ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 514 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-108-122

Расстояния Громова – Хаусдорфа до симплексов[1]

Д. С. Григорьев, А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Григорьев Д. С. — студент, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: d.grigoriev@yahoo.com

Иванов Александр Олегович — профессор, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; профессор, кафедра ФН-12, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (г. Москва).
e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Тужилин Алексей Августинович — профессор, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: tuz@mech.math.msu.su

Аннотация

В работе изучаются геометрические характеристики метрических пространств, участвующие в формулах расстояний Громова–Хаусдорфа от этих пространств до так называемых симплексов, т.е. метрических пространств, в которых все ненулевые расстояния равны между собой. При вычислении этих расстояний важную роль играет геометрия разбиений этих пространств, приводящая, в случае конечных пространств, к аналогу длин ребер минимального остовного дерева. Ранее была разработана аналогичная теория для компактных метрических пространств. Эти результаты обобщены на случай произвольного ограниченного пространства, упрощая при этом ряд доказательств, а также выписывая явные формулы

Ключевые слова: расстояние Громова–Хаусдорфа, метрическая геометрия, метрическое пространство.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Д. С. Григорьев, А. О. Иванов, А. А. Тужилин. Расстояния Громова – Хаусдорфа до симплексов // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 108–122.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 514 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-108-122

[1]Исследование выполнено при частичной поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ России (Проект НШ–6399.2018.1, Соглашение 075–02–2018–867), РФФИ, Проект 19-01-00775-а, а также Программы поддержки научных школ МГУ.

The Gromov – Hausdorff distances to simplexes[2]

D. S. Grigor'ev, A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin

Grigor'ev D. S. — student, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: d.grigoriev@yahoo.com
Ivanov Alexander Olegovich — professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; professor FN-12, Bauman Moscow State Technical University (Moscow).
e-mail: aoiva@mech.math.msu.su
Tuzhilin Alexey Augustinovich — professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: tuz@mech.math.msu.su

Abstract

In the paper geometrical characteristics of metric spaces appearing in explicit formulas for the Gromov–Hausdorff distance from this spaces to so-called simplexes, i.e., the metric spaces, all whose non-zero distances are the same. For the calculation of those distances the geometry of partitions of these spaces is important. In the case of finite metric spaces that leads to some analogues of the edges lengths of minimal spanning trees. Earlier, a similar theory was elaborated for compact metric spaces. These results are generalised to the case of an arbitrary bounded metric space, explicit formulas are obtained, and some proofs are simplified.

Keywords: Gromov–Hausdorff distance, metric geometry, metric space.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
D. S. Grigor'ev, A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, 2019, "The Gromov – Hausdorff distances to simplexes", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 108–122.

1. Введение

«Пространства пространств» и «пространства подмножеств» часто появляются в таких важных приложениях как сравнение и распознавание образов, а также имеют очевидную теоретическую значимость, поэтому привлекают внимание специалистов на протяжении многих лет. Один из естественных подходов к изучению таких пространств — определить на них функцию расстояния как «меру несхожести» соответствующих объектов. В 1914 году Ф. Хаусдорф [1] ввел в рассмотрение неотрицательную симметричную функцию на парах непустых подмножеств метрического пространства X, равную точной нижней грани таких чисел r, что каждое из этих множеств содержится в r-окрестности оставшегося. Эта функция превращает семейство замкнутых ограниченных подмножеств X в метрическое пространство. Позднее, см. исторический обзор в [2], Д. Эдвардс [3] и, независимо, М. Громов [4] обобщили конструкцию Хаусдорфа на семейство всех компактных метрических пространств, используя их изометрические вложения во всевозможные объемлющие пространства, см. определение ниже. Полученная функция называется расстоянием по Громову–Хаусдорфу, а соответствующее метрическое пространство $\mathcal{M}$ метрических компактов, рассматриваемых с точностью до изометрии, — пространством Громова–Хаусдорфа или гиперпространством. Геометрия этого пространства оказалась довольно причудливой и активно изучается в последнее время.

[2]The study was performed under the partial support of the Program of President of Russian Federation for support of leading scientific schools of Russia (Project NSH–6399.2018.1, the Agreement 075–02–2018–867), RFBR, research Project 19-01-00775-a, and the program of support of scientific schools of Moscow state University.

Хорошо известно, что $\mathcal{M}$ — линейно связное, полное, сепарабельное пространство, а также, что $\mathcal{M}$ не является ограниченно компактным. Подробное введение в геометрию пространства Громова–Хаусдорфа можно найти в [5, гл. 7] или в [6].

Задача вычисления расстояния по Громову–Хаусдорфу между двумя конкретными пространствами весьма нетривиальна. Даже в случае конечных пространств эффективный алгоритм не известен, а прямой перебор, основанный на технике соответствий, см. ниже, является экспоненциальным и не работает уже для пространств, состоящих из десятков точек. Однако, техника соответствий, активно развивающаяся в последнее время, см. например [7], [8], [12] [14] или [9], позволяет и здесь получить некоторые продвижения.

В данной работе изучается задача вычисления расстояний Громова–Хаусдорфа от произвольных ограниченных метрических пространств до так называемых симплексов — метрических пространств, в которых все ненулевые расстояния одинаковы. Знание таких расстояний между конечными метрическими пространствами и конечными симплексами позволило, например, получить новую интерпретацию длин ребер минимального остовного дерева [10]. Также симплексы и расстояния до них играют важную роль в изучении группы симметрий пространства $\mathcal{M}$, см. [8]. В работе [11], в ряде частных случаев, были вычислены расстояния от конечных симплексов до компактных метрических пространств. В частности, полученные результаты позволили привести пример двух неизометричных конечных пространств, от которых расстояния до всех конечных симплексов одинаковы.

В настоящей работе мы не ограничиваемся ни конечными симплексами, ни компактными пространствами. Мы определяем ряд дополнительных характеристик ограниченных метрических пространств, в терминах которых мы или приводим точные формулы для расстояния Громова–Хаусдорфа до произвольных симплексов, или даем точные верхние и нижние оценки этих расстояний.

2. Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — произвольное множество. Через $\#X$ будем обозначать *мощность* множества X.

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$. Если $A, B \subset X$ — непустые подмножества, то положим $|AB| = \inf\bigl\{|ab| : a \in A,\, b \in B\bigr\}$. Если $A = \{a\}$, то вместо $|\{a\}B| = |B\{a\}|$ будем писать $|aB| = |Ba|$.

Для каждой точки $x \in X$ и числа $r > 0$ через $U_r(x)$ будем обозначать открытый шар с центром в точке x и радиусом r; для каждого непустого $A \subset X$ и числа $r > 0$ положим $U_r(A) = \cup_{a\in A} U_r(a)$.

2.1. Расстояния Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа

Для непустых A, $B \subset X$ положим

$$d_H(A,B) = \inf\bigl\{r > 0 : A \subset U_r(B) \text{ и } B \subset U_r(A)\bigr\} = \max\{\sup_{a\in A} |aB|,\ \sup_{b\in B} |Ab|\}.$$

Полученная величина называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B*. Хорошо известно [5], [6], что расстояние Хаусдорфа, рассматриваемое на множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств из X, является метрикой.

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием $d_{GH}(X, Y)$ по Громову–Хаусдорфу между X и Y* назовем точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары

(X,Y) такая, что $d_H(X',Y')\leqslant r$. Хорошо известно [5], [6], что на множестве $\mathcal{M}$ всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, функция d_{GH} является метрикой.

Для вычисления расстояния Громова–Хаусдорфа удобно воспользоваться техникой соответствий.

Пусть X и Y — произвольные непустые множества. Напомним, что *отношением* между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X\times Y$. Множество всех **непустых** отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}(X,Y)$. Будем смотреть на каждое отношение $\sigma\in\mathcal{P}(X,Y)$ как на многозначное отображение, которое может иметь область определения меньшую, чем X. Тогда, по аналогии с тем, как это принято для отображений, для каждого $x\in X$ и каждого $A\subset X$ определены их образы

$$\sigma(x)=\bigl\{y\in Y:(x,y)\in\sigma\bigr\}\qquad\text{и}\qquad\sigma(A)=\bigcup_{a\in A}\sigma(a),$$

а для каждого $y\in Y$ и каждого $B\subset Y$ — их прообразы

$$\sigma^{-1}(y)=\bigl\{x\in X:(x,y)\in R\bigr\}\qquad\text{и}\qquad\sigma^{-1}(B)=\bigcup_{b\in B}\sigma^{-1}(b).$$

Отношение $R\in\mathcal{P}(X,Y)$ называется *соответствием*, если $R(X)=Y$ и $R^{-1}(Y)=X$. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X,Y)$.

Пусть X и Y — произвольные метрические пространства. *Искажением* $\operatorname{dis}\sigma$ *отношения* $\sigma\in\mathcal{P}(X,Y)$ назовем число

$$\operatorname{dis}\sigma=\sup\Bigl\{\bigl||xx'|-|yy'|\bigr|:(x,y),(x',y')\in\sigma\Bigr\}.$$

Легко видеть, что для любых отношений $\sigma_1,\sigma_2\in\mathcal{P}(X,Y)$ таких, что $\sigma_1\subset\sigma_2$, выполняется $\operatorname{dis}\sigma_1\leqslant\operatorname{dis}\sigma_2$. Иными словами, отображение $\operatorname{dis}\colon\mathcal{P}(X,Y)\to\mathbb{R}$ монотонно, если на $\mathcal{P}(X,Y)$ рассматривается частичный порядок, заданный включением.

Предложение 1 ([5], [6]). *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X,Y)=\frac12\inf\bigl\{\operatorname{dis}R:R\in\mathcal{R}(X,Y)\bigr\}.$$

Минимальные по включению соответствия из $\mathcal{R}(X,Y)$ назовем *неприводимыми*. Множество всех неприводимых соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}^0(X,Y)$.

Отметим (см. [13]), что каждое неприводимое соответствие $R\in\mathcal{R}^0(X,Y)$ задает разбиения D_X^R и D_Y^R пространств X и Y, а также биекцию $f_R\colon D_X^R\to D_Y^R$, для которой

$$R=\bigcup_{X_i\in D_X^R}X_i\times f_R(X_i).\tag{1}$$

При этом, если $\#X_i>1$, то $\#f_R(X_i)=1$, и если $\#f_R(X_i)>1$, то $\#X_i=1$. Более того, каждая биекция f между произвольными разбиениями D_X и D_Y пространств X и Y, удовлетворяющая описанным только что свойствам, порождает неприводимое соответствие по формуле (1).

Предложение 2 ([13]). *Для каждого $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ существует неприводимое соответствие R_0 такое, что $R_0\subset R$. В частности, $\mathcal{R}^0(X,Y)\ne\emptyset$.*

Учитывая монотонности искажения dis, мгновенно получаем следующий результат.

Следствие 1. *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}\inf\bigl\{\operatorname{dis}R: R\in\mathcal{R}^0(X,Y)\bigr\}.$$

С помощью соответствий легко доказываются следующие хорошо известные факты. Для произвольного метрического пространства X и числа $\lambda>0$ через λX обозначим метрическое пространство, которое отличается от X умножением всех расстояний на λ.

Предложение 3 ([5], [6]). *Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда*

(i) если X — одноточечное метрическое пространство, то $d_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}\operatorname{diam}Y$;

(ii) если $\operatorname{diam}X<\infty$, то

$$d_{GH}(X,Y)\geqslant\frac{1}{2}|\operatorname{diam}X-\operatorname{diam}Y|;$$

(iii) $d_{GH}(X,Y)\leqslant\frac{1}{2}\max\{\operatorname{diam}X,\operatorname{diam}Y\}$, в частности, для ограниченных X и Y имеем $d_{GH}(X,Y)<\infty$;

(iv) для любых $X,Y\in\mathcal{M}$ и любого $\lambda>0$ имеем $d_{GH}(\lambda X,\lambda Y)=\lambda d_{GH}(X,Y)$. Более того, при $\lambda\neq1$ единственным пространством, которое при такой операции не меняется, является одноточечное пространство. Иными словами, операция умножения метрики на число $\lambda>0$ является гомотетией пространства $\mathcal{M}$ с центром в одноточечном метрическом пространстве.

2.2. Несколько элементарных соотношений

Для конкретных вычислений расстояний Громова–Хаусдорфа нам будут полезны следующие несложные соотношения, доказательства которых приведены в [11].

Предложение 4. *Для любых неотрицательных a и b выполнено неравенство*

$$\max\bigl\{a,|b-a|\bigr\}\leqslant\max\{a,b\}.$$

Предложение 5. *Пусть $A\subset\mathbb{R}$ — непустое ограниченное подмножество вещественной прямой, и пусть $\lambda\in\mathbb{R}$. Тогда*

$$\sup_{a\in A}|\lambda-a|=\max\{\lambda-\inf A,\sup A-\lambda\}=\Bigl|\lambda-\frac{\inf A+\sup A}{2}\Bigr|+\frac{\sup A-\inf A}{2}.$$

Предложение 6. *Пусть $A\subset\mathbb{R}$ — непустое ограниченное подмножество вещественной прямой, $\inf A\geqslant0$, и пусть $\lambda\in\mathbb{R}$. Тогда*

$$\sup_{a\in A}\bigl\{\lambda,|\lambda-a|\bigr\}=\max\{\lambda,\sup A-\lambda\}.$$

Следствие 2. *Для любого $a\geqslant0$ и любого λ выполняется*

$$\max\bigl\{\lambda,|a-\lambda|\bigr\}=\max\{\lambda,a-\lambda\}.$$

3. Расстояние между ограниченным метрическим пространством и симплексом

Метрическое пространство X назовем *симплексом*, если все его ненулевые расстояния одинаковы. Симплекс, в котором ненулевые расстояния равны $\lambda>0$, обозначим через $\lambda\Delta$. При $\lambda=1$ пространство $\lambda\Delta$ будем для краткости обозначать через Δ.

3.1. Расстояние до симплексов с большим числом точек

Следующий результат обобщает теорему 4.1 из [11].

Теорема 1. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $\#X < \#\lambda\Delta$, тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{\lambda, \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Доказательство. Если $\#X = 1$, то $\operatorname{diam} X = 0$ и, по предложению 3,

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \operatorname{diam}\lambda\Delta = \lambda = \max\{\lambda, \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Пусть теперь $\#X > 1$. Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}(\lambda\Delta, X)$. Так как $\#X < \#\lambda\Delta$, то существует $x \in X$ такое, что $\#R^{-1}(x) \geqslant 2$, поэтому $\operatorname{dis} R \geqslant \lambda$ и, значит, $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \geqslant \lambda$.

Рассмотрим произвольную последовательность $(x_i, y_i) \in X \times X$ такую, что $|x_i y_i| \to \operatorname{diam} X$. Если в ней существует подпоследовательность (x_{i_k}, y_{i_k}), для которой при каждом i_k можно найти такое $z \in \lambda\Delta$, что $(z, x_{i_k}), (z, y_{i_k}) \in R$, то $\operatorname{dis} R \geqslant \operatorname{diam} X$ и, значит,

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \geqslant \max\{\lambda, \operatorname{diam} X\}.$$

Если такой подпоследовательности нет, то существует подпоследовательность (x_{i_k}, y_{i_k}), для которой при каждом i_k можно найти различные $z_k, w_k \in \lambda\Delta$ такие, что $(z_k, x_{i_k}), (w_k, y_{i_k}) \in R$, и тогда $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \geqslant \max\bigl\{\lambda, |\operatorname{diam} X - \lambda|\bigr\}$.

По предложению 4,

$$\max\{\lambda, \operatorname{diam} X\} \geqslant \max\bigl\{\lambda, |\operatorname{diam} X - \lambda|\bigr\},$$

поэтому в любом случае $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \geqslant \max\bigl\{\lambda, |\operatorname{diam} X - \lambda|\bigr\}$.

Выберем произвольное $x_0 \in X$, тогда, в силу предположения, $\#X > 1$ и, значит, множество $X \setminus \{x_0\}$ непусто. Так как $\#X < \#\lambda\Delta$, то в $\lambda\Delta$ существует подмножество $\lambda\Delta'$, равномощное $X \setminus \{x_0\}$. Пусть $g \colon \lambda\Delta' \to X \setminus \{x_0\}$ — произвольная биекция, и $\lambda\Delta'' = \lambda\Delta \setminus \lambda\Delta'$, тогда $\lambda\Delta'' \neq \emptyset$. Рассмотрим соответствие

$$R_0 = \Bigl\{\bigl(z', g(z')\bigr) : z' \in \lambda\Delta'\Bigr\} \cup \bigl(\{x_0\} \times \lambda\Delta''\bigr).$$

Тогда $\operatorname{dis} R_0 \leqslant \max\bigl\{\lambda, |\operatorname{diam} X - \lambda|\bigr\}$, откуда

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\bigl\{\lambda, |\operatorname{diam} X - \lambda|\bigr\}.$$

Осталось применить следствие 2.

3.2. Расстояние от ограниченного метрического пространства до симплексов с не превосходящим числом точек

Пусть X — произвольное множество и m — кардинальное число, не превосходящее $\#X$. Через $\mathcal{D}_m(X)$ обозначим семейство всевозможных разбиений множества X на m непустых подмножеств.

Пусть теперь X — метрическое пространство. Тогда для каждого $D = \{X_i\}_{i \in I} \in \mathcal{D}_m(X)$ положим

$$\operatorname{diam} D = \sup_{i \in I} \operatorname{diam} X_i.$$

Далее, для любых непустых $A, B \subset X$ пусть

$$|AB| = \inf\bigl\{|ab| : (a, b) \in A \times B\bigr\} \quad \text{и} \quad |AB|' = \sup\bigl\{|ab| : (a, b) \in A \times B\bigr\},$$

и для каждого $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$ определим

$$\alpha(D) = \inf\bigl\{|X_iX_j| : i \ne j\bigr\} \qquad \text{и} \qquad \beta(D) = \sup\bigl\{|X_iX_j|' : i \ne j\bigr\}.$$

Пусть теперь $\lambda\Delta$ — симплекс мощности m. Выберем произвольное $D \in \mathcal{D}_m(X)$, любую биекцию $g\colon \lambda\Delta \to D$ и зададим соответствие $R_D \in \mathcal{R}(\lambda\Delta, X)$ следующим образом:

$$R_D = \bigcup_{z\in\lambda\Delta} \{z\} \times g(z).$$

Ясно, что каждое соответствие R_D — неприводимое.

Следующий результат непосредственно обобщает предложение 4.5 из [11].

Предложение 7. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $m = \#\lambda\Delta \leqslant \#X$. Тогда для любого $D \in \mathcal{D}_m(X)$ имеем*

$$\operatorname{dis} R_D = \max\{\operatorname{diam} D,\ \lambda - \alpha(D),\ \beta(D) - \lambda\}.$$

Следствие 3. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $m = \#\lambda\Delta \leqslant \#X$. Тогда для любого $D \in \mathcal{D}_m(X)$ имеем*

$$\operatorname{dis} R_D = \max\{\operatorname{diam} D,\ \lambda - \alpha(D),\ \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Доказательство. Отметим, что $\operatorname{diam} D \leqslant \operatorname{diam} X$ и $\beta(D) \leqslant \operatorname{diam} X$. При этом, если $\operatorname{diam} D < \operatorname{diam} X$, и $(x_i, y_i) \in X \times X$ — последовательность, для которой $|x_iy_i| \to \operatorname{diam} X$, то, начиная с некоторого номера i, точки x_i и y_i лежат в разных элементах разбиения D, следовательно, в этом случае $\beta(D) = \operatorname{diam} X$, и формула доказана.

Пусть теперь $\operatorname{diam} D = \operatorname{diam} X$, тогда $\beta(D) - \lambda \leqslant \operatorname{diam} X$ и $\operatorname{diam} X - \lambda \leqslant \operatorname{diam} X$, поэтому

$$\begin{aligned}\max\{\operatorname{diam} D,\ \lambda - \alpha(D),\ \beta(D) - \lambda\} &= \max\{\operatorname{diam} X,\ \lambda - \alpha(D)\} = \\ &= \max\{\operatorname{diam} D,\ \lambda - \alpha(D),\ \operatorname{diam} X - \lambda\}.\end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Докажем теперь аналог предложения 4.6 из [11], не используя теорему 4.3 оттуда же.

Предложение 8. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $m = \#\lambda\Delta \leqslant \#X$. Тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \operatorname{dis} R_D.$$

Доказательство. По следствию 1, $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \inf_{R\in\mathcal{R}^0(\lambda\Delta,X)} \operatorname{dis} R$, поэтому достаточно показать, что для любого неприводимого соответствия $R \in \mathcal{R}^0(\lambda\Delta, X)$ существует такое $D \in \mathcal{D}_m(X)$, что $\operatorname{dis} R_D \leqslant \operatorname{dis} R$.

Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}^0(\lambda\Delta, X)$, не представимое в виде R_D, тогда разбиение $D^R_{\lambda\Delta}$ не точечное, т.е. существует $x \in X$, для которого $\#R^{-1}(x) \geqslant 2$, поэтому $\operatorname{dis} R \geqslant \lambda$.

Зададим на множестве $D^R_{\lambda\Delta}$ метрику, положив расстояние между различными элементами равным λ, тогда это множество представляет собой некоторый симплекс $\lambda\Delta'$. Соответствие R порождает естественным образом соответствие $R' \in \mathcal{R}(\lambda\Delta', X)$: если $D^R_{\lambda\Delta} = \{\Delta_i\}_{i\in I}$ и $f_R\colon D^R_{\lambda\Delta} \to D^R_X$ — биекция, порожденная R, то

$$R' = \bigcup_{i\in I} \{\Delta_i\} \times f_R(\Delta_i).$$

Легко видеть, что $\operatorname{dis} R = \max\{\lambda, \operatorname{dis} R'\}$. Кроме того, R' порождается разбиением $D' := D_X^R$, т.е. $R' = R_{D'}$, поэтому, в силу следствию 3, имеем

$$\operatorname{dis} R' = \max\{\operatorname{diam} D',\, \lambda - \alpha(D'),\, \operatorname{diam} X - \lambda\},$$

откуда

$$\operatorname{dis} R = \max\{\lambda, \operatorname{diam} D',\, \lambda - \alpha(D'),\, \operatorname{diam} X - \lambda\} = \max\{\lambda,\, \operatorname{diam} D',\, \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Так как $\#D' \leqslant m$, у разбиения D' существует подразбиение $D \in \mathcal{D}_m(X)$. Ясно, что $\operatorname{diam} D \leqslant \operatorname{diam} D'$, поэтому

$$\operatorname{dis} R_D = \max\{\operatorname{diam} D,\, \lambda - \alpha(D),\, \operatorname{diam} X - \lambda\} \leqslant \max\{\operatorname{diam} D',\, \lambda,\, \operatorname{diam} X - \lambda\} = \operatorname{dis} R,$$

что и требовалось.

Следствие 4. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $m = \#\lambda\Delta \leqslant \#X$. Тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \inf_{D \in \mathcal{D}_m(X)} \max\{\operatorname{diam} D,\, \lambda - \alpha(D),\, \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Для произвольного метрического пространства X положим

$$\mathrm{E}(X) = \inf\bigl\{|xy| : x, y \in X,\, x \neq y\bigr\}.$$

Отметим, что $\mathrm{E}(X) \leqslant \operatorname{diam} X$, причем для ограниченного X равенство достигается, если и только если X является симплексом.

Из следствия 4 мгновенно вытекает следующая теорема, доказанная в [11].

Теорема 2 ([11]). *Пусть X — конечное метрическое пространство и $\#\lambda\Delta = \#X$, тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\bigl\{\lambda - E(X),\, \operatorname{diam} X - \lambda\bigr\}.$$

Приведем ряд новых результатов.

Для произвольного метрического пространства X, $m \leqslant \#X$, положим

$$\alpha_m^-(X) = \inf_{D \in \mathcal{D}_m(X)} \alpha(D), \qquad \alpha_m(X) = \alpha_m^+(X) = \sup_{D \in \mathcal{D}_m(X)} \alpha(D),$$
$$d_m(X) = d_m^-(X) = \inf_{D \in \mathcal{D}_m(X)} \operatorname{diam} D, \qquad d_m^+(X) = \sup_{D \in \mathcal{D}_m(X)} \operatorname{diam} D.$$

Remark 1. *Мы ввели упрощенные переобозначения для $\alpha_m^+(X)$ и $d_m^-(X)$ потому, что эти величины, в отличии от их «близнецов» $\alpha_m^-(X)$ и $d_m^+(X)$, встречаются в приводимых ниже формулах намного чаще.*

Отметим, что $\alpha_m(X) = 0$ тогда и только тогда, когда для любого $D \in \mathcal{D}_m(X)$ выполняется $\alpha(D) = 0$.

Пример 1. *Пусть X — бесконечное компактное метрическое пространство, а m — любой бесконечный кардинал, $m \leqslant \#X$. Тогда $\alpha_m(X) = 0$.*

Действительно, выберем произвольное $D = \{X_i\}_{i \in I} \in \mathcal{D}_m(X)$, а в каждом X_i — по одной точке $x_i \in X_i$. Тогда, в силу компактности X, множество $\{x_i\}_{i \in I}$ содержит сходящуюся последовательность $\{x_{i_k}\}$, состоящую из попарно различных точек. Но тогда $|X_{i_k} X_{i_{k+1}}| \to 0$ при $k \to \infty$, поэтому $\alpha(D) = 0$.

Пример 2. *Пусть X — ограниченное бесконечное метрическое пространство, представленное в виде дизъюнктного объединение n бесконечных компактов, и m — бесконечное кардинальное число, $n < m \leqslant \#X$, тогда $\alpha_m(X) = 0$.*

Действительно, пусть $\{Z_j\}_{j\in J}$, $\#J = n$, — разбиение пространства X на n компактов Z_j. Выберем произвольное $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$. Так как $n < m$, то для некоторого $j \in J$ семейство всех непустых пересечений $X_i \cap Z_j$ образует бесконечное разбиение компакта Z_j. Осталось воспользоваться рассуждениями примера 1.

Пример 3. *Пусть X — связное ограниченное метрическое пространство, а $m \geqslant 2$ — любой кардинал, $m \leqslant \#X$. Тогда $\alpha_m(X) = 0$.*

Действительно, выберем произвольное $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$, в нем — произвольное X_i, и положим $X_i' = \cup_{i\neq j\in I} X_j$, тогда $D' = \{X_i, X_i'\} \in \mathcal{D}_2(X)$. Так как пространство X — связное, то $|X_i X_i'| = 0$, поэтому можно выбрать последовательность X_{j_k}, $j_k \neq i$, для которой $|X_i X_{j_k}| \to 0$ при $k \to \infty$, откуда $\alpha(D) = 0$.

Аналогично разбирается следующий пример.

Пример 4. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, состоящее из n связных компонент, и m — кардинальное число, $n < m \leqslant \#X$, тогда $\alpha_m(X) = 0$.*

Из следствия 4 вытекает следующий результат.

Теорема 3. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $m = \#\lambda\Delta \leqslant \#X$, и $\alpha_m(X) = 0$, тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\bigl\{d_m(X),\, \lambda,\, \operatorname{diam} X - \lambda\bigr\}.$$

Рассмотрим график зависимости величины $2d_{GH}(\lambda\Delta, X)$ из теоремы 3 от λ, см. рис. 1.

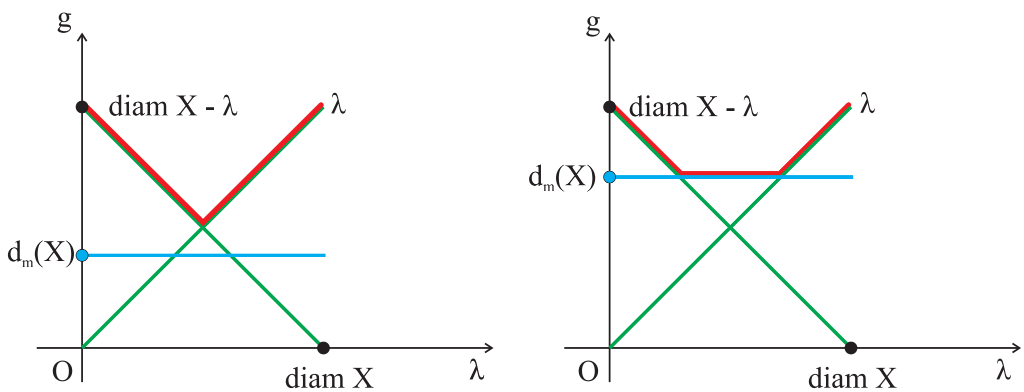

Рис. 1: График функции $g(\lambda) = 2d_{GH}(\lambda\Delta, X)$ при $\alpha_m(X) = 0$ и разных значениях $d_m(X)$.

Из графика, приведенного на рис. 1, непосредственно получается следующий результат.

Следствие 5. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $m = \#\lambda\Delta \leqslant \#X$, причем $\alpha_m(X) = 0$, тогда*

(i) если $d_m(X) \leqslant \frac12 \operatorname{diam} X$, то

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \begin{cases} \operatorname{diam} X - \lambda & \text{при}\ \ \lambda \leqslant \frac12 \operatorname{diam} X, \\ \lambda & \text{при}\ \ \lambda \geqslant \frac12 \operatorname{diam} X; \end{cases}$$

(ii) если $d_m(X) > \frac{1}{2}\operatorname{diam} X$, *то*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \begin{cases} \operatorname{diam} X - \lambda & \text{при } \lambda \leqslant \operatorname{diam} X - d_m(X), \\ d_m(X) & \text{при } \operatorname{diam} X - d_m(X) \leqslant \lambda \leqslant d_m(X), \\ \lambda & \text{при } \lambda \geqslant d_m(X). \end{cases}$$

Еще один частный случай получается, если $d_m(X) = \operatorname{diam} X$, что случается в точно тогда, когда $\operatorname{diam} D = \operatorname{diam} X$ для всех $D \in \mathcal{D}_m(X)$.

Пример 5. *Для каждого симплекса* $X = \lambda\Delta$, *кардинального числа* $0 < m < \#\lambda\Delta$ *и любого* $D \in \mathcal{D}_m(X)$ *имеем* $\operatorname{diam} D = \lambda = \operatorname{diam} X$, *поэтому* $d_m(X) = \operatorname{diam} X$.

Пример 6. *Пусть* $X = S^1$ — *стандартная единичная окружность на евклидовой плоскости, и* $m = 2$. *Тогда* $d_m(X) = \operatorname{diam} X = 2$.

Действительно, предположим противное, т.е. существует $D = \{X_1, X_2\} \in \mathcal{D}_m(X)$ *такое, что* $\operatorname{diam} D < 2$. *Для* $x \in X$ *через* x' *обозначим диаметрально противоположную* x *точку окружности* X. *Из сделанного предположения вытекает, что для каждого* $x \in X_1$ *точка* x' *лежит в* X_2 *вместе с некоторое ее открытой окрестностью, поэтому* X_2 — *открытое множество. Аналогично,* X_1 — *открытое множество и, значит, окружность разбилась на два непустых открытых множества, что противоречит связности.*

Следствие 6. *Пусть* X — *произвольное ограниченное метрическое пространство,* $m = \#\lambda\Delta \leqslant \#X$, *причем* $d_m(X) = \operatorname{diam} X$, *тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\bigl\{\operatorname{diam} X,\, \lambda - \alpha_m(X)\bigr\}.$$

В частности,

(i) при $\lambda \leqslant \operatorname{diam} X + \alpha_m(X)$ *имеем* $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \operatorname{diam} X$;

(ii) при $\lambda \geqslant \operatorname{diam} X + \alpha_m(X)$ *выполняется* $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \lambda - \alpha_m(X)$.

Рассмотрим теперь общий случай. Оказывается, и здесь тоже удается получить некоторые явные формулы, но уже не для всех λ. Пусть A — точка пересечения графиков функций $\operatorname{diam} X - \lambda$, $\lambda \in [0, \operatorname{diam} X]$, и $\lambda - \alpha_m^-(X)$, $\lambda \geqslant \alpha_m^-(X)$. Рассмотрим различные варианты взаимного расположения точки A и горизонтальной полосы S между $d_m(X)$ и $d_m^+(X)$.

(1) Точка A лежит ниже полосы S. Соответствующая иллюстрация приведена на рис. 2.

Вертикальные пунктирные линии делят рисунок на три части: левую, среднюю и правую. В левой и правой частях жирная линии дает точное значения функции g. В средней части жирная линия ограничивает ромб: именно в нем лежат все точки $\bigl(\alpha(D), \operatorname{diam} D\bigr)$, поэтому «верхняя и левая части» границы ромба дает верхнюю оценку на функцию g, а «нижняя и правая части» — нижнюю оценку.

Вычисляя координаты точек пересечения графиков, получаем следующий результат.

Следствие 7. *Пусть* X — *произвольное ограниченное метрическое пространство,* $m = \#\lambda\Delta \leqslant \#X$. *Предположим, что* $\operatorname{diam} X - \alpha_m^-(X) \leqslant 2d_m(X)$, *тогда*

- *если* $\lambda \leqslant \alpha_m^-(X) + d_m(X)$, *то*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\bigl\{\operatorname{diam} X - \lambda, d_m(X)\bigr\};$$

- *если* $\alpha_m^-(X) + d_m(X) \leqslant \lambda \leqslant \alpha_m(X) + d_m^+(X)$, *то*

$$\max\bigl\{\lambda - \alpha_m(X), d_m(X)\bigr\} \leqslant 2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \leqslant \min\bigl\{\lambda - \alpha_m^-(X), d_m^+(X)\bigr\};$$

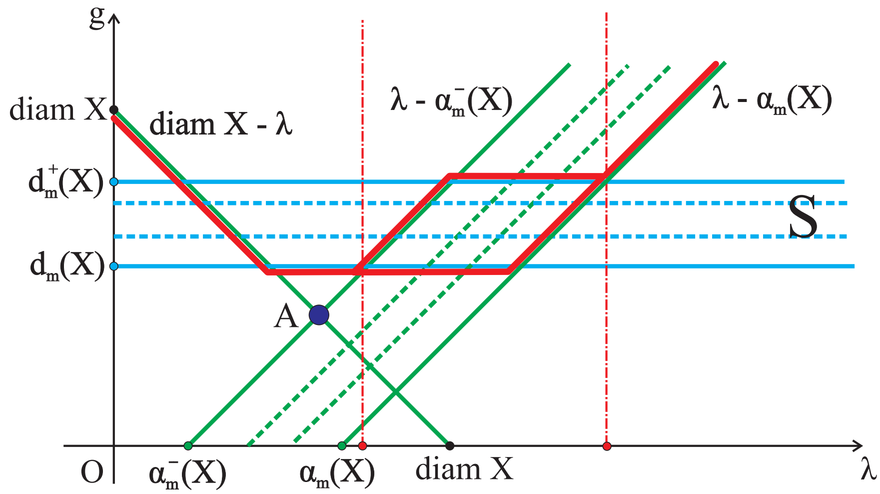

Рис. 2: График функции $g(\lambda) = 2d_{GH}(\lambda\Delta, X)$, точка A лежит ниже полосы S.

- *если* $\lambda \geqslant \alpha_m(X) + d_m^+(X)$, *то*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \lambda - \alpha_m(X).$$

(2) Точка A **лежит в полосе** S**.** Соответствующая иллюстрация приведена на рис. 3.

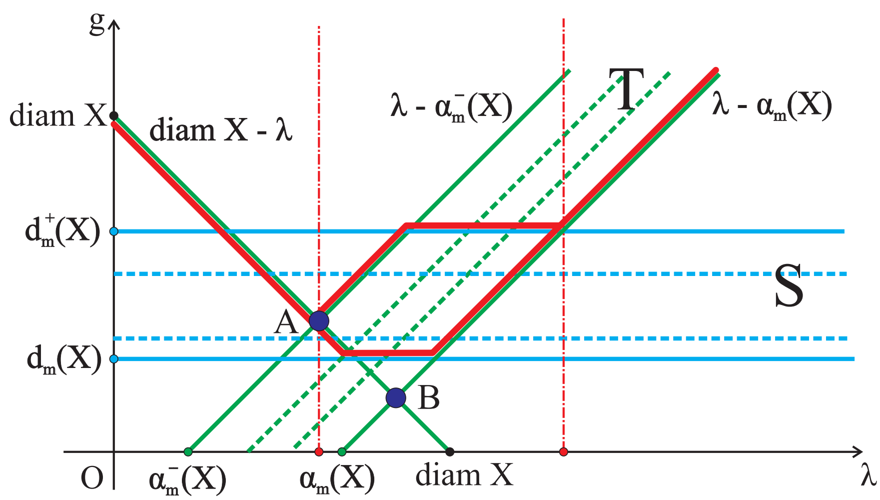

Рис. 3: График функции $g(\lambda) = 2d_{GH}(\lambda\Delta, X)$, точка A лежит в полосе S.

Пусть B — точка пересечения графиков функций $\operatorname{diam} X - \lambda$ и $\lambda - \alpha_m(X)$. Снова вертикальные пунктирные линии делят рисунок на три части, и снова в крайних частях вычисляется точное значения функции g. В средней части жирная линия ограничивает пятиугольник, который вырождается в четырехугольник, если точка B тоже попадает в полосу S: хотя все точки $\big(\alpha(D), \operatorname{diam} D\big)$ лежат в ромбе, полученном пересечением полосы S и наклонной полосы T между графиками функций $\lambda - \alpha_m^-(X)$ и $\lambda - \alpha_m(X)$, значение функции g не может опуститься ниже графика функции $\operatorname{diam} X - \lambda$, который и отрезает от ромба соответствующую фигуру (треугольник в случае, когда B не попадает внутрь полосы S, и четырехугольник в противном случае). Вычисляя координаты точек пересечения графиков, получаем следующий результат.

Следствие 8. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $m = \#\lambda\Delta \leqslant \#X$. Предположим, что $2d_m(X) \leqslant \operatorname{diam} X - \alpha_m^-(X) \leqslant 2d_m^+(X)$, тогда*

- *если $\lambda \leqslant \frac{1}{2}\bigl(\alpha_m^-(X) + \operatorname{diam}(X)\bigr)$, то*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \operatorname{diam} X - \lambda;$$

- *если $\frac{1}{2}\bigl(\alpha_m^-(X) + \operatorname{diam}(X)\bigr) \leqslant \lambda \leqslant \alpha_m(X) + d_m^+(X)$, то*

$$\max\bigl\{\operatorname{diam} X - \lambda, \lambda - \alpha_m(X), d_m(X)\bigr\} \leqslant 2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \leqslant \min\bigl\{\lambda - \alpha_m^-(X), d_m^+(X)\bigr\};$$

- *если $\lambda \geqslant \alpha_m(X) + d_m^+(X)$, то*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \lambda - \alpha_m(X).$$

(3) Точка A лежит выше полосы S. Этот случай разбивается на два подслучая, в зависимости от положения точки B.

(3.1) Верхняя граница полосы S лежит между точками A и B. Соответствующая иллюстрация приведена на рис. 4.

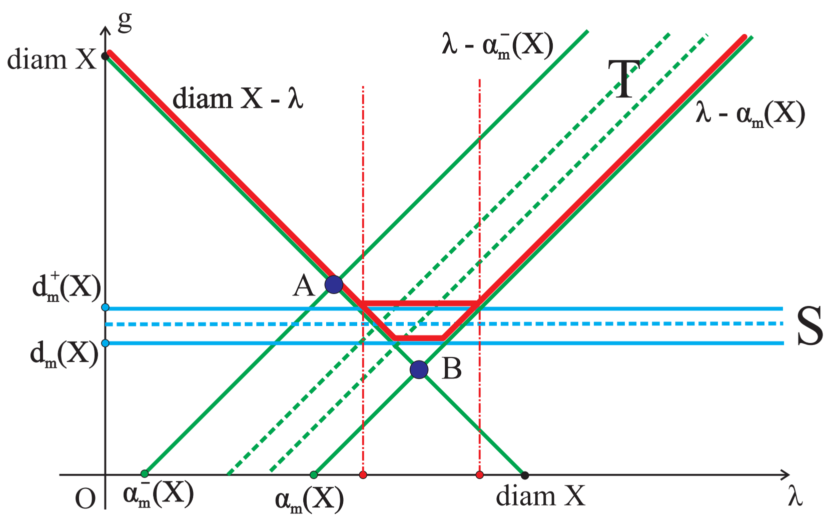

Рис. 4: График функции $g(\lambda) = 2d_{GH}(\lambda\Delta, X)$, верхняя граница полосы S лежит между точками A и B.

На сей раз «область неопределенности» в средней части рисунка представляет собой трапецию, если B лежит строго ниже полосы S, и эта трапеция вырождается в треугольник, когда B оказывается в полосе. Вычисляя координаты точек пересечения графиков, получаем следующий результат.

Следствие 9. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $m = \#\lambda\Delta \leqslant \#X$. Предположим, что $\operatorname{diam} X - \alpha_m(X) \leqslant 2d_m^+(X) \leqslant \operatorname{diam} X - \alpha_m^-(X)$, тогда*

- *если $\lambda \leqslant \operatorname{diam}(X) - d_m^+(X)$, то*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \operatorname{diam} X - \lambda;$$

- *если* $\operatorname{diam}(X) - d_m^+(X) \leqslant \lambda \leqslant \alpha_m(X) + d_m^+(X)$, *то*

$$\max\bigl\{\operatorname{diam} X - \lambda, \lambda - \alpha_m(X), d_m(X)\bigr\} \leqslant 2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \leqslant d_m^+(X);$$

- *если* $\lambda \geqslant \alpha_m(X) + d_m^+(X)$, *то*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \lambda - \alpha_m(X).$$

(3.2) Точка B лежит выше полосы S. Соответствующая иллюстрация приведена на рис. 5.

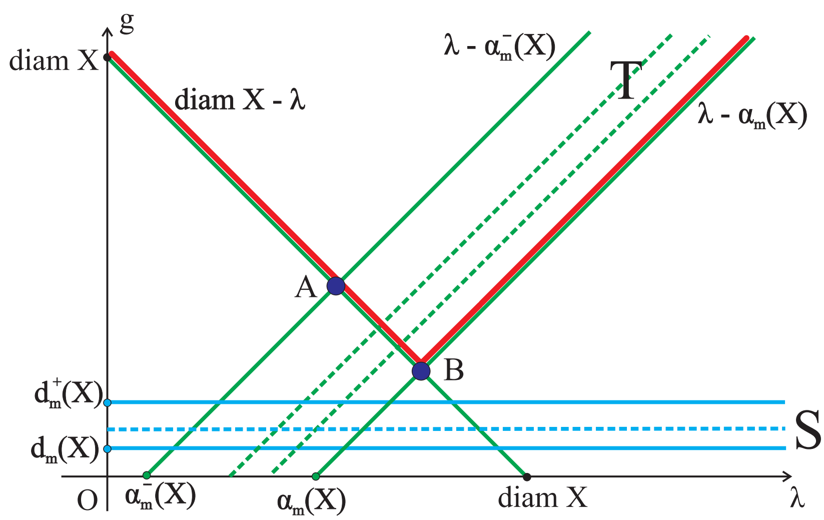

Рис. 5: График функции $g(\lambda) = 2d_{GH}(\lambda\Delta, X)$, точка B лежит выше полосы S.

На этот раз функция g вычисляется точно при всех λ.

Следствие 10. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $m = \#\lambda\Delta \leqslant \#X$. Предположим, что $2d_m^+(X) \leqslant \operatorname{diam} X - \alpha_m(X)$, тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\bigl\{\operatorname{diam} X - \lambda, \lambda - \alpha_m(X)\bigr\}.$$

4. Заключение

Таким образом, в работе получены или явные формулы, или точные верхние и нижние оценки для расстояний Громова–Хаусдорфа от ограниченного метрического пространства до симплекса — пространства, все ненулевые расстояния в котором одинаковы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig: Veit, 1914 [reprinted by Chelsea in 1949].

2. Tuzhilin A. A. Who Invented the Gromov-Hausdorff Distance? // ArXiv e-prints. 2017. `arXiv:1612.00728`.

3. Edwards D. The Structure of Superspace. // В сборнике: Studies in Topology, ed. by Stavrakas N. M. and Allen K. R., New York London San Francisco: Academic Press, Inc., 1975.

4. Gromov M. Groups of Polynomial growth and Expanding Maps. // В сборнике: Publications Mathematiques Paris: I.H.E.S., Vol. 53, 1981.

5. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. Москва – Ижевск: Изд-во Института компьютерных исследований, 2004. — 496 с.

6. Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова-Хаусдорфа: случай компактов. М.: Изд-во Попечительского совета мех-мат ф-та МГУ, 2017. — 111 с.

7. Иванов А. О., Николаева Н. К., Тужилин А. А. Метрика Громова–Хаусдорфа на пространстве метрических компактов — строго внутренняя // Матем. заметки. 2016. Т. 100, № 6. С. 947–950 (arXiv:1504.03830).

8. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Isometry group of Gromov–Hausdorff space // Matematicki Vesnik. 2019. Vol. 71, № 1–2. P. 123–154.

9. Memoli F. On the Use of Gromov–Hausdorff Distances for Shape Comparison // В сборнике: Proceedings of Point Based Graphics 2007, Ed. by Botsch M., Pajarola R., Chen B., and Zwicker M., The Eurographics Association, Prague, 2007, pp. 81–90.

10. Tuzhilin A. A. Calculation of Minimum Spanning Tree Edges Lengths using Gromov–Hausdorff Distance // ArXiv e-prints, 2016. arXiv:1605.01566.

11. Iliadis S. D., Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes // ArXiv e-prints, 2016. arXiv:1607.06655.

12. Iliadis S. D., Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Realizations of Gromov-Hausdorff Distance. // ArXiv e-prints, 2016. arXiv:1603.08850.

13. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings. // ArXiv e-prints, 2016. arXiv:1604.06116.

14. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A., Hausdorff realization of linear geodesics of Gromov–Hausdorff space // ArXiv e-prints. 2019. arXiv: 1904.09281.

15. Ivanov A., Tuzhilin A. Geometry of Gromov–Hausdorff metric space // Bulletin de l'Academie Internationale CONCORDE. 2017. № 3. P. 47–57.

REFERENCES

1. Hausdorff, F. 1914, *G*rundzüge der Mengenlehre, Veit, Leipzig [reprinted by Chelsea in 1949].

2. Tuzhilin, A. A. 2017, "Who Invented the Gromov-Hausdorff Distance?", ArXiv e-prints, arXiv:1612.00728.

3. Edwards, D. 1975, "The Structure of Superspace", In: *S*tudies in Topology, ed. by Stavrakas, N. M. and Allen, K. R., Academic Press, Inc. New York, London, San Francisco.

4. Gromov, M. 1981, "Groups of Polynomial growth and Expanding Maps", In: *P*ublications Mathematiques, I.H.E.S., Paris, Vol. 53.

5. Burago, D. Yu., Burago, Yu. D. & Ivanov, S. V., 2001, *A* Course in Metric Geometry, American Mathematical Society, Providence, RI.

6. Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A., 2017, *G*eometry of Hausdorff and Gromov–Hausdorff distances, the case of compact spaces, Izd-vo Popech. Soveta Mech.-Mat. Facult. MGU, Moscow [in Russian].

7. Ivanov, A. O., Nikolaeva, N. K. & Tuzhilin, A. A. 2016, "The Gromov–Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsic", *Mathematical Notes*, vol. 100, no. 6, pp. 171–173.

8. Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2019, "Isometry group of Gromov–Hausdorff space", *Matematicki Vesnik*, vol. 71, no. 1–2, pp. 123–154.

9. Memoli, F. 2007, "On the Use of Gromov–Hausdorff Distances for Shape Comparison, In: *P*roceedings of Point Based Graphics 2007, Ed. by Botsch M., Pajarola R., Chen B., and Zwicker M., The Eurographics Association, Prague, 2007, pp. 81–90.

10. Tuzhilin, A. A. 2016, "Calculation of Minimum Spanning Tree Edges Lengths using Gromov–Hausdorff Distance", ArXiv e-prints, `arXiv:1605.01566`.

11. Iliadis, S. D., Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2016, "Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes", ArXiv e-prints, `arXiv:1607.06655`.

12. Iliadis, S. D., Ivanov, A. O. & Tuzhilin A. A. 2016, "Realizations of Gromov-Hausdorff Distance", ArXiv e-prints, `arXiv:1603.08850`.

13. Ivanov, A. O., Tuzhilin, A. A. 2016, "Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings", ArXiv e-prints, `arXiv: 1604.06116`.

14. Ivanov, A. O., Tuzhilin, A. A. 2019, "Hausdorff realization of linear geodesics of Gromov–Hausdorff space", ArXiv e-prints, `arXiv: 1904.09281`.

15. Ivanov, A., Tuzhilin, A. 2017, "Geometry of Gromov–Hausdorff metric space", *Bulletin de l'Academie Internationale CONCORDE*, no. 3, pp. 47–57.

Получено 13.06.2019 г.
Принято в печать 12.07.2019 г.