ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 2.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-82-92

Условия Макенхаута для кусочно-степенных весов в евклидовом пространстве с мерой Данкля[1]

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: dvgmail@mail.ru

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

В результате многолетних исследований в гармоническом анализе Фурье был выделен класс линейных интегральных операторов Кальдерона–Зигмунда, ограниченных в пространствах L^p на $\mathbb{R}^d$ с мерой Лебега при $1 < p < \infty$. Б. Макенхаутом были найдены условия на вес, необходимые и достаточные для ограниченности операторов Кальдерона–Зигмунда в пространствах L^p с одним весом. Они теперь известны как A_p-условия Макенхаута. Г.Х. Харди и Дж.И. Литлвудом ($d = 1$) и С.Л. Соболевым ($d > 1$) была доказана (L^p, L^q)-ограниченность потенциала Рисса I_α при $1 < p < q < \infty$, $\alpha = d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$. Б. Макенхаут и Р.Л. Виден нашли $A_{p,q}$-условие на вес для одновесовой (L^p, L^q)-ограниченности потенциала Рисса. Важным обобщением потенциала Рисса стал потенциал Данкля–Рисса, определенный С. Тангавелу и Ю. Шу в евклидовом пространстве с мерой Данкля. Для потенциала Данкля–Рисса нами была доказана (L^p, L^q)-ограниченность с двумя радиальными кусочно-степенными весами. В настоящей работе мы определяем A_p и $A_{p,q}$-условия Макенхаута для весов в $\mathbb{R}^d$ с мерой Данкля и выясняем, когда они выполняются для кусочно-степенных весов. Полученные результаты показывают, что условия (L^p, L^q)-ограниченности потенциала Данкля–Рисса с одним кусочно-степенным весом могут быть охарактеризованы с помощью $A_{p,q}$-условия. Это позволяет предположить, что условия (L^p, L^q)-ограниченности потенциала Данкля–Рисса с одним произвольным весом могут также быть записаны с помощью $A_{p,q}$-условия.

Ключевые слова: весовая функция, условия Макенхаута, кусочно-степенной вес, мера Данкля, потенциал Данкля–Рисса.

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:
Д. В. Горбачев, В. И. Иванов. Условия Макенхаута для кусочно-степенных весов в евклидовом пространстве с мерой Данкля // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 82–92.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-82-92

Muckenhoupt conditions for piecewise-power weights in Euclidean space with Dunkl measure[2]

D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov

Gorbachev Dmitry Viktorovich — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Tula).
e-mail: dvgmail@mail.ru

Ivanov Valerii Ivanovich — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Head of Department, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Tula).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

As a result of many years of research in the Fourier harmonic analysis, a class of linear integral Calderon–Sigmund operators was defined that are bounded in the spaces L^p on $\mathbb{R}^d$ with the Lebesgue measure for $1 < p < \infty$. B. Muckenhoupt found conditions on weight that are necessary and sufficient for the boundedness of the Calderon–Zygmund operators in L^p-spaces with one weight. They are now known as the Muckenhoupt A_p-conditions. G.H. Hardy and J.E. Littlewood ($d = 1$) and S.L. Sobolev ($d > 1$) proved (L^p, L^q)-boundedness of the Riesz potential $I_{\ alpha}$ for $1 < p < q < \infty$, $\alpha = d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$. B. Muckenhoupt and R.L. Wheeden found $A_{p,q}$-weight condition for one weight (L^p, L^q)-boundedness of the Riesz potential. An important generalization of the Riesz potential has become the Dunkl–Riesz potential defined by S. Thangavelu and Yu. Xu in Euclidean space with the Dunkl measure. For the Dunkl–Riesz potential, we proved (L^p, L^q)-boundedness with two radial piecewise-power weights. In this paper, we define the Muckenhoupt A_p and $A_{p,q}$-conditions for weights in Euclidean space with the Dunkl measure and find out when they are satisfied for piecewise-power weights. The obtained results show that the conditions of (L^p, L^q)-boundedness of the Dunkl–Riesz potential with one piecewise-power weight can be characterized using the $A_{p,q}$-condition. This suggests that the conditions of (L^p, L^q)-boundedness of the Dunkl–Riesz potential with one arbitrary weight can also be written using the $A_{p,q}$-condition.

Keywords: weighted function, Muckenhoupt conditions, piecewise-power weight, Dunkl measure, Dunkl–Riesz potential.

Bibliography: 13 titles.

For citation:

D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, 2019, "Muckenhoupt conditions for piecewise-power weights in Euclidean space with Dunkl measure" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 82–92.

[2]This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199).

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^d$ — действительное d-мерное евклидово пространство со скалярным произведением (x,y) и нормой $|x|=\sqrt{(x,x)}$, $\mathbb{S}^{d-1}=\{x\in\mathbb{R}^d\colon |x|=1\}$— евклидова сфера, $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1\le p<\infty$, — пространства Лебега с нормой $\|f\|_p=\bigl(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^p\,dx\bigr)^{1/p}<\infty$.

Мы будем писать $M\lesssim N$, если $M\le CN$ с константой $C>0$, зависящей только от несущественных параметров, и $M\asymp N$, если $M\lesssim N$ и $N\lesssim M$. Как обычно, для $p>1$ $p'=\frac{p}{p-1}$ — сопряженный гёльдеров показатель, $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества $E\subset\mathbb{R}^d$, B — произвольный замкнутый евклидов шар вида $B(x_0,R)=\{x\in\mathbb{R}^d\colon |x-x_0|\leqslant R\}$, Q — произвольный замкнутый куб со сторонами, параллельными осям координат, $Q(x_0,R)=\prod_{j=1}^d[x_{0j}-R,x_{0j}+R]$.

В гармоническом анализе Фурье важное место занимают исследования ограниченности линейных интегральных операторов в пространствах $L^p(\mathbb{R}^d)$. В результате этих исследований был выделен класс сингулярных интегральных операторов Кальдерона–Зигмунда (класс CZSIO), для которых ограниченность имеет место при $1<p<\infty$ (см. [1, Chapter 4], [2, Chapter 8]). Доказательство этого факта в значительной степени основано на ограниченности в $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1<p<\infty$, максимальной функции Харди–Литтлвуда Mf.

В дальнейшем ограниченность интегральных операторов исследовалась в пространствах $L^p(\mathbb{R}^d)$ с весом. Весом w называют локально интегрируемую функцию в $\mathbb{R}^d$, принимающую значения в интервале $(0,\infty)$ почти всюду. В 1972 году Б. Макенхаут [3] доказал, что одновесовое неравенство

$$\|wMf\|_p\lesssim\|wf\|_p,\quad 1<p<\infty,$$

справедливо тогда и только тогда, когда для веса $\omega=w^p$ выполнено следующее условие:

$$\sup_Q\Bigl(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega\,dx\Bigr)\Bigl(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\Bigr)^{p-1}<\infty,$$

где $|Q|$ — мера Лебега куба Q. Это условие известно теперь как A_p-условие Макенхаута. A_p-условие оказалось необходимым и достаточным и для весовой ограниченности в $L^p(\mathbb{R}^d)$ операторов из класса CZSIO [2, Chapter 9].

Потенциал Рисса или дробный интеграл

$$I_\alpha f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(y)|x-y|^{\alpha-d}\,dy,\quad 0<\alpha<d,$$

не является ограниченным оператором в $L^p(\mathbb{R}^d)$. Г.Х. Харди и Дж.И. Литтлвуд [5] ($d=1$) и С.Л. Соболев [6] ($d>1$) показали, что этот положительный оператор ограничен из $L^p(\mathbb{R}^d)$ в $L^q(\mathbb{R}^d)$ при $1<p<q<\infty$ и $\alpha=d\Bigl(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Bigr)$. В 1974 году Б. Макенхаут и Р.Л. Виден [4] доказали, что при $1<p<q<\infty$ и $\alpha=d\Bigl(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Bigr)$ одновесовое неравенство

$$\|wI_\alpha f\|_q\lesssim\|wf\|_p$$

справедливо тогда и только тогда, когда для веса $\omega=w^q$ выполнено так называемое $A_{p,q}$-условие:

$$\sup_Q\Bigl(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega\,dx\Bigr)\Bigl(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega^{-\frac{p'}{q}}\,dx\Bigr)^{\frac{q}{p'}}<\infty.$$

Отметим, что условия $A_{p,p}$ и A_p совпадают.

Пусть $S=\{a_1,\dots,a_m\}\subset\mathbb{S}^{d-1}$ — множество различных единичных векторов, функция $k\colon S\to\mathbb{R}_+$, степенной вес типа Данкля $v_k(x)=\prod_{j=1}^m|(a_j,x)|^{k_j}$, где $k_j=k(a_j)$. Классический вес Данкля получается в том случае, когда S является системой корней, а функция k инвариантна относительно конечной группы отражений, порожденной отражениями

$\sigma_a x = x - 2(a,x)a$, $a \in S$. Евклидово пространство $\mathbb{R}^d$ с мерой Данкля $d\mu_k(x) = v_k(x)\,dx$ допускает содержательный гармонический анализ Данкля (см. [7]). Используя его, С. Тангавелу и Ю. Шу [8] определили потенциал Данкля–Рисса $I_\alpha^k f$. В [9, 10, 11] для потенциала Данкля–Рисса $I_\alpha^k f$ мы доказали весовые (L_p, L_q)-неравенства с двумя степенными или кусочно-степенными весами. Отметим, что по сравнению с этими работами, мы опускаем в весе Данкля несущественную здесь константу Макдональда–Мета–Сельберга.

Настоящая работа посвящена изучению A_p и $A_{p,q}$-условий для радиальных кусочно-степенных весов в $\mathbb{R}^d$ с мерой Данкля и анализу их роли в весовых (L_p, L_q)-неравенствах для потенциала Данкля–Рисса. В разделе 2 получены порядковые оценки меры Данкля шаров и кубов и условия удвоения для радиальных кусочно-степенных весов в пространстве с мерой Данкля. В разделе 3 для них исследуются A_p и $A_{p,q}$-условия.

2. Условия удвоения для кусочно-степенных весов в пространстве $\mathbb{R}^d$ с мерой Данкля

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x = |x|x'$, $y = |y|y'$, $x', y' \in \mathbb{S}^{d-1}$, $d(x', y') = \arccos(x', y')$ — геодезическое расстояние на $\mathbb{S}^{d-1}$, $\widetilde{B}(x_0', r) = \{x' \in \mathbb{S}^{d-1} \colon d(x_0', x') \leqslant \theta\}$ — сферическая шапочка с центром в x_0' и радиусом $\theta \in (0, \pi)$, $|E|_{d\mu_k} = \int_E d\mu_k$ — мера Данкля множества $E \subset \mathbb{R}^d$, $w(x)$ — весовая функция в $\mathbb{R}^d$, $|E|_{d\mu_k, w} = \int_E w\,d\mu_k$, $d_k = d + \sum_{j=1}^m k_j$ — обобщенная размерность пространства $\mathbb{R}^d$ с мерой Данкля.

Теорема 1. *Для всех $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$*

$$|B(x_0, R)|_{d\mu_k} \asymp R^d \prod_{j=1}^m (|(a_j, x_0)| + R)^{k_j} \tag{1}$$

с константами, не зависящими от x_0 и R.

Доказательство. Рассмотрим два случая $|x_0| \geqslant 3R$ и $|x_0| \leqslant 3R$.

Пусть сначала $|x_0| \geqslant 3R$. Имеем

$$\begin{aligned} |B(x_0, R)|_{d\mu_k} &= \int_{B(x_0, R)} d\mu_k = c_d \int_{|x_0|-R}^{|x_0|+R} r^{d_k - 1} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \chi_{B(x_0, R)}(rx') v_k(x')\,d\sigma(x')\,dr \\ &= c_d \int_{|x_0|-R}^{|x_0|+R} r^{d_k - 1} \int_{\widetilde{B}(x_0', \theta(r))} v_k(x')\,d\sigma(x')\,dr, \end{aligned} \tag{2}$$

где $c_d > 0$. Из соотношений $|x| = r$, $|x|^2 + |x_0|^2 - 2|x||x_0|(x_0', x') = R^2$ выводим:

$$\begin{gathered} \cos\theta(r) = \frac{|x_0|^2 + r^2 - R^2}{2r|x_0|}, \\ \sin\theta(r) = \frac{\sqrt{(|x_0| + r + R)(|x_0| + r - R)(|x_0| + R - r)(R + r - |x_0|)}}{2r|x_0|}, \\ \sin\theta(r) \leqslant \frac{R}{|x_0|}, \quad \theta(r) \leqslant \frac{\pi R}{2|x_0|} < \frac{2R}{|x_0|}. \end{gathered} \tag{3}$$

Положим

$$A = \Big\{ j \in [1, m] \colon |(a_j, x_0')| < \frac{3R}{|x_0|} \Big\}, \quad B = \Big\{ j \in [1, m] \colon |(a_j, x_0')| \geqslant \frac{3R}{|x_0|} \Big\}.$$

Пусть $x' \in \widetilde{B}(x_0', \theta(r))$. Согласно (3)

$$||(a_j, x')| - |(a_j, x_0')|| \leqslant |\cos d(a_j, x') - \cos d(a_j, x_0')| \leqslant d(x', x_0') \leqslant \theta(r) < \frac{2R}{|x_0|},$$

поэтому

$$\prod_{j\in A} |(a_j, x')|^{k_j} \leqslant \prod_{j\in A} \Big(\frac{5R}{|x_0|}\Big)^{k_j}, \quad \prod_{j\in B} |(a_j, x')|^{k_j} \asymp \prod_{j\in B} |(a_j, x_0')|^{k_j}. \tag{4}$$

Применяя (2), (4), получим

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{B}(x_0',\theta(r))} v_k(x')\,d\sigma(x') &\lesssim \prod_{j\in A}\Big(\frac{R}{|x_0|}\Big)^{k_j} \prod_{j\in B} |(a_j, x_0')|^{k_j} \int_{\widetilde{B}(x_0',\theta(r))} d\sigma(x') \\ &\lesssim \prod_{j\in A}\Big(\frac{R}{|x_0|}\Big)^{k_j} \prod_{j\in B} |(a_j, x_0')|^{k_j} (\theta(r))^{d-1} \\ &\lesssim \Big(\frac{R}{|x_0|}\Big)^{d-1} \prod_{j\in A}\Big(\frac{R}{|x_0|}\Big)^{k_j} \prod_{j\in B} |(a_j, x_0')|^{k_j}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}|B(x_0, R)|_{d\mu_k} &\lesssim \int_{|x_0|-R}^{|x_0|+R} r^{d_k-1}\,dr \Big(\frac{R}{|x_0|}\Big)^{d-1} \prod_{j\in A}\Big(\frac{R}{|x_0|}\Big)^{k_j} \prod_{j\in B} |(a_j, x_0')|^{k_j} \\ &\lesssim R^d \prod_{j\in A} R^{k_j} \prod_{j\in B} |(a_j, x_0)|^{k_j} \lesssim R^d \prod_{j=1}^{m} (|(a_j, x_0)| + R)^{k_j}.\end{aligned}$$

Оценка сверху в (1) при $|x_0| \geqslant 3R$ доказана.

Получим оценку снизу. В [13, Lemma 5.5] доказано, что для некоторого $\varepsilon \in (0, 1/2)$, не зависящего от x_0 и R, и $y_0' \in \widetilde{B}(x_0', \theta(r)/2)$

$$\widetilde{B}(y_0', \varepsilon\theta(r)) \subset \widetilde{B}(x_0', \theta(r)) \quad \text{и} \quad |(a_j, x')| \geqslant \varepsilon\theta(r) \text{ для } x' \in \widetilde{B}(y_0', \varepsilon\theta(r)),\ j \in A.$$

Отсюда и из (4)

$$v_k(x') \gtrsim \prod_{j\in A} (\theta(r))^{k_j} \prod_{j\in B} |(a_j, x_0')|^{k_j}, \quad x' \in \widetilde{B}(y_0', \varepsilon\theta(r)).$$

Если $r \in [|x_0| - R/2, |x_0| + R/2]$, то из (3) $\theta(r) \gtrsim \frac{R}{|x_0|}$, следовательно

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{B}(x_0',\theta(r))} v_k(x')\,d\sigma(x') &\gtrsim \int_{\widetilde{B}(y_0',\varepsilon\theta(r))} v_k(x')\,d\sigma(x') \\ &\gtrsim \prod_{j\in A}\Big(\frac{R}{|x_0|}\Big)^{k_j} \prod_{j\in B} |(a_j, x_0')|^{k_j} \int_{\widetilde{B}(y_0',\varepsilon\theta(r))} d\sigma(x') \\ &\gtrsim \prod_{j\in A}\Big(\frac{R}{|x_0|}\Big)^{k_j} \prod_{j\in B} |(a_j, x_0')|^{k_j} (\theta(r))^{d-1} \\ &\gtrsim \Big(\frac{R}{|x_0|}\Big)^{d-1} \prod_{j\in A}\Big(\frac{R}{|x_0|}\Big)^{k_j} \prod_{j\in B} |(a_j, x_0')|^{k_j}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}|B(x_0, R)|_{d\mu_k} &\gtrsim \int_{|x_0|-R/2}^{|x_0|+R/2} r^{d_k-1}\,dr \Big(\frac{R}{|x_0|}\Big)^{d-1} \prod_{j\in A}\Big(\frac{R}{|x_0|}\Big)^{k_j} \prod_{j\in B} |(a_j, x_0')|^{k_j} \\ &\gtrsim R^d \prod_{j\in A} R^{k_j} \prod_{j\in B} |(a_j, x_0)|^{k_j} \gtrsim R^d \prod_{j=1}^{m} (|(a_j, x_0)| + R)^{k_j}.\end{aligned}$$

Оценка снизу и в целом соотношение (1) при $|x_0| \geqslant 3R$ доказано.

Пусть теперь $|x_0| \leqslant 3R$. В этом случае

$$R^d \prod_{j=1}^{m} (|(a_j, x_0)| + R)^{k_j} \asymp R^{d_k} \asymp |B(0,R)|_{d\mu_k}.$$

Если $|x_0| \leqslant R/2$, то $B(0,R/2) \subset B(x_0,R) \subset B(0,3R/2)$ и

$$|B(x_0,R)|_{d\mu_k} \asymp R^{d_k}.$$

Если $R/2 \leqslant |x_0| \leqslant 3R$, то $B(x_0,R/6) \subset B(x_0,R) \subset B(0,4R)$. Следовательно,

$$|B(x_0,R)|_{d\mu_k} \leqslant |B(0,4R)|_{d\mu_k} \lesssim R^{d_k}.$$

Если $\widetilde{R} = R/6$, то $|x_0| \geqslant 3\widetilde{R}$. Случай шара $B(x_0,\widetilde{R})$ уже был рассмотрен. Он дает

$$|B(x_0,R)|_{d\mu_k} \geqslant |B(x_0,R/6)|_{d\mu_k} \gtrsim R^{d_k}.$$

Теорема 1 доказана. □

Следствие 1. *Мера Данкля удовлетворяет условию удвоения:*

$$|B(x_0,2R)|_{d\mu_k} \lesssim |B(x_0,R)|_{d\mu_k}.$$

Так как пространство $(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ однородно, то следствие 1 также вытекает из [12, Chapter 1].

Вложения $B(x_0,R) \subset Q(x_0,R) \subset B(x_0,\sqrt{d}\,R)$ дают

Следствие 2. *Имеем*

$$|Q(x_0,R)|_{d\mu_k} \asymp R^d \prod_{j=1}^{m} (|(a_j, x_0)| + R)^{k_j}$$

и

$$|Q(x_0,2R)|_{d\mu_k} \lesssim |Q(x_0,R)|_{d\mu_k}.$$

Рассмотрим случай радиального кусочно-степенного веса. Для $x \in \mathbb{R}^d$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}^2$ он имеет вид

$$u_\gamma(x) = |x|^{\gamma_1} \chi_{B_1}(x) + |x|^{\gamma_2} \chi_{B_1^c}(x) = u_\gamma^0(|x|),$$

где $B_1 = B(0,1)$, $B_1^c = \mathbb{R}^d \setminus B(0,1)$, а $u_\gamma^0(r) = r^{\gamma_1} \chi_{[0,1]}(r) + r^{\gamma_2} \chi_{(1,\infty)}(r)$. При $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$ получаем степенной вес $u_\gamma(x) = |x|^\gamma$.

Из требования локальной интегрируемости весовой функции $u_\gamma(x)$ вытекает необходимое условие

$$\gamma_1 > -d_k.$$

Будем предполагать, что оно выполнено.

Нас интересуют оценки меры

$$|B(x_0,R)|_{d\mu_k,u_\gamma} = \int_{B(x_0,R)} u_\gamma \, d\mu_k.$$

Отметим, что для кусочно-степенных весов справедливы следующие легко проверяемые свойства:

$$\begin{gathered} c_1(\lambda) u_\gamma(x) \leqslant u_\gamma(\lambda x) \leqslant c_2(\lambda) u_\gamma(x), \quad \lambda > 0, \\ u_\gamma(x) u_\beta(x) = u_{\gamma+\beta}(x), \quad (u_\gamma(x))^s = u_{s\gamma}(x), \quad s \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{5}$$

Теорема 2. *Если $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$, $\gamma_1, \gamma_2 > -d_k$, то*

$$|B(x_0, R)|_{d\mu_k, u_\gamma} \asymp u_\gamma^0(|x_0| + R)R^d \prod_{j=1}^{m}(|(a_j, x_0)| + R)^{k_j}.$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 вытекают следующие оценки. Если $|x_0| \geqslant 3R$, то

$$|B(x_0, R)|_{d\mu_k, u_\gamma} \lesssim \int_{|x_0|-R}^{|x_0|+R} r^{d_k-1} u_\gamma^0(r)\, dr \Big(\frac{R}{|x_0|}\Big)^{d-1} \prod_{j\in A}\Big(\frac{R}{|x_0|}\Big)^{k_j} \prod_{j\in B} |(a_j, x_0')|^{k_j}$$
$$\lesssim u_\gamma^0(|x_0|)R^d \prod_{j=1}^{m}(|(a_j, x_0)| + R)^{k_j},$$

и

$$|B(x_0, R)|_{d\mu_k, u_\gamma} \gtrsim \int_{|x_0|-R/2}^{|x_0|+R/2} r^{d_k-1} u_\gamma^0(r)\, dr \Big(\frac{R}{|x_0|}\Big)^{d-1} \prod_{j\in A}\Big(\frac{R}{|x_0|}\Big)^{k_j} \prod_{j\in B} |(a_j, x_0')|^{k_j}$$
$$\gtrsim u_\gamma^0(|x_0|)R^d \prod_{j=1}^{m}(|(a_j, x_0)| + R)^{k_j},$$

поэтому

$$|B(x_0, R)|_{d\mu_k, u_\gamma} \asymp u_\gamma^0(|x_0|)R^d \prod_{j=1}^{m}(|(a_j, x_0)| + R)^{k_j}.$$

Если $|x_0| \leqslant R/2$, то с учетом условий $\gamma_1, \gamma_2 > -d_k$

$$|B(x_0, R)|_{d\mu_k, u_\gamma} \leqslant |B(0, 3R/2)|_{d\mu_k, u_\gamma} \lesssim \int_0^{3R/2} r^{d_k-1} u_\gamma^0(r)\, dr \lesssim u_\gamma^0(R)R^{d_k}$$

и

$$|B(x_0, R)|_{d\mu_k, u_\gamma} \geqslant |B(0, R/2)|_{d\mu_k, u_\gamma} \gtrsim \int_0^{R/2} r^{d_k-1} u_\gamma^0(r)\, dr \gtrsim u_\gamma^0(R)R^{d_k},$$

поэтому

$$|B(x_0, R)|_{d\mu_k, u_\gamma} \asymp u_\gamma^0(R)R^{d_k}.$$

Если $R/2 \leqslant |x_0| \leqslant 3R$, то аналогично $|B(x_0, R)|_{d\mu_k, u_\gamma} \asymp u_\gamma^0(R)R^{d_k}$. Теорема 2 доказана. □

Пусть w — весовая функция. Будем говорить, что пара $(w, d\mu_k)$ удовлетворяет условию удвоения, если для всех $x_0 \in \mathbb{R}^d$ и $R > 0$

$$|B(x_0, 2R)|_{d\mu_k, w} \lesssim |B(x_0, R)|_{d\mu_k, w}$$

с константой, не зависящей от x_0 и R.

Следствие 3. *Если $\gamma_1, \gamma_2 > -d_k$, то пара $(u_\gamma, d\mu_k)$ удовлетворяет условию удвоения.*

Замечание 1. *Если $R \geqslant 1$, $\gamma_1 > -d_k$, а $\gamma_2 \leqslant -d_k$, то*

$$\begin{aligned}|B(0, R)|_{d\mu_k, u_\gamma} &= c_{d,k} \int_0^R r^{d_k-1} u_\gamma^0(r)\, dr \\ &= c_{d,k} \int_0^R \{r^{\gamma_1+d_k-1}\chi_{[0,1]}(r) + r^{\gamma_2+d_k-1}\chi_{(1,\infty)}(r)\}\, dr \\ &\asymp \begin{cases} 1, & \gamma_2 + d_k < 0, \\ \ln(R+1), & \gamma_2 + d_k = 0. \end{cases}\end{aligned} \tag{6}$$

3. Условия Макенхаута для кусочно-степенных весов в пространстве $\mathbb{R}^d$ с мерой Данкля

Пусть $1 \leqslant p < \infty$, B — евклидовы шары. Будем говорить, что пара $(w, d\mu_k)$ удовлетворяет A_p-условию Макенхаута ($(w, d\mu_k) \in A_p$), если

$$\sup_B \Big\{ \Big(\frac{1}{|B|_{d\mu_k}} \int_B w \, d\mu_k \Big) \Big(\frac{1}{|B|_{d\mu_k}} \int_B w^{-\frac{1}{p-1}} \, d\mu_k \Big)^{p-1} \Big\} < \infty, \quad 1 < p < \infty,$$

и

$$\sup_B \Big\{ \Big(\frac{1}{|B|_{d\mu_k}} \int_B w \, d\mu_k \Big) \operatorname*{vrai\,sup}_B (w^{-1}) \Big\} < \infty, \quad p = 1.$$

Теорема 3. *Пара $(u_\gamma, d\mu_k)$ удовлетворяет A_p-условию Макенхаута тогда и только тогда, когда $-d_k < \gamma_1, \gamma_2 < d_k(p-1)$ при $1 < p < \infty$ и $-d_k < \gamma_1, \gamma_2 \leqslant 0$ при $p = 1$.*

Доказательство. Необходимость. Из условий локальной интегрируемости весов u_γ, $u_{-\frac{\gamma}{p-1}}$ при $1 < p < \infty$ вытекают необходимые условия $-d_k < \gamma_1 < d_k(p-1)$. При $p = 1$ они имеют вид $-d_k < \gamma_1 \leqslant 0$.

Если $\gamma_2 + d_k \leqslant 0$ и $1 < p < \infty$, то $-\frac{\gamma_2}{p-1} + d_k > 0$. Отсюда, применяя (6) и теоремы 1 и 2, для $R \geqslant 1$ получим

$$|B(0,R)|_{d\mu_k, u_\gamma} \asymp \begin{cases} 1, & \gamma_2 + d_k < 0, \\ \ln(R+1), & \gamma_2 + d_k = 0, \end{cases}$$

$$|B(0,R)|_{d\mu_k} \asymp R^{d_k}, \quad |B(0,R)|_{d\mu_k, (u_\gamma)^{-\frac{1}{p-1}}} \asymp R^{-\frac{\gamma_2}{p-1} + d_k}.$$

Следовательно,

$$\sup_{R \geqslant 1} \Big\{ \Big(\frac{1}{|B(0,R)|_{d\mu_k}} \int_{B(0,R)} u_\gamma \, d\mu_k \Big) \Big(\frac{1}{|B(0,R)|_{d\mu_k}} \int_{B(0,R)} u_\gamma^{-\frac{1}{p-1}} \, d\mu_k \Big)^{p-1} \Big\}$$
$$\asymp \sup_{R \geqslant 1} \begin{cases} R^{-\gamma_2 - d_k}, & \gamma_2 + d_k < 0, \\ \ln(R+1), & \gamma_2 + d_k = 0 \end{cases} = \infty.$$

При $p = 1$ аналогично

$$\sup_{R \geqslant 1} \Big\{ \Big(\frac{1}{|B(0,R)|_{d\mu_k}} \int_{B(0,R)} u_\gamma \, d\mu_k \Big) \operatorname*{vrai\,sup}_{B(0,R)} (u_\gamma^{-1}) \Big\}$$
$$\asymp \sup_{R \geqslant 1} \begin{cases} R^{-\gamma_2 - d_k}, & \gamma_2 + d_k < 0, \\ \ln(R+1), & \gamma_2 + d_k = 0 \end{cases} = \infty.$$

Необходимость условия $\gamma_2 + d_k > 0$ при $1 \leqslant p < \infty$ доказана.

Если $\gamma_2 \geqslant d_k(p-1)$ и $1 < p < \infty$, то $\gamma_2 + d_k > 0$. Отсюда, применяя (6) и теоремы 1 и 2, для $R \geqslant 1$ получим $|B(0,R)|_{d\mu_k, u_\gamma} \asymp R^{\gamma_2}$,

$$|B(0,R)|_{d\mu_k, (u_\gamma)^{-\frac{1}{p-1}}} \asymp \begin{cases} 1, & \gamma_2 > d_k(p-1), \\ \ln(R+1), & \gamma_2 = d_k(p-1). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\sup_{R \geqslant 1} \Big\{ \Big(\frac{1}{|B(0,R)|_{d\mu_k}} \int_{B(0,R)} u_\gamma \, d\mu_k \Big) \Big(\frac{1}{|B(0,R)|_{d\mu_k}} \int_{B(0,R)} u_\gamma^{-\frac{1}{p-1}} \, d\mu_k \Big)^{p-1} \Big\}$$
$$\asymp \sup_{R \geqslant 1} \begin{cases} R^{\gamma_2 - d_k(p-1)}, & \gamma_2 > d_k(p-1), \\ \ln^{p-1}(R+1), & \gamma_2 = d_k(p-1) \end{cases} = \infty.$$

Необходимость условия $\gamma_2 < d_k(p-1)$ при $1 < p < \infty$ доказана. Остается рассмотреть случай $p = 1$ и $\gamma_2 > 0$:

$$\sup_{R\geqslant 1}\Big\{\Big(\frac{1}{|B(0,R)|_{d\mu_k}}\int_{B(0,R)} u_\gamma\,d\mu_k\Big)\operatorname*{vrai\,sup}_{B(0,R)}(u_\gamma^{-1})\Big\} \asymp \sup_{R\geqslant 1} R^{\gamma_2} = \infty.$$

Необходимость условия $\gamma_2 \leqslant 0$ при $p = 1$ также доказана.

Достаточность. Пусть $p > 1$, $-d_k < \gamma_1, \gamma_2 < d_k(p-1)$. Согласно (5)

$$\begin{aligned}J_p &= \Big(\frac{1}{|B(x_0,R)|_{d\mu_k}}\int_{B(x_0,R)} u_\gamma\,d\mu_k\Big)\Big(\frac{1}{|B(x_0,R)|_{d\mu_k}}\int_{B(x_0,R)} u_\gamma^{-\frac{1}{p-1}}\,d\mu_k\Big)^{p-1}\\ &= \Big(\frac{1}{|B(x_0,R)|_{d\mu_k}}\int_{B(x_0,R)} u_\gamma\,d\mu_k\Big)\Big(\frac{1}{|B(x_0,R)|_{d\mu_k}}\int_{B(x_0,R)} u_{-\frac{\gamma}{p-1}}\,d\mu_k\Big)^{p-1}.\end{aligned}$$

Применяя теоремы 1 и 2 и свойство (5) получим

$$J_p \asymp u_\gamma(|x_0|+R)(u_{-\frac{\gamma}{p-1}}(|x_0|+R))^{p-1} = u_\gamma(|x_0|+R)u_{-\gamma}(|x_0|+R) = 1.$$

Если $p = 1$ и $-d_k < \gamma_1, \gamma_2 \leqslant 0$, то

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{B}(u_\gamma^{-1}) = \lim_{p\to 1+0}\Big(\frac{1}{|B(x_0,R)|_{d\mu_k}}\int_{B(x_0,R)} u_\gamma^{-\frac{1}{p-1}}\,d\mu_k\Big)^{p-1} \asymp u_{-\gamma}(|x_0|+R).$$

Следовательно, $J_1 \asymp u_\gamma(|x_0|+R)u_{-\gamma}(|x_0|+R) = 1$. Теорема 3 полностью доказана. □.

Пусть $1 < p < q < \infty$. Будем говорить, что пара $(w, d\mu_k)$ удовлетворяет $A_{p,q}$-условию Макенхаута ($(w, d\mu_k) \in A_{p,q}$), если

$$\sup_{B}\Big\{\Big(\frac{1}{|B|_{d\mu_k}}\int_B w\,d\mu_k\Big)\Big(\frac{1}{|B|_{d\mu_k}}\int_B w^{-\frac{p'}{q}}\,d\mu_k\Big)^{q/p'}\Big\} < \infty.$$

Аналогично теореме 3 доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $1 < p < q < \infty$. Пара $(u_\gamma, d\mu_k)$ удовлетворяет $A_{p,q}$-условию Макенхаута тогда и только тогда, когда $-d_k < \gamma_1, \gamma_2 < \frac{q}{p'}d_k$.*

Замечание 2. *В определениях A_p и $A_{p,q}$-условий Макенхаута шары B можно заменить на кубы Q и условия на весовые функции в теоремах 3, 4 останутся те же самые.*

4. Заключение

Рассмотрим задачу о (L_p, L_q)-неравенстве для потенциала Данкля–Рисса с одним весом w:

$$\|wI_\alpha^k f\|_{(L^q,d\mu_k)} \lesssim \|wf\|_{(L^p,d\mu_k)}. \tag{7}$$

В [11] установлено, что неравенство (7) выполняется для кусочно-степенного веса $w = u_{-\gamma}$ и $1 < p < q < \infty$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\alpha = d_k\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big), \quad -\frac{d_k}{p'} < \gamma_1, \gamma_2 < \frac{d_k}{q}. \tag{8}$$

С учетом теоремы 4 условия (8) эквивалентны следующим

$$\alpha = d_k\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big) \quad \text{и} \quad (u_{-\gamma}^q, d\mu_k) \in A_{p,q}.$$

Мы предполагаем, что эти условия являются необходимыми и достаточными для произвольного веса w.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grafacos L. Classical Fourier Analysis. Graduate Texts in Mathematics 249. New York: Springer, 2008. 489 p.
2. Grafacos L. Classical Fourier Analysis. Graduate Texts in Mathematics 250. New York: Springer, 2009. 504 p.
3. Muckenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 165. P. 207–226.
4. Muckenhoupt B., Wheeden R. L. Weighted norm inequalities for fractional integrals // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 192. P. 261–274.
5. Hardy G. H., Littelwood J. E. Some properties of fractional integrals, I // Math. Zeit. 1928. Vol. 27. P. 565–606.
6. Соболев С. Об одной теореме функционального анализа // Матем. сб. 1938. Т. 4(46), № 4. С. 471–497.
7. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications, in Orthogonal Polynomials and Special Functions. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2003. Vol. 1817. P. 93–135.
8. Thangavelu S., Xu Y. Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform // J. Comput. Appl. Math. 2007. Vol. 199. P. 181–195.
9. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Positive L^p-bounded Dunkl-Type generalized translation operator and its applications // Constructive approximation. 2019. Vol. 49. No. 3. P. 555-605.
10. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Riesz potential and maximal function for Dunkl transform. Preprint CRM, Barcelona, 2018. № 1238. P. 1–28.
11. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Весовые неравенства для потенциала Данкля–Рисса // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 131–147.
12. Stein E. M. Harmonic analysis: Reals-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1993. 716 p.
13. Dai F. Multivariate polynomial inequalities with respect to doubling weights and A_∞ weights // J. Funct. Anal. 2006. Vol. 235. P. 137–170.

REFERENCES

1. Grafacos L., 2008, “Classical Fourier Analysis”, Graduate Texts in Mathematics 249. *New York: Springer*, 489 p.
2. Grafacos L., “Modern Fourier Analysis”, Graduate Texts in Mathematics 250. *New York: Springer*, 504 p.
3. Muckenhoupt B., 1972, “Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 165, pp. 207–226.
4. Muckenhoupt B., Wheeden R. L., 1974, “Weighted norm inequalities for fractional integrals”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 192, pp. 261–274.

5. Hardy G. H., Littelwood J. E., 1928, “Some properties of fractional integrals, I”, *Math. Zeit.*, vol. 27, pp. 565–606.

6. Soboleff S., 1963, “Sur un théoréme d’analyse fonctionnelle”, *Amer. Math. Soc. Transl.*, № 2(34), pp.39–68.

7. Rösler M., 2003, “Dunkl operators. Theory and applications, in Orthogonal Polynomials and Special Functions”, *Lecture Notes in Math. Springer-Verlag*, vol. 1817, pp. 93–135.

8. Thangavelu S., Xu Y., 2007, “Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform”, *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 199, pp. 181–195.

9. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2019, “Positive L^p-bounded Dunkl-Type Generalized Translation Operator and Its Applications”, *Constructive approximation*, vol. 49. No. 3. pp. 555-605.

10. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2018, “Riesz potential and maximal function for Dunkl transform”, *Preprint CRM, Barcelona*, № 1238, pp. 1–28.

11. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2019, “Weighted inequalities for Dunkl–Riesz potential”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, № 1, pp. 131–147. (In Russian)

12. Stein E. M., 1993, “Harmonic analysis: Reals-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals”, *Princeton, New Jersey: Princeton University Press*, 716 p.

13. Dai F., 2006, “Multivariate polynomial inequalities with respect to doubling weights and A_∞ weights”, *J. Funct. Anal.*, vol. 235, pp. 137–170.

Получено 18.05.2019 г.
Принято в печать 12.07.2019 г.