian)

5. Karatsuba, A. A. 1984, "On the zeros of the function $\zeta(s)$ on short intervals of the critical line", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math.*, vol 48, no 3, pp. 569–584. (Russian)

6. Karatsuba, A. A. 1984, "The distribution of zeros of the function $\zeta(1/2+it)$", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math.*, vol 48, no 6, pp. 1214–1224. (Russian)

7. Karatsuba, A. A. 1985, "Zeros of the Riemann zeta function on the critical line", *Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 167 , pp. 167–178. (Russian)

8. Karatsuba, A. A. 1985, "On the real zeros of the function $\zeta(1/2+it)$", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 40, no 4, pp. 171–172. (Russian)

9. Karatsuba, A. A. 1985, "The Riemann zeta function and its zeros", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 40, no 5, pp. 23-82. (Russian)

10. Karatsuba, A. A. 1992, "On the number of zeros of the Riemann zeta-function lying in almost all short intervals of the critical line", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math.*, vol 56, no 2, pp. 372-397. (Russian)

11. Karatsuba, A. A. 1992, "A refinement of theorems on the number of zeros lying on intervals of the critical line of certain Dirichlet series", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 47, no 2, pp. 193-194. (Russian)

12. Kiseleva, L. V. 1988, "The number of zeros of the function $\zeta(s)$ on "almost all" short intervals of the critical line." (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 52, no. 3, pp. 479–500; translation in Math. USSR-Izv. 32 (1989), no. 3, 475–499

13. Malysev, A. V. 1962, "On the representation of integers by positive quadratic forms." (Russian) *Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 65, pp. 3–212.

14. Titchmarsh, E. K. 1953, "Teoriya dzeta-funkcii Rimana." (Russian)[Теория дзета-функции Римана], *Mir*, Moscow, 409 p.

15. Karatsuba, A. A. 1983, "Osnovui analiticheskoi teorii chisel." (Russian) [Fundamentals of analytic number theory], *Nauka*, Moscow, 240 p.

16. Voronin, S. V. & Karatsuba, A. A. 1994, "Zeta-funkcia Rimana." (Russian) [The Riemann zeta-function], *Fizmatlit*, Moscow, 376 p.

17. Karatsuba, A. A. 1994, "A new approach to the problem of the zeros of some Dirichlet series." (Russian) *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, vol. 207, pp. 180–196; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 1995, no. 6 (207), 163–177.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет.
Получено 17.12.2015 г.
Принято в печать 11.03.2016 г.