ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-123-139

Распределение значений функции Жордана в классах вычетов

Л. А. Громаковская, Б. М. Широков

Громаковская Лариса Александровна — старший преподаватель, Петрозаводский государственный университет (г. Петрозаводск).
e-mail: gromak_la@mail.ru
Широков Борис Михайлович — кандидат физико-математических наук, доцент, Петрозаводский государственный университет (г. Петрозаводск).
e-mail: bmshir@mail.ru

Аннотация

Понятие равномерного распределения целозначных арифметических функций в классах вычетов по модулю N было введено И. Нивеном [3]. Для мультипликативных функций более удобным оказалось понятие слабо равномерного распределениия по модулю N, которое было введено В. Наркевичем [6].

В работах о распределении в классах вычетов обычно приводятся асимптотические формулы для числа попаданий значений функции в тот или иной класс, содержащие лишь главные члены, что объясняется применением к производящим функциям тауберовой теоремы Х. Деланжа [12], хотя эти производящие функции обладают лучшими аналитическими свойствами, чем это нужно для теоремы Х. Деланжа.

В настоящей работе рассматривается распределение значений функции Жордана $J_2(n)$. Для натурального числа n значение $J_2(n)$ есть количество попарно несравнимых между собой примитивных по модулю n пар целых чисел. Доказывается, что $J_2(n)$ слабо равномерно распределена по модулю N тогда и только тогда, когда N взаимно просто с числом 6. Кроме того, работа содержит асимптотическую формулу, представляющую собой асимптотический ряд, что достигается применением леммы 3, являющеся теоремой тауберова типа, заменяющей теорему Х. Деланжа.

Ключевые слова: тауберовы теоремы, рапределение значений, классы вычетов

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
Л. А. Громаковская, Б. М. Широков. Распределение значений функции Жордана в классах вычетов // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 123–139.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 2.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-123-139

Distribution of values of Jordan function in residue classes

L. A. Gromakovskaya, B. M. Shirokov

Gromakovskaya Larisa Aleksandrovna — senior lecturer, Petrozavodsk State University (Petrozavodsk).
e-mail: gromak_la@mail.ru
Shirokov Boris Mikhailovich — candidate of physics-mathematical Siences, associate Professor, Petrozavodsk State University (Petrozavodsk).
e-mail: bmshir@mail.ru

Abstract

The concept of a uniform distribution of integral-valued arithmetic functions in residue classes modulo N was introduced by I. Niven [3]. For multiplicative functions, the concept of a weakly uniform distribution modulo N, which was introduced by V. Narkevich [6], turned out to be more convenient. In papers on the distribution in residue classes, we usually give asymptotic formulas for the number of hits of the values of functions in a particular class containing only the leading terms, which is explained by the application to the generating functions of the Tauberian theorem of H. Delange [12], although these generating functions have better analytical properties, which is necessary for the theorem of H. Delange. In this paper we consider the distribution of values of the Jordan function $J_2(n)$. For a positive integer n, the value of $J_2(n)$ is the number of pairwise incongruent pairs of integers that are primitive in modulo n. It is proved that $J_2(n)$ is weakly uniformly distributed modulo N if and only if N is relatively prime to 6. Moreover, the paper contains an asymptotic formula representing an asymptotic series, which is achieved by applying Lemma 3, which is a Tauberian theorem type that replaces the theorem of H. Delange.

Keywords: tauberian theorem, distribution of values, residue classes

Bibliography: 17 titles.

For citation:
L. A. Gromakovskaya, B. M. Shirokov, 2019, "Distribution of values of Jordan function in residue classes" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 123–139.

1. Введение

Работы, связанные с конгруэнциальными свойствами целочисленных арифметических функций, стали появляться с середины 20 века. В них, как правило, устанавливались асмптотические формулы для количества значений функций, удовлетворяющих некоторым условием конгруэнтности, в основном, по простому модулю ([1, 2]).

В 1961 году И. Нивен [3] ввел понятие равномерного распределения в классах вычетов по произвольному модулю и в кольце $\mathbb{Z}$. Эта работа положила начало изучению условий наличия равномерного распределения в классах вычетов. Учияма [5] получил критерий равномерного распределения последовательности по заданному модулю и установил двойственность этого понятия понятию равномерного распределения последовательности по модулю 1 (см. также [4, глава V]). В 1967 году В. Наркевич [6] перенес понятие равномерного распределения функций на группу приведенных вычетов по некоторому модулю N и назвал его слабо равномерным распределением (с.р.р.) по модулю N. Это понятие оказалось более удобным для мультипликативных функций. В работах [6, 7] изучается с.р.р. по модулю N для некоторого класса мультипликативных функций.

В статье О. М. Фоменко [8] установлено с.р.р. по простому модулю для некоторых функций, не попадающих в класс В. Наркевича. В работе Б. М. Широкова [9] перенесена теория В. Наркевича на более широкий класс функций, а в [10, 11] приведены необходимые и достаточные условия на модуль N для с.р.р. по модулю N некоторых функций, не попадающих в класс полиномоподобных.

Отметим, что в работах о распределении значений функций в классах вычетов приводятся асимптотические формулы для количества значений функций, попадающих в заданный класс вычетов, которые содержат только главный член асимптотики. Это объясняется тем, что для используемых при этом производящих функций применяется тауберова теорема Деланжа [12]. Но эти производящие функции обладают лучшими аналитическими свойствами, чем необходимо для применения этой теоремы.

Ключевую роль при выводе асимптотических формул в нашей работе играет лемма 3, которая представляет собой теорему тауберова типа и является более точной формой тауберовой теормы 1 работы [13]. Проф. Е. В. Подсыпанин обратил наше внимание на то, что в этой теореме не отражена зависимость асимптотики в случае нецелого показателя z от числа n, количества слагаемых асимптотики и не ясно, можно ли считать асимптотику асимптотическим рядом. Лемма 3 содержит более точный результат, чем упомянутая выше теорема 1. В ней отражена зависимость асимптотики от n. В связи с этим она приводится с полным доказательством.

Основные обозначения и определения. N, a, b, d, i, j, k, m, n, r — целые числа; p, q — простые числа; x — действительное число, большее 1; $s = \sigma + it$ — комплексное число; $(a_1, \ldots, a_k)$ — наибольший общий делитель чисел $a_1, \ldots, a_k$; $G(N)$ — группа вычетов, взаимно простых с N; χ и h — характеры Дирихле по модулю N; $f(n)$ — мультипликативная целозначная функция; $|M|$ — количество элементов конечного множества M; $S(x, r, f)$ — количество чисел $n \leqslant x$, для которых $f(n) \equiv r \bmod N$, или $S(x, r)$, когда из контекста ясно, о какой функции $f(n)$ идет речь; для некоторой постоянной $c_0 > 0$

$$\sigma(t) = \max\left\{\frac{3}{4}, 1 - \frac{c_0}{\ln(|t|+2)}\right\}, \quad \Omega = \{s \mid \sigma(t) < \sigma,\ -\infty < t < +\infty\};$$

$\varphi(n)$ — функция Эйлера; $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера;

$$\lambda = \prod_{q|N} \frac{q-3}{q-1}; \quad z(\chi) = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{r \in G(N)} \chi(r^2 - 1).$$

Определение 1. *Функция $f(n)$ называется слабо равномерно распределенной по модулю N, если для любых a и b, взаимно простых с N,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{S(x, a, f)}{S(x, b, f)} = 1,$$

при условии, что множество $\{n \mid (f(n), N) = 1\}$ бесконечно.

Определение 2. *Пара чисел a и b называется примитивной по модулю N, если $(a, b, N) = 1$.*

Количество несравнимых между собой по модудю n примитивных пар обознается через $J_2(n)$ и называется функцией Жордана. В дальнейшем будем обозначать ее $J(n)$. Она мультипликативна и

$$J(n) = n^2 \prod_{q|n} \left(1 - \frac{1}{q^2}\right).$$

Свойства этой функции и некоторых ее обощений изучались в работах [14, 15, 16].

В нашей работе рассматривается распределение значений функции Жордана в классах вычетов по модулю N и доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Функция $J(n)$ слабо равномерно распределена по модулю N тогда и только тогда, когда $(N, 6) = 1$.*

Теорема 2. *Если $(N,6)=1$, то для любого натурального n и для любого $r\in G(N)$ при $x\to\infty$ для функции $J(n)$ справедлива асимптотика*

$$S(x,r)=\frac{1}{\varphi(N)}\frac{x}{(\ln x)^{1-\lambda}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k(\chi_0)}{\Gamma(k-\lambda)\ln^k x}+$$

$$+\frac{1}{\varphi(N)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\frac{\bar\chi(r)x}{(\ln x)^{1-z(\chi)}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k(\chi)}{\Gamma(k-z(\chi))\ln^k x}+O\left(\frac{x\Gamma(n+3-\lambda)}{R^n(\ln x)^{n+1-\lambda}}\right),$$

причем, $|z(\chi)|<\lambda$ для любого $\chi\neq\chi_0$, где $a_k(\chi)$ и R, $0<R<1$, — постоянные, не зависящие от n, и константа в символе O тоже не зависит от n.

2. Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы нам потребуется следующие леммы.

Лемма 1. *Если $(N,6)=1$ и для характера χ по модулю N справедливо равенство*

$$\sum_{r\in G(N)}\chi(r^2-1)=\varphi(N)\prod_{q|N}\frac{q-3}{q-1}, \tag{1}$$

то χ — главный характер по модулю N.

Доказательство. Пусть сначала $N=q^k$ и $q>7$. Вычет $r\in G(N)$ представим в виде

$$r=aq+b,\quad 0\leqslant a\leqslant q^{k-1}-1,\quad 1\leqslant b\leqslant q-1.$$

Равенство $\chi(r^2-1)=0$ верно тогда и только тогда, когда

$$r^2-1\equiv 0\bmod q,$$

т. е. $r^2\equiv 1\bmod q$. Значит, $r=aq+1$ или $r=aq+q-1$, $0\leqslant a\leqslant q^{k-1}-1$. Количество таких вычетов равно $2q^{k-1}$. Поэтому количество ненулевых слагаемых в сумме, стоящей в равенстве (1), равно

$$\varphi(q^k)-2q^{k-1}=\varphi(q^k)\frac{q-3}{q-1},$$

т. е. правой части равенства (1) при $N=q^k$. Так как $|\chi(n)|=1$ при условии, что $\chi(n)\neq 0$, то для ненулевых слагаемых суммы в равенстве (1) имеем: $\chi(r^2-1)=1$. Дальше доказательство проведем индукцией по a.

Пусть $a=0$. Если $r=2$, то $\chi(1)=\chi(3)=1$. Вычет $r=3$ приводит к равенству $\chi^3(2)=1$. При $r=7$ получаем $\chi(48)=\chi(3)\chi^4(2)=\chi(2)=1$.

Итак, $\chi(1)=\chi(2)=1$. Если для $r<q-1$ верны равенства $\chi(r-1)=\chi(r)=1$, то из равенства $\chi(r^2-1)=1$ следует, что $\chi(r+1)=1$. Таким образом, для всех r, удовлетворяющих неравенству $1\leqslant r\leqslant q-1$ мы получили $\chi(r)=1$.

Допустим, что для всех вычетов $r\leqslant aq+q-1$, $a<q^{k-1}-1$ выполняется равенство $\chi(r)=1$.

Положим $a'=a+1$. Нам достаточно показать, что

$$\chi(a'q+1)=\chi(a'q+2)=1.$$

Если a' нечетно, то $\frac{a'q+1}{2}\leqslant aq+q-1$. Следовательно,

$$\chi(a'q+1)=\chi(2)\chi\Big(\frac{a'q+1}{2}\Big)=1.$$

Далее, одно из чисел $a'q+2$, $a'q+4$, $a'q+6$ делится на 3. Если это $a'q+2$, то

$$\chi(a'q+2)=\chi(3)\chi\Big(\frac{a'q+2}{3}\Big)=1.$$

Если это $a'q+4$, то аналогично находим, что $\chi(a'q+4)=1$. Но

$$\chi(a'q+2)\chi(a'q+4)=1.$$

Значит, и $\chi(a'q+2)=1$.

Если это $a'q+6$, то так же видим, что $\chi(a'q+4)=1$, а отсюда и $\chi(a'q+2)=1$.

А теперь так же, как и при $a=0$, индуктивно устанавливаем, что $\chi(a'q+b)=1$ для всех таких значений b, что $1\leqslant b\leqslant q-1$.

Если же a' четно, то одно из чисел $a'q+1$, $a'q+3$, $a'q+5$ делится на 3. Тогда рассуждая так же, как выше, получим, что $\chi(a'q+1)=1$. В силу четности числа $a'q+2$, как и прежде, выводим, что $\chi(a'q+2)=1$. Опять, повторяя рассуждение при $a=0$, находим, что $\chi(a'q+b)=1$ для всех значений b, удовлетворяющих неравенству $1\leqslant b\leqslant q-1$.

Пусть теперь $q=5$ или $q=7$. При $r=2$ имеем: $2^2-1=3$ и $\chi(3)=1$. Но 3 — первообразный корень по модулю q^k. Поэтому $\chi=\chi_0$.

Если $N=q_1^{k_i}\cdots q_l^{k_l}$, $q_i>3$, то, в силу китайской теоремы об остатках, каждому $r\in G(N)$ взаимно однозначно соответствует такой набор $(r_1,\ldots,r_l)$, $r_i\in G(q_i^{k_i})$, что $r\equiv r_i \bmod q_i^{k_i}$. Кроме того, характер χ определяется как произведение характеров χ_i групп $G(q_i^{k_i})$. Следовательно,

$$\chi(r^2-1)=\chi_1(r_1^2-1)\cdots\chi_l(r_l^2-1)$$

Подставим это в равенство (1). Обозначая $G_i=G(q_i^{k_i})$ и $N_i=q_i^{k_i}$, получим

$$\sum_{r\in G}\chi_1(r_1^2-1)\cdots\chi_l(r_l^2-1)=\prod_{i=1}^{l}\sum_{r_i\in G_i}\chi_i(r_i^2-1)=\prod_{i=1}^{l}\varphi(N_i)\frac{q_i-3}{q_i-1}.$$

Как показано выше, для каждой суммы в произведении справедливо неравенство

$$\left|\sum_{r_i\in G_i}\chi_i(r_i^2-1)\right|\leqslant\varphi(N_i)\frac{q_i-3}{q_i-1}.$$

Следовательно для каждого i, $1\leqslant i\leqslant l$,

$$\sum_{r_i\in G_i}\chi_i(r_i^2-1)=\varphi(N_i)\frac{q_i-3}{q_i-1}.$$

По доказанному отсюда следует, что для любого i характер χ_i — главный. Тогда и характер χ тоже главный. Лемма доказана. □

Введем дополнительные обозначения: $R(N,f)$ — множество тех вычетов $r\in G(N)$, для которых существует такое простое число p, $(p,N)=1$, что $f(p)\equiv r \bmod N$; $\Lambda(N,f)$ — подгруппа $G(N)$, порожденная множеством $R(N,f)$. Для функции Жордана положим $R(N)=R(N,J)$ и $\Lambda(N)=\Lambda(N,J)$.

Функция $f(n)$ называется полиномоподобной, если для любого натурального k существует такой многочлен $P_k(x)$ степени k с целыми коэффициентами, что для любого простого числа p $f(p^k)=P_k(p)$.

Лемма 2. *Если для плиномоподобной мультипликативной функции $f(n)$ выполняется равенство $\Lambda(N,f)=G(N)$, то функция $f(n)$ слабо равномерно распределена по модулю N.*

Доказательство. Эта лемма есть непосредственное следствие теоремы 1 работы В. Наркевича [6, с. 270]. □

Приступим к доказательству теоремы 1.

Доказательство. Итак, пусть $(N,6)=1$. Допустим, что $\Lambda(N)\neq G(N)$. Тогда существует неглавный характер χ по модулю N, равный 1 на подгруппе $\Lambda(N)$. Если $r\in G(N)$ и простое число $p\equiv r \bmod N$, то $J(p)\equiv r^2-1 \bmod N$. Значит, множество

$$R(N)=\{a|a\equiv r^2-1 \bmod N, r\in G(N), (r^2-1,N)=1\}.$$

Так как $R(N)\subset\Lambda(N)$, то

$$\sum_{r\in G(N)}\chi(r^2-1)=|R(N)|=\varphi(N)\prod_{q|N}\frac{q-3}{q-1}.$$

Тогда из леммы 1 следует, что χ — главный характер и $\Lambda(N)=G(N)$. В виду леммы 2 функция $J(n)$ с. р. р. по модулю N.

Нам осталось убедиться, что если N делится на 2 или на 3, то функция $J(n)$ не обладает слабо равномерным распределением по этому модулю. Покажем, что в этом случае множество $M=\{n|(J(n),N)=1\}$ конечно.

1) Пусть N четно.

Если существует $p>2$, делящее n, то $p^2-1|J(n)$ и $J(n)$ четно и $n\notin M$. Если же $n=2^m$, то $J(n)$ нечетна только при $m=0$ или 1, т. е. множество M содержит не больше двух чисел.

2) Пусть N нечетно, но делится на 3.

Если $n=3^k n_1$ и $(n_1,3)=1$, то при $k>1$ число $J(n)$ елится на 3 и $n\notin M$. Пусть $n=n_1$ или $n=3n_1$. Если n_1 четно, то в обоих сучаях $3|J(n)$ и $n\notin M$. Если n_1 нечетно и не равно 1, то существует $p\geqslant 5$, делящее n_1. Тогда из трех чисел $p-1$, p, $p+1$ одно делится на 3 и это не число p, т. е. $3|J(n)$ и $n\notin M$. Остается только две возможности: $n=1$ и $n=3$, т. е. M конечно.

Таким образом, если $(N,6)>1$, то множество M конечно и функция $J(n)$ не обдадает с. р. р. по модулю N. Теорема 1 полностью доказана. □

3. Доказательство теоремы 2

Нам потребуется лемма, которая представляет собой теорему тауберова типа для рядов Дирихле. Именно эта лемма заменит теорему Деланжа, о которой шла речь во введении.

Лемма 3. *Пусть для арифметической функции $f(n)$ существуют такие постоянные $A>0$ и $B>0$, что $|f(n)|\leqslant B(\ln n)^A$ и определенная при $\sigma>1$ функция*

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$$

удовлетворяет условиям:

1) существует такая регулярная в Ω и непрерывная на ее границе функция $G(s)$, что при $\sigma>1$ для некоторого $z\in\mathbb{C}$

$$F(s)=G(s)(s-1)^{-z}, \tag{2}$$

причем, если z — нецелое, то фиксируем главную ветвь $\ln(s-1)$;

2) для продолжения $F(s)$ в области Ω существует такая постоянная $A_1>0$, что $F(s)=O(\ln^{A_1}(|t|+2))$, $\quad |t|\geqslant 1$.

Тогда существует такая постоянная $c\in(0,1)$, что при $x\to\infty$

а) если $z = 1, 0, -1, -2, \dots$, то

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n) = \nu(z)G(1)x + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}),$$

где $\nu(z) = 1$, если $z = 1$ и $\nu(z) = 0$ в противном случае;

б) если $z \notin \mathbb{Z}$ и $\xi = \operatorname{Re} z$, то для любого натурального n

$$S(x) = \frac{x}{(\ln x)^{1-z}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{\ln^k x \Gamma(k-z)} + O\left(\frac{x\,\Gamma(n+3-\xi)}{R^n (\ln x)^{n+1-\xi}}\right),$$

где a_k — коэффициенты Тейлора функции $G(s)s^{-1}$ в точке $s = 1$, а R — произвольное положительное число, меньшее 1 и радиуса регулярности этой функции в точке $s = 1$, и константы a_k и в символе O не зависят от n.

Доказательство.

Обозначим $= \ln^{-1} \mathbf{x}$ и $\sigma_0 = 1 + 2$. На основании теоремы П.3.1 в книге К. Прахара [17] существует такая постоянная $B_1 > 0$, что для полуцелого $x > 1$

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \ln^{B_1} x}{T}\right). \tag{3}$$

Используя продолжение функции $F(s)$ влево от прямой $\sigma = 1$, заменим контур интегрирования.

Пусть $z \leqslant 1$ — целое число. Опишем дополнительные контуры.

$L_1^+ : \sigma(T) \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0,\ t = T, \quad L_1^- : \sigma(T) \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0,\ t = -T;$

$L_2^+ : \sigma = \sigma(t),\ \leqslant \mathbf{t} \leqslant \mathbf{T}; \quad L_2^- : \sigma = \sigma(t),\ -T \leqslant t \leqslant -;$

$L_3 : \sigma = \sigma(),\ |\mathbf{t}| \leqslant; \quad L = L_1^+ \cup L_2^+ \cup L_3 \cup L_2^- \cup L_1^-.$

Обозначим для некоторого контура Γ

$$I(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} F(s) \frac{x^s}{s} ds.$$

В случае а) функция $F(s)s^{-1}x^s$ либо регулярна в Ω, если $z \leqslant 0$, либо содержит один простой полюс при $s = 1$, если $z = 1$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds = \nu(z)G(1)x + O(|I(L)|). \tag{4}$$

Далее,

$$|I(L_1^+)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\sigma(T)}^{\sigma_0} |F(s)| \frac{x^\sigma}{|\sigma + iT|} d\sigma.$$

Из условия 2) леммы следует, что существует такая постоянная $C_1 > 0$, что при $T = e^{\sqrt{\ln x}}$

$$|I(L_1^+)| \leqslant C_1 \frac{x \ln^{A_1} T}{T} \int\limits_{\sigma(T)}^{\sigma_0} x^\sigma d\sigma = O\big((\ln x)^{\frac{A_1}{2}} - 1 x e^{-\sqrt{\ln x}}\big). \tag{5}$$

Оценка по контуру L_1^- будет такой же, так как интегралы по этим контурам комплексно сопряжены.

Перейдем к оценке $I(L_2^+)$. Пусть $t_0 = \max\{e^{4c_0} - 2,\ 0\}$. Если $t_0 > 0$ и $0 \leqslant t \leqslant t_0$, то $\Delta\sigma(t) = \frac{3}{4}$; если $t \geqslant t_0$, то $\Delta\sigma(t) = 1 - \frac{c_0}{\ln(t+2)}$. Если $t_0 > 0$, то $\delta < t_0$ при достаточно большом x. Представим $I(L_2^+)$ следующим образом

$$I(L_2^+) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{t_0} \frac{F(3/4+it)x^{3/4+it}}{3/4+it}dt + \frac{x}{2\pi}\int\limits_{t_0}^{T} \frac{F(\sigma(t)+it)}{\sigma(t)+it}x^{it+\sigma(t)-1}dt.$$

В первом интеграле функция $\Delta F\left(\frac{3}{4}+it\right)$ ограничена, поэтому он имеет оценку $O(x^{3/4})$. Во втором — можно считать, что $F(s) = O(\ln^{A_1}(t+2))$ (условие 2) леммы), так как при $|t| \leqslant 1$ это условие равносильно ограниченности $F(\sigma(t)+it)$, что справедливо. Так что для второго интеграла найдутся такие постоянные $C_2 > 0$ и $C_3 > 0$, что при $T = e^{\sqrt{\ln x}}$ он не превосходит

$$C_2 x \int\limits_{t_0}^{T} \frac{\ln^{A_1}(t+2)}{t+2} x^{-c_0/\ln(T+2)}dt \leqslant C_2 x e^{\frac{-c_0\ln x}{\ln(T+2)}} \frac{(\ln(T+2))^{A_1+1}}{A_1+1} \leqslant$$
$$\leqslant C_3 x (\ln x)^{A_1+1} e^{-(c_0\sqrt{\ln x})/2}.$$

Соединяя полученные две оценки, получим

$$I(L_2^+) = O\big(x(\ln x)^{A_1+1}e^{-(c_0\sqrt{\ln x})/2}\big). \tag{6}$$

Для контура L_3 при $\gamma = \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{c_0}{\ln 3}\right\}$ справедлива оценка

$$I(L_3) = O(x^{1-\gamma}),$$

которая поглощается предыдущими, поэтому в дальнейшем ее можно не учитывать. Выберем $c > 0$ так, чтобы $c < 1$ и $c < c_0/2$. Тогда правые части неравенств (5) и (6) оценятся как $O(xe^{-c\sqrt{\ln x}})$. Подставим полученные оценки в формулу (4), затем — в равенство (3) и получим утверждение пункта а) леммы.

Перейдем к доказательству пункта б). Допустим, что z — нецелое число. Теперь при интегрировании по новому контуру мы не должны пересекать полупрямую $t = 0$, $-\infty < \sigma \leqslant 1$, поэтому в контуре L заменим контур L_3 на контур Γ, состоящий из трех частей:

$L_4^+ : \sigma(\delta) \leqslant \sigma \leqslant 1,\ t = \delta$;

$L_5 : s - 1 = \delta e^{i\varphi},\ -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$;

$L_4^- : \sigma(\delta) \leqslant \sigma \leqslant 1,\ t = -\delta$.

Обозначим через L' новый контур, заменяющий контур L. Тогда

$$I(L') = I(L_1^+) + I(L_2^+) + I(\Gamma) + I(L_2^-) + I(L_1^-) = I(\Gamma) + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}), \tag{7}$$

так как оценки интегралов по контурам $L_1^\pm$, $L_2^\pm$ остаются те же, что и в случае 1).

Пусть R' — радиус круга регулярности функции $G(s)$ с центром в точке $s = 1$. Выберем $R < 1$ так, чтобы $0 < R < R'$. Можно считать, что точка $s = \sigma(\delta) + i\delta$ пересечения контуров L_2^+ и L_4^+ находится в круге $|s-1| < R$. В противном случае добавим контур, лежащий на прямой $t = \delta$, от этой точки до точки $\sigma' + i\delta$, лежащей в левом полукруге $|s-1| < R$, причем интеграл по этому контуру оценится как $O(x^{\sigma'})$, $\sigma' < 1$.

Итак, контур Γ находится внутри круга $|s-1| \leqslant R$, в котором функция $G(s)s^{-1}$ регулярна. Выберем произвольно натуральное число $n \geqslant 1$. Пусть a_k и $R_n(s)$ — коэффициенты и остаточный член в формуле Тейлора для функции $G(s)s^{-1}$ в круге $|s-1| < R$. Для интеграла по контуру Γ получим приедставление

$$I(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \int\limits_{\Gamma} (s-1)^{k-z} x^s ds + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{x^s R_n(s)}{(s-1)^z} ds. \tag{8}$$

В интегралах под знаком суммы контур Γ дополним двумя контурами

$\Gamma_\delta^+\colon -\infty < \sigma \leqslant \sigma(\delta),\ t = \delta;\quad \Gamma_\delta^-\colon -\infty < \sigma \leqslant \sigma(\delta),\ t = -\delta.$

Обозначим $H_\delta = \Gamma_\delta^+ \cup \Gamma \cup \Gamma_\delta^-$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} (s-1)^{k-z} x^s ds = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{H_\delta} - \int\limits_{\Gamma_\delta^+} - \int\limits_{\Gamma_\delta^-}\right)(s-1)^{k-z} x^s ds. \tag{9}$$

В интеграле по H_δ используем преобразование $s-1 = \delta\zeta$ и обозначим через H контур, в который переходит контур H_δ. Благодаря представлению Ханкеля для Γ-функции, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{H_\delta} (s-1)^{k-z} x^s ds = \frac{x\delta^{k+1-z}}{2\pi i}\int\limits_{H} \zeta^{k-z} e^{\zeta} d\zeta = \frac{x}{(\ln x)^{k+1-z}} \cdot \frac{1}{\Gamma(z-k)}.$$

Оценим интеграл по контуру Γ_δ^+, обозначая его величину через I_k:

$$I_k = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\delta^+} (s-1)^{k-z} x^s ds\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\sigma(\delta)} |(\sigma - 1 + i\delta)^{k-z}| x^\sigma d\sigma. \tag{10}$$

Пусть $z = \xi + i\eta$. Ввиду закрепления главной ветви $\ln(s-1)$ на Γ_δ^+, с некоторой постоянной $C_4 > 0$ справеждиво неравенство

$$|(s-1)^{-z}| = |s-1|^{-\xi} e^{\eta \arg(s-1)} \leqslant C_4 |s-1|^{-\xi}. \tag{11}$$

В последнем интеграле положим $1 - \sigma = \delta u$. Тогда

$$I_k \leqslant \frac{C_4 x}{2\pi}\delta^{k+1-\xi} \int\limits_{(1-\sigma(\delta))/\delta}^{\infty} e^{-u}(u+1)^{k-\xi} du.$$

По определению $\sigma(t)$

$$1 - \sigma(\delta) = \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{c_0}{\ln(2+\delta)}\right\} \geqslant \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{c_0}{\ln 3}\right\} \overset{Def}{=} \varepsilon.$$

Так как $\delta = (\ln x)^{-1}$, то $(1-\sigma(\delta))/\delta \geqslant \varepsilon \ln x$. Следовательно,

$$I_k \leqslant \frac{c_4}{2\pi}\delta^{k+1-\xi} x \int\limits_{\varepsilon \ln x}^{\infty} e^{-u}(u+1)^{k-\xi} du.$$

С некоторыми положительными постоянными c' и c'' в этом интеграле справедливо неравенство $c'u \leqslant u+1 \leqslant c''u$. Поэтому найдется такая постоянная $C_5 > 0$, что

$$I_k \leqslant \frac{C_5 x}{(\ln x)^{k+1-\xi}} \int\limits_{\varepsilon \ln x}^{\infty} u^{k-\xi} e^{-u} du.$$

Пусть $[\xi] = m$, $\xi = m + \alpha$ и $l = k - m$. Так как $0 \leqslant k \leqslant n-1$, то $-m \leqslant l \leqslant n-m-1$. Если $l \leqslant 0$, то

$$I_k = I_{l+m} \leqslant \frac{C_5 x}{(\ln x)^{k+1-\xi}} \int\limits_{\varepsilon \ln x}^{\infty} u^{l-\alpha} e^{-u} du \leqslant \frac{C_5 x^{1-\varepsilon}}{\ln x}. \tag{12}$$

Если $l > 0$, то

$$\int\limits_{\varepsilon \ln x}^{\infty} u^{l-\alpha} e^{-u} du \leqslant \frac{x^{-\varepsilon}}{(\varepsilon \ln x)^{\alpha}} (l+1)! (\ln x)^l.$$

С некоторой постоянной $C_6 > 0$ это приводит к оценке

$$I_k = I_{l+m} \leqslant C_6 \frac{x^{1-\varepsilon}}{\ln x} (l+1)!. \tag{13}$$

Оценка по контуру Γ_δ^- будет такой же. Пусть $\Delta M = \max_{|s-1|=R} |G(s)s^{-1}|$. Тогда $|a_k| \leqslant MR^{-k}$. Из формул (10), (12) и (13) с некоторой постоянной $C_7 > 0$ следует

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(\int\limits_{\Gamma_\delta^+} + \int\limits_{\Gamma_\delta^-} \right) (s-1)^{k-z} x^s ds \right| \leqslant C_7 \frac{x^{1-\varepsilon}}{\ln x} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{(k-m+1)!}{R^k} \leqslant$$
$$\leqslant C_7 \frac{x^{1-\varepsilon}}{\ln x} \cdot \frac{(n-m)(n-m)!}{R^n} \leqslant C_7 \frac{x^{1-\varepsilon}}{\ln x} \cdot \frac{\Gamma(n+3-\xi)}{R^n}. \tag{14}$$

Нам осталось оценить интеграл от остаточного члена $R_n(s)$, который будем рассматривать как остаток ряда Тейлора. Его коэффициенты удовлетворяют неравенству $|a_k| \leqslant MR^{-k}$. Следовательно,

$$|R_n(s)| \leqslant \frac{M|s-1|^n}{R^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s-1|^k}{R^k}.$$

Так как контур Γ целиком лежит внутри круга $|s-1| = R$, то существует такое положительное число $\rho < R$, что для $s \in \Gamma$ справедливо неравенство $|s-1| \leqslant \rho$. Поэтому с некоторой положительной постоянной C_8 имеем:

$$|R_n(s)| \leqslant C_8 \frac{|s-1|^n}{R^n}.$$

Учитывая, что неравенство (11) справедливо и для контура Γ, с некоторой постоянной $C_9 > 0$ получим

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_4^+} R_n(s) x^s (s-1)^{-z} ds \right| \leqslant C_9 \frac{\delta^{n+1-\xi}}{R^n} \int\limits_0^{\infty} e^{-u} u^{n-\xi} du = C_9 \frac{\Gamma(n+1-\xi)}{(\ln x)^{n+1-\xi} R^n} \tag{15}$$

Оценка по контуру L_4^- такая же.

На контуре L_5: $s-1=\delta e^{i\varphi}$; поэтому $|(s-1)^{-\xi-i\eta}|=\delta^{-\xi}e^{\varphi\eta}\leqslant\delta^{-\xi}e^{\pi|\eta|}$; $\quad R_n(s)=O(\delta^n)R^{-n}$; величина x^{s-1} ограничена. С некоторой постоянной $C_{10}>0$ справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_{L_5} R_n(s)(s-1)^{-z}x^s ds\right|\leqslant C_{10}x\delta^{n+1-\xi}R^{-n}. \tag{16}$$

Из равенств (8) и (9) и оценок (14), (15) и (16) получаем

$$I(\Gamma)=\frac{x}{(\ln x)^{1-z}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{(\ln x)^k\Gamma(z-k)}+O\left(\frac{x\Gamma(n+3-\xi)}{(\ln x)^{n+1-\xi}R^n}\right).$$

Из этого равенства и формул (3), (7) и (8) следует второе утверждение леммы. Лемма доказана. □

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Доказательство. Пусть N — фиксированное натуральное число, взаимно простое с 6. Используя свойство ортогональности характеров, представим сумму $S(x,r)$ в виде

$$S(x,r)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ J(n)\equiv r \bmod N}}1=\frac{1}{\varphi(N)}\sum_{\chi}\bar{\chi}(r)\sum_{n\leqslant x}\chi(J(n)).$$

Обозначим

$$S(x,\chi)=\sum_{n\leqslant x}\chi(J(n)).$$

Это сумматорная функция для коэффициентов ряда

$$F(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(J(n))}{n^s}. \tag{17}$$

Таким образом, задача свелась к применению леммы 3 к ряду Дирихле (17). Для применения леммы нужно изучить аналитические свойства функции $F(s,\chi)$ и ее аналитического продолжения в области Ω.

Функция $\chi(J(n))$ мультипликативна, а ряд (17) абсолютно сходится при $\sigma>1$, поэтому

$$F(s,\chi)=\prod_p\left(1+\frac{\chi(J(p))}{p^s}+\frac{\chi(J(p^2))}{p^{2s}}+\dots\right).$$

Так как $\chi(J(p^k))=\chi(p^{2k-2}(p^2-1))=\chi(p^2-1)\chi^{2k-2}(p)$, то

$$F(s,\chi)=\prod_p\left(1+\frac{\chi(p^2-1)}{p^s-\chi^2(p)}\right).$$

Обозначим

$$H(s,\chi)=\prod_{(p,N)=1}\left(1-\frac{\chi(p^2-1)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Умножим и разделим $F(s,\chi)$ на $H(s,\chi)$ и представим в виде

$$F(s,\chi)=A(s,\chi)H(s,\chi).$$

Через $A(s,\chi)$ обозначена функция

$$A(s,\chi)=\left(1+\frac{\chi(3)(\chi^2(2)-\chi(3)}{2^s(2^s-\chi^2(2))}\right)\prod_{p|N}\left(1+\frac{\chi(p^2-1)}{p^s}\right)\times$$
$$\times\prod_{\substack{(p,N)=1\\ p>2}}\left(1+\frac{\chi(p^2-1)(\chi^2(p)-\chi(p^2-1))}{p^s(p^s-\chi^2(p))}\right).$$

Функция $A(s,\chi)$ регулярна и ограничена при $\sigma\geqslant 3/4$. Для конечного произведения по простым числам, делящим N, и $p=2$ это ясно. Проверим это для произведения по всем $p>2$, не делящим N. В виду неравенства

$$\left|\frac{\chi(p^2-1)(\chi^2(p)-\chi(p^2-1))}{p^s(p^s-\chi^2(p))}\right|\leqslant\frac{2}{p^\sigma(p^\sigma-1)}\leqslant\frac{4}{p^{3/2}},$$

это произведение сходится абсолютно и равномерно в указанной области, а его значение ограничено. Таким образом, чтобы продолжить $F(s,\chi)$ в область Ω, нужно найти продолжение $H(s,\chi)$. Для этого рассмотрим $\operatorname{Ln}H(s,\chi)$, выбирая ту ветвь, для которой при $\sigma>1$ справедливо равенство

$$\ln H(s,\chi)=-\sum_{(p,N)=1}\ln\left(1-\frac{\chi(p^2-1)}{p^s}\right).$$

Равенство будет верно, если при $z_p=\chi(p^2-1)p^{-s}$ абсолютно сходятся ряды

$$\sum_{(p,N)=1}\ln|1-z_p|\quad\text{и}\quad\sum_{(p,N)=1}\arg(1-z_p).$$

Первый ряд абсолютно сходится в виду оценки

$$|\ln|1-z_p||\leqslant\frac{|z_p|}{1-|z_p|}\leqslant\frac{1}{p^\sigma-1}.$$

Так как $|z_p|\leqslant p^{-\sigma}$, то выбираем ту ветвь, для которой справедливо неравенство

$$|\arg(1-z_p)|\leqslant\operatorname{arctg}\frac{|z_p|}{|1+z_p|}\leqslant|z_p|\leqslant\frac{1}{p^\sigma}.$$

Для выбранной ветви

$$\ln H(s,\chi)=\sum_{(p,N)=1}\frac{\chi(p^2-1)}{p^s}+\sum_{(p,N)=1}\sum_{k\geqslant 2}\frac{\chi^k(p^2-1)}{kp^{ks}}.\tag{18}$$

Обозначим второе слагаемое в формуле (18) через $B(s,\chi)$. Эта функция регулярна и ограничена в области $\sigma\geqslant 3/4$. Это следует из неравенства

$$\left|\sum_{k\geqslant 2}\frac{\chi^k(p^2-1)}{kp^{ks}}\right|\leqslant\frac{1}{p^\sigma(p^\sigma-1)}\leqslant 2p^{-3/2}.$$

Преобразуем первое слагаемое в равенстве (18) следующим образом

$$\sum_{(p,N)=1}\frac{\chi(p^2-1)}{p^s}=\sum_{r\in G(N)}\chi(r^2-1)\sum_{p\equiv r\pmod N}p^{-s}=$$
$$=\sum_{h\bmod N}\frac{1}{\varphi(N)}\sum_{r\in G(N)}\chi(r^2-1)\bar{h}(r)\sum_p\frac{h(p)}{p^s}.$$

Ряд по простым числам свяжем с L-функцией $L(s,h)$ с помощью равенства

$$\ln L(s,h) = \sum_p \frac{h(p)}{p^s} + \sum_p \sum_{k\geqslant 2} \frac{h^k(p)}{kp^{ks}},$$

где ветвь логарифма выбирается аналогично тому, как это сделано на с. 134. Обозначим

$$C(s,h) = -\sum_p \sum_{k\geqslant 2} \frac{h^k(p)}{kp^{ks}} \quad \text{и} \quad z(\chi,h) = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{r\in G(N)} \chi(r^2-1)\bar{h}(r).$$

Функция $C(s,h)$ так же, как и $B(s,\chi)$, регулярна и ограничена в области Ω. Тогда из равенства (18) получим

$$\ln H(s,\chi) = B(s,\chi) + \sum_{h \bmod N} z(\chi,h)\big(\ln L(s,h) + C(s,\chi)\big).$$

Отсюда приходим к представлению для $H(s,\chi)$:

$$H(s,\chi) = e^{B(s,\chi)} \prod_{h \bmod N} \big(L(s,h)e^{C(s,h)}\big)^{z(\chi,h)}.$$

Следовательно, для $F(s,\chi)$ имеем:

$$F(s,\chi) = A(s,\chi)e^{B(s,\chi)} \prod_h e^{z(\chi,h)C(s,h)} \cdot \prod_h \big(L(s,h)\big)^{z(\chi,h)}. \tag{19}$$

Так как $|z(\chi,h)| \leqslant 1$, то множитель

$$A(s,\chi)e^{B(s,\chi)} \prod_h e^{z(\chi,h)C(s,h)},$$

как показано выше, есть регулярная и ограниченная при $\sigma \geqslant 3/4$ функция. Произведение L-функций по характерам h в равенстве (19) запишем в виде

$$(s-1)^{-z(\chi)}\big(L(s,h_0)(s-1)\big)^{z(\chi)} \prod_{h\neq h_0} \big(L(s,h)\big)^{z(\chi,h)},$$

где $z(\chi) = z(\chi,h_0)$. Функция $(s-1)L(s,h_0)$ регулярна в области Ω и не обращается там в 0. В произведение по характерам $h \neq h_0$ входят L-функции, которые регулярны в области Ω и, если $h^2 \neq h_0$, то и не обращаются там в 0. Возможный для вещественного характера так называемый зигелевский нуль можем считать лежащим вне области Ω, так как модуль характеров h фиксирован, и на основании теоремы Зигеля уменьшением постоянной c_0 можно отодвинуть границу области Ω правее этого нуля.

Так как выбор ветви $\ln L(s,h)$ уже сделан на с. 135, то для каждого $h \neq h_0$ функция $(L(s,h))^{z(\chi,h)}$ также регулярна в области Ω.

Итак, функция

$$G(s,\chi) = \\ = A(s,\chi)e^{B(s,\chi)} \prod_h e^{z(\chi,h)C(s,h)} \cdot \big(L(s,h_0)(s-1)\big)^{z(\chi)} \prod_{h\neq h_0} \big(L(s,h)\big)^{z(\chi,h)}$$

регулярна в области Ω. При помощи равенства

$$F(s,\chi) = \frac{G(s,\chi)}{(s-1)^{z(\chi)}}$$

функция $F(s,\chi)$ продолжается аналитически в область Ω, причем для $\ln(s-1)$ закреплена главная ветвь.

Покажем, что $F(s,\chi)$ удовлетворяет условию 2) леммы 3. Для этого используем представление $F(s,\chi)$ равенством (19). Произведение

$$A(s,\chi)e^{B(s,\chi)}\prod_h e^{z(\chi,h)C(s,h)}$$

ограничено на всей области Ω. Для L-функций $L(s,h)$ в области Ω при $|t|\geqslant 1$ справедлива оценка $L(s,h)=O\big(\ln(|t|+2)\big)$ [17, Глава IV]. Обозначим $\tau=\arg L(s,h)$. В виду выбора ветви $\ln L(s,h)$ на с. 135, величина τ ограничена. Если положим $z(\chi,h)=\xi+i\eta$, то

$$\left|(L(s,h))^{z(\chi,h)}\right|=|L(s,h)|^{\xi}e^{-\tau\eta}.$$

Если $\xi>0$, то при $|t|\geqslant 1$

$$\big(L(s,h)\big)^{z(\chi,h)}=O\big(\ln(|t|+2)\big).$$

Если $\xi<0$, то нужна оценка $L^{-1}(s,h)=O(\ln^B|t|+2)$ с некоторой постоянной $B>0$. Для $h=h_0$ она следует из такой же оценки для $\zeta^{-1}(s)$ [17, с. 83]. Если $h\neq h_0$ то она доказывается аналогично.

Таким образом, $F(s,\chi)$ удовлетворяет условию 2) леммы 3. Для каждого характера χ к функции $F(s,\chi)$ применяем лемму 3 с показателем $z=z(\chi)$. Для главного характера этот показатель $z(\chi_0)=\lambda$. Если $\chi\neq\chi_0$, то, в силу леммы 1, $|z(\chi)|<\lambda$, а тогда и его действительная часть $\xi(\chi)\in(-\lambda,\lambda)$. Обозначая через $a_k(\chi)$ коэффициенты ряда Тейлора функции $G(s,\chi)s^{-1}$ в точке $s=1$, с некоторым числом R, $0<R<1$, получим

$$S(x,\chi)=\frac{x}{(\ln x)^{1-z(\chi)}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k(\chi)}{\Gamma(k-z(\chi))\ln^k x}+O\left(\frac{\Gamma(n+3-\xi(\chi))x}{R^n(\ln x)^{n+1-\xi(\chi)}}\right).$$

Подставим величины $S(x,\chi)$ в формулу

$$S(x,r)=\frac{1}{\varphi(N)}\sum_{\chi}\bar{\chi}(r)S(x,\chi).$$

Из $\varphi(N)$ входящих в правую часть остатков выберем один с показателем λ. Так как $(\ln x)^{\xi(\chi)}=O((\ln x)^{\lambda})$, то, выделяя слагаемое с $\chi=\chi_0$, получим

$$S(x,r)=\frac{1}{\varphi(N)}\frac{x}{(\ln x)^{1-\lambda}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k(\chi_0)}{\Gamma(k-\lambda)\ln^k x}+$$
$$+\frac{1}{\varphi(N)}\sum_{chi\neq\chi_0}\bar{\chi}(r)\frac{x}{(\ln x)^{1-z(\chi)}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k(\chi)}{\Gamma(k-z(\chi))\ln^k x}+O\left(\frac{\Gamma(n+3-\lambda))x}{R^n(\ln x)^{n+1-\lambda}}\right).$$

Доказательство теоремы 2 завершено. □

4. Заключение

Приведенная в работе теорема 2 показывает, что производящие функции, с помощью которых выводятся асимптотические формулы для распределения значений функций в классах вычетов, обладают свойствами, позволяющими получать более точные асимптотические

формулы, чем при применении теоремы Деланжа. Например, в работе В. Наркевича [6] для функции Эйлера $\varphi(n)$ доказывается утверждение:

Если N взаимно просто с 6, то при $x \to \infty$ с некоторой постоянной C

$$S(x, r, \varphi) \sim \frac{Cx}{(\ln x)^{1-\lambda}},$$

где

$$\lambda = \prod_{q|N} \frac{q-2}{q-1}.$$

Этот результат может быть усилен при более детальном изучении соответствующей производящей функции. Пусть

$$z(\chi) = \big(-\chi(-1)\big)^{\omega(N)} \prod_{q|N} (q-1)^{-1},$$

где $\omega(n)$ — количество простых делителей n без учета кратности. Можно доказать, что

если $(N, 6) = 1$, то при $x \to \infty$ с некоторыми постоянными C и $C(\chi)$ справедливо следующее равенство

$$S(x, r, \varphi) = \frac{Cx}{\ln^{1-\lambda} x} + \sum_{\chi \neq \chi_0} \frac{C(\chi)x}{(\ln x)^{1-z(\chi)}} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{2-\lambda}}\right).$$

Это равенство дает лемма 3 при выборе $n = 1$. Но можно выбрать любое $n \geqslant 1$ и получить более точное равенство.

Такому же уточнению могут быть подвергнуты все асимптотические формулы, встречающиеся в работах [1, 2, 6, 8].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sathe L. G. On a congruence property of the divisor functions // Amer. J. Math. 1945. V. 67. P. 397–406.

2. Rankin R. A. The distribution of divisor functions // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1961. V. 5. No 1. P. 35–40.

3. Niven I. Uniform distribution of sequences of integers // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 98. P. 52–61.

4. Kuipers L., Niederreiter H. Uniform distribution of sequences. New-York: Wiley-Interscience, 1974. Русский перевод: Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1985.

5. Uchiyama S. On the uniform distribution of siquences of integer // Proc. Japan Acad. 1961. V. 37. P. 605–609.

6. Narkievicz W. On distribution of values of multiplicative functions in residue classes // Acta Arithm. 1967. V. 12. No 3. P. 269–279.

7. Śliva J. On distribution of values of $\sigma(n)$ in residue classes // Colloq. Math. 1973. V. 27. No 2. P. 283–271.

8. Фоменко О. М. Распределение значений мультипликативных функции по простому модулю // Записки науч. сем. ЛОМИ. 1980. Т. 93. С. 218–224.

9. Широков Б. М. Распределение значений арифметических функций в классах вычетов // Записки науч. сем. ЛОМИ. 1983. Т. 121. С. 176–186.

10. Широков Б. М. Распределение $d(n, \omega)$ в классах вычqетов // Труды ПетрГУ. Серия математика. 1995. Вып. 2. С. 136–144.

11. Широков Б. М. Распределение значений обобщенной суммы делителей // Труды ПетрГУ. Серия математика. 1996. Вып. 3. С. 176–189.

12. Delange H. Sur la distribution des entiers ayant certaines proprietes // Ann. Sci. Ecole norm. super. 1956. V. 73. No 1. P. 15–74.

13. Shirokov B. M., Gromakovskaya L. A. Distribution of values of the sum of unitary division in residue classes // Issues of Analysis. 2016. V. 5(23). No 1. P. 31–44.

14. Sandor J. Note on Jordan's arithmetical function // Octogon Math. Mag. 1993. V. 1. P. 1–4.

15. Shulte J. Uber die Jordansche Verallgemeinerung der Eulerschen Funktion // Resultate der Mathematik. 1999. V. 36. No. 3/4. P. 354–364.

16. Andrica D., Piticary M. On some extensions of Jordan arithmetic Functions // Acta. Univ. Apulensis Math. Inform. 2004. V. 7. P. 13–22.

17. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.

REFERENCES

1. Sathe, L. G. 1945, "On a congruence property of the divisor functions *Amer. J. Math.*, V. 67, pp. 397–406.

2. Rankin, R. A. 1961, "The distribution of divisor functions *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, V. 5, No 1, pp. 35–40.

3. Niven, I. 1961, "Uniform distribution of sequences of integers *Trans. Amer. Math. Soc.*, V. 98, pp. 52–61.

4. Kuipers, L., Niederreiter, H. 1974, *Uniform distribution of sequences.* Wiley-Interscience, New-York, 390 pp.

5. Uchiyama, S. 1961, "On the uniform distribution of siquences of integer *Proc. Japan Acad.*, V. 37, pp. 605–609.

6. Narkievicz, W. 1967, "On distribution of values of multiplicative functions in residue classes *Acta Arithm.*, V. 12, No 3, pp. 269–279.

7. Śliva, J. 1973, "On distribution of values of $\sigma(n)$ in residue classes *Colloq. Math.*, V. 27, No 2, pp. 283–271.

8. Fomenko, O. M. 1980, "Distribution of values of the multiplicative fubctions prime modulo" ["Raspredeleniye znacheny multiplikativnych funktsy po prostomu modulyu"], *Zapisky nauch. sem. LOMI*, V. 93, pp. 218–224.

9. Shirokov, B. M. 1983, "Distribution of values arithmetical functiones in residue classes" ["Raspredeleniye znacheny arifmeticheskich funktsy v klassach vychetov"], *Zapisky nauch. sem. LOMI*, V. 121, pp. 176–186.

10. Shirokov, B. M. 1995, "Distribution of $d(n,\omega)$ in residue classes" ["Raspredeleniye $d(n,\omega)$ v klassach vychetov"], *Tudy PetrSU. Ser. Math.*, Issue 2, pp. 136–144.

11. Shirokov, B. M. 1996, "Distribution of values of the extended sum of divisors" ["Raspredeleniye znacheny obobshonnoy summy deliteley"], *Tudy PetrSU. Ser. Mathematic.*, Issue 3, pp. 176–189.

12. Delange, H. 1956, "Sur la distribution des entiers ayant certaines proprietes" , *Ann. Sci. Ecole norm. super.*, V. 73, No 1, pp. 15–74.

13. Shirokov, B. M., Gromakovskaya, L. A. 2016, "Distribution of values of the sum of unitary division in residue classes" , *Issues of Analysis*, V. 5(23), No 1, pp. 31–44.

14. Sandor, J. 1993, "Note on Jordan's arithmetical function" , *Octogon Math. Mag.*, V. 1, pp. 1–4.

15. Shulte, J. 1999, "Uber die Jordansche Verallgemeinerung der Eulerschen Funktion" , *Resultate der Mathematik*, V. 36, No. 3/4, pp. 354–364.

16. Andrica, D., Piticary, M. 2004, "On some extensions of Jordan arithmetic Functions" , *Acta. Univ. Apulensis Math. Inform.*, V. 7, pp. 13–22.

17. Prachar, K., 1967, "Raspredelenie prostykh chisel." ,(russian) [Distribution of prime numbers] Translated from Deutsch by A. A. Karacuba. Edited by A. I. Vinogradov. With two supplements by M. B. Barban and A. I. Vinogradov, and N. M. Korobov *Izdat. "Mir", Moscow* 512 pp.

Получено 7.12.2017 г.
Принято в печать 12.07.2019 г.