ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.331 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-55-81

Избранные вопросы теории сумматорных функций рядов Дирихле

Л. В. Варухина

Варухина Лидия Владимировна — Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: Lidadgema@mail.ru

Аннотация

Вопросы, связанные с исследованием *рядов Дирихле*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$$

и их сумматорных функций

$$\Phi(x) = \sum_{n \le x} a_n$$

формируют один из центральных разделов классической теории чисел.

При определенных условиях на ряд

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$$

функция $\Phi(x)$ может быть выражена через функцию $f(s)$, которую в этом случае называют *производящей функцией для коэффициентов ряда Дирихле.* Эта связь выражается известной *формулой Перрона*

$$\sum_{n \le x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} f(s) \frac{x^s}{s} ds, \ c_0 > \sigma_0,$$

где ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

для $f(s)$ абсолютно сходится при $\sigma > \sigma_0$. Точнее, классическая схема исследования сумматорной функции

$$\Phi(x) = \sum_{n \le x} a_n$$

коэффициентов ряда Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

опирается на формулу, при определенных условиях выражающую функцию $\Phi(x)$ через интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b - iT}^{b + iT} \frac{f(s) x^s}{s} ds.$$

В 1972 г. А. А. Карацуба получил "интегральную" формулу такого рода, которая связывает

$$\int_1^x \Phi(y)dy$$

с интегралом

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{f(s)x^{s+1}}{s(s+1)}ds,$$

что позволяет получить новые результаты при исследовании соответствующих теоретико-числовых вопросов.

В данной статье представлена новая формула, выражающая сумматорную функцию

$$\Phi(x) = \sum_{n\le x} a_n$$

ряда Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$$

через $f(s)$, родственная формуле Перрона и интегральной формуле А. А. Карацубы. Именно, доказано следующее утверждение.

- *Пусть ряд*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$$

абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > 1$, $a_n = O(n^{\varepsilon})$, *где* $\varepsilon > 0$ *– произвольно малое действительное число, и при* $\sigma \to 1+$ *имеет место оценка*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} = O((\sigma-1)^{-\alpha}),\ \alpha > 0.$$

Тогда при любых $b \ge b_0 > 1$, $T \ge 1$, $x = N + 0,5$, $H > b$ *имеет место формула*

$$\Phi(x) = \sum_{n\le x} a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} f(s)\frac{x^s H}{s(H-s)}ds+$$

$$+O\left(\frac{x^b H}{T^2(b-1)^{\alpha}}\right) + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}H\log x}{T^2}\right) + O\left(x^{\varepsilon}e^{H\log\frac{x}{x+0,5}}\left(1+\frac{x}{H}\right)\right).$$

Наиболее известным рядом Дирихле является дзета-функция Римана, при $\operatorname{Re} s > 1$ определяемая равенством

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}.$$

Возведение дзета-функции Римана в k-ю степень при $\operatorname{Re} s > 1$ даст нам ряд Дирихле

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_k(n) n^{-s},$$

где $\tau_k(n)$ – число натуральных решений уравнения $x_1 \cdot \ldots \cdot x_k = n$. Сумматорная функция коэффициентов этого ряда

$$D_k(x) = \sum_{n\le x} \tau_k(n)$$

есть число точек с натуральными координатами под гиперболической поверхностью $x_1 \cdot \ldots \cdot x_k = x$. Задачу об асимптотической оценке суммы $D_k(x)$ принято называть *проблемой делителей Дирихле.*

В данной статье мы доказываем две теоремы, дающие новые асимптотические формулы для функций

$$\sum_{n\le x}\tau_{k_1}(n)\cdot\ldots\cdot\tau_{k_l}(n)$$

и

$$\sum_{n\le x}\tau_k(n^2),$$

родственных функции $D_k(x)$.

- $$\sum_{n\le x}\tau_{k_1}(n)\cdot\ldots\cdot\tau_{k_l}(n)=xP_m(\log x)+\theta x^{1-\frac{1}{13}m^{-2/3}}(C\log x)^m,$$

  где $l\ge 1$, $k_1,\ldots,k_l\ge 2$, $m=k_1\cdot\ldots\cdot k_l$, P_m *– многочлен степени* $m-1$, θ *– комплексное число,* $|\theta|\le 1$, $m\ll\log^{\frac{5}{6}}x$, $C>0$ *– абсолютная постоянная.*

- $$\sum_{n\le x}\tau_k(n^2)=xP_m(\log x)+\theta x^{1-\frac{1}{13}m^{-2/3}}(C\log x)^m,$$

  где $k\ge 2$, $m=\frac{k(k+1)}{2}$, P_m *– многочлен степени* $m-1$, θ *– комплексное число,* $|\theta|\le 1$, $m\ll\log^{\frac{5}{6}}x$, $C>0$ *– абсолютная постоянная.*

Другим хорошо известным примером рядов Дирихле являются L-функции Дирихле, при $\operatorname{Re}s>1$ определяемые равенством

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s},$$

где χ – характер Дирихле по некоторому модулю D. Произведение нескольких L-функций Дирихле дает при $\operatorname{Re}s>1$ ряд

$$L_1(s,\chi_1)\cdot\ldots\cdot L_k(s,\chi_k)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nn^{-s},$$

сумматрная функция коэффициентов которого имеет вид

$$C_k(x)=\sum_{n\le x}c_n=\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_k\le x}\chi_1(n_1)\cdot\ldots\cdot\chi_k(n_k).$$

Задача об асимптотической оценке функции $C_k(x)$ является обобщением проблемы делителей Дирихле и связана с проблемой делителей в числовых полях, в частности, квадратичном и круговом.

В данной статье получены новые асимптотические формулы для средних значений арифметических функций $\tau_{k_1}^K(n)\cdot\ldots\cdot\tau_{k_l}^K(n)$ и $\tau_k^K(n^2)$, родственных функции делителей $\tau_k(n)$, в квадратичном поле $K=Q(\sqrt{D})$, D – бесквадратное число, и t-круговом поле $K=Q(\varsigma)$, $\varsigma^t=1$, с константой $c=\frac{1}{13}$ в показателе остаточного члена.

Ключевые слова: ряды Дирихле, сумматорные функции коэффициентов рядов Дирихле, дзета-функция Римана, L-функции Дирихле, функция делителей, проблема делителей Дирихле.

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:
Л. В. Варухина. Избранные вопросы теории сумматорных функций рядов Дирихле // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 55–81.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 2.

UDC 511.331 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-55-81

Selected questions of the theory of adding functions of Dirichlet series

L. V. Varukhina

Varukhina Lidiya Vladimirovna — Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: Lidadgema@mail.ru

Abstract

Investigation of *Dirichlet series*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

and the *adding functions*

$$\Phi(x) = \sum_{n \le x} a_n$$

of their coefficients forms one of central domains of classical Number Theory.

Under some special conditions for

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s},$$

the function $\Phi(x)$ can be represented using $f(s)$. This connection is given by the famous *Perron formula*

$$\sum_{n \le x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} f(s) \frac{x^s}{s} ds, \quad c_0 > \sigma_0,$$

where

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

for $f(s)$ is absolutely convergenting for $\sigma > \sigma_0$. More precisely, classical scheme of a research of the adding function

$$\Phi(x) = \sum_{n \le x} a_n$$

of coefficients of

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

leans on a formula, which (under certain conditions) is expressing the function $\Phi(x)$ through the integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{f(s) x^s}{s} ds.$$

In 1972, A. A. Karatsuba received an "integrated" formula of such kind, which connects

$$\int_1^x \Phi(y) dy$$

with the integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{f(s)x^{s+1}}{s(s+1)}ds.$$

This formula allows to receive new results in the research of corresponding number-theoretical questions.

In this paper we presernt a new formula, expressing the adding function

$$\Phi(x)=\sum_{n\le x}a_n$$

of

$$f(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n n^{-s}$$

through $f(s)$, related to the Perron formula and to the integrated formula of A. A. Karatsuba. In fact, the following statement is proved.

- *Let the row*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n n^{-s}$$

is absolutely convergenting for $\operatorname{Re}s>1$, $a_n=O(n^{\varepsilon})$, *where* $\varepsilon>0$ *is any small real number, and for* $\sigma\to 1+$ *there is an estimation*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|n^{-\sigma}=O((\sigma-1)^{-\alpha}),\ \alpha>0.$$

Then for any $b\ge b_0>1$, $T\ge 1$, $x=N+0,5$, $H>b$ *we have the formula*

$$\Phi(x)=\sum_{n\le x}a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}f(s)\frac{x^sH}{s(H-s)}ds+$$

$$+O\left(\frac{x^bH}{T^2(b-1)^{\alpha}}\right)+O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}H\log x}{T^2}\right)+O\left(x^{\varepsilon}e^{H\log\frac{x}{x+0,5}}\left(1+\frac{x}{H}\right)\right).$$

The most famous Dirichlet series is the *Riemann zeta function* $\zeta(s)$, defined for any $s=\sigma+it$ with $\operatorname{Re}s=\sigma>1$ as

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

The square of zeta function is connected with the *divisor function*

$$\tau(n)=\sum_{d|n}1,$$

giving the number of positive integer divisors of positive integer number n. Generally,

$$\zeta^k(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_k(n)}{n^s},\quad \operatorname{Re}s>1,$$

where function

$$\tau_k(n)=\sum_{n=n_1\cdot\ldots\cdot n_k}1$$

gives the number of representations of a positive integer number n as a product of k positive integer factors. The adding function of the Dirichlet series $\zeta^k(s)$ is the function

$$D_k(x)=\sum_{n\le x}\tau_k(n);$$

its research is known as the *Dirichlet divisor problem.*

In this article we prove two new asymptotic formulas for the functions

$$\sum_{n\le x}\tau_{k_1}(n)\cdot\ldots\cdot\tau_{k_l}(n)$$

и

$$\sum_{n\le x}\tau_k(n^2),$$

connected with $D_k(x)$.

- $$\sum_{n\le x}\tau_{k_1}(n)\cdot\ldots\cdot\tau_{k_l}(n)=xP_m(\log x)+\theta x^{1-\frac{1}{13}m^{-2/3}}(C\log x)^m,$$

  where $l\ge 1$, $k_1,\ldots,k_l\ge 2$, $m=k_1\cdot\ldots\cdot k_l$, P_m is a polinomial of degree $m-1$, θ is a complex number, $|\theta|\le 1$, $m\ll\log^{\frac{5}{6}}x$, $C>0$ is an absolute constant.

- $$\sum_{n\le x}\tau_k(n^2)=xP_m(\log x)+\theta x^{1-\frac{1}{13}m^{-2/3}}(C\log x)^m,$$

  where $k\ge 2$, $m=\frac{k(k+1)}{2}$, P_m is a polinomial of degree $m-1$, θ is a complex number, $|\theta|\le 1$, $m\ll\log^{\frac{5}{6}}x$, $C>0$ is an absolute constant.

Other well-known example of Dirichlet series is given by Dirichlet L-function

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s},\operatorname{Re}s>1,$$

where χ is a Dirichlet character modulo D. A product of several L-functions gives for $\operatorname{Re}s>1$ a row

$$L_1(s,\chi_1)\cdot\ldots\cdot L_k(s,\chi_k)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nn^{-s},$$

with adding function

$$C_k(x)=\sum_{n\le x}c_n=\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_k\le x}\chi_1(n_1)\cdot\ldots\cdot\chi_k(n_k).$$

The problem of asymptotic behavior of $C_k(x)$ is a generalisation of the Dirichlet divisor problem. It is connected with the divisor problem in number fields, in particular, in quadratic fields and in cyclotomic fields.

In this article we give new asymptotic formulas for the mean values of the two functions $\tau_{k_1}^K(n)\cdot\ldots\cdot\tau_{k_l}^K(n)$ and $\tau_k^K(n^2)$, connected with the function $\tau_k(n)$, in the quadratic field $K=Q(\sqrt{D})$, D is squarefree integer number, and in cyclotomic field $K=Q(\varsigma)$, $\varsigma^t=1$, with the constant $c=\frac{1}{13}$ in the exponent of the error term.

Keywords: Dirichlet series, adding functions of the coefficients of Dirichlet series, Riemann zeta function, Dirchlet L-function, divisor function, Dirichlet divisor problem.

Bibliography: 22 titles.

For citation:

L. V. Varukhina, 2019, "Selected questions of the theory of adding functions of Dirichlet series", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 55–81.

1. Введение

Вопросы, связанные с исследованием *рядов Дирихле*, то есть выражений вида

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}, \tag{1}$$

где a_n – комплексные числа, называемые *коэффициентами ряда Дирихле*, а $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, формируют один из центральных разделов классичской теории чисел ([1], [2], [15], [16], [21] и др.).

С рядом $f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$ (1) тесно связана функция

$$\Phi(x) = \sum_{n \le x} a_n,$$

которую называют *сумматорной функцией коэффициентов ряда Дирихле* (1).

При определенных условиях на ряд (1) функция $\Phi(x)$ может быть выражена через функцию $f(s)$, которую в этом случае называют *производящей функцией для коэффициентов ряда Дирихле*. Эта связь выражается известной *формулой Перрона* (см., например, [17]):

$$\sum_{n \le x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} f(s) \frac{x^s}{s} ds, \ c_0 > \sigma_0,$$

где ряд (1) для $f(s)$ абсолютно сходится при $\sigma > \sigma_0$.

Точнее, классическая схема исследования сумматорной функции $\Phi(x) = \sum_{n \le x} a_n$ коэффициентов ряда Дирихле (1) опирается на формулу, при определенных условиях выражающую функцию $\Phi(x)$ через интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{f(s)x^s}{s} ds$. Именно, имеет место следующее утверждение ([8], с. 75).

Пусть ряд $f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$ *для* $f(s)$ *абсолютно сходится при* $\operatorname{Re} s > 1$, $|a_n| \le A(n)$, *и при* $\sigma \to 1+$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| n^{-\sigma} = O((\sigma - 1)^{-\alpha}), \ \alpha > 0.$$

Тогда при любых $b \ge b_0 > 1$, $T \ge 1$, $x = N + 0,5$ *имеет место формула*

$$\Phi(x) = \sum_{n \le x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^b}{T(b-1)^\alpha}\right) + O\left(\frac{xA(2x)\log x}{T}\right).$$

В 1972 г. А. А. Карацуба получил новую "интегральную" формулу такого рода ([6]), которая связывает $\int_1^x \Phi(y) dy$ с интегралом $\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{f(s)x^{s+1}}{s(s+1)} ds$, что позволяет получить новые результаты при исследовании соответствующих теоретико-числовых вопросов. Именно, имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть ряд* $f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$ *для* $f(s)$ *абсолютно сходится при* $\operatorname{Re} s > 1$; *пусть* $\Phi(\xi) = \sum_{n \le \xi} a_n$, *и при некотором* $b > 1$

$$B(b) = \int_1^{+\infty} \frac{|\Phi(\xi)|}{\xi^{b+1}} d\xi.$$

Тогда при любых $x \ge 1$, $T \ge 2$ *имеет место формула*

$$\int_1^x \Phi(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{F(s)x^{s+1}}{s(s+1)} ds + R(x),$$

где

$$R(x) \le C\left(B(b)\frac{x^{b+1}}{T} + 2^b\left(\frac{x\log x}{T} + \log T\left(\max_{0,5x\le\xi\le 1,5x}|A(\xi)|\right)\right)\right).$$

Во втором разделе данной статьи представлена новая формула, выражающая сумматорную функцию $\Phi(x) = \sum_{n\le x} a_n$ ряда Дирихле (1) через $f(s)$, родственная формуле Перрона ([8]) и интегральной формуле А. А. Карацубы ([6]).

Теорема 1. (Стр. 66) *Пусть ряд* $f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$ *абсолютно сходится при* $\operatorname{Re} s > 1$, $a_n = O(n^{\varepsilon})$, *где* $\varepsilon > 0$ *- произвольно малое действительное число, и при* $\sigma \to 1+$ *имеет место оценка*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} = O((\sigma-1)^{-\alpha}),\ \alpha > 0.$$

Тогда при любых $b \ge b_0 > 1$, $T \ge 1$, $x = N + 0,5$, $H > b$ *имеет место формула*

$$\Phi(x) = \sum_{n\le x} a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} f(s)\frac{x^s H}{s(H-s)}ds +$$

$$+O\left(\frac{x^b H}{T^2(b-1)^{\alpha}}\right) + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}H\log x}{T^2}\right) + O\left(x^{\varepsilon}e^{H\log\frac{x}{x+0,5}}\left(1+\frac{x}{H}\right)\right).$$

Наиболее известным рядом Дирихле является дзета-функция Римана, при $\operatorname{Re} s > 1$ определяемая равенством

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}, \operatorname{Re} s > 1.$$

Используя *тождество Эйлера* ([8], с. 61)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} = \prod_{p\in P}(1-p^{-s})^{-1},\ \operatorname{Re} s > 1,$$

можно получить некоторые связанные с дзета-функцией Римана ряды Дирихле, сумматорные функции коэффициентов которых играют важную роль при решении ряда классических задач теории чисел (см. [3], [4], [6], [7], [10], [11], [12], [13], [14], [18], [19], [20], [22] и др.).

Так, *логарифмическая производная* $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ дзета-функции Римана при $\operatorname{Re} s > 1$ задается рядом Дирихле

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\Lambda(n)n^{-s}, \operatorname{Re} s > 1,$$

коэффициентами которого являются значения *функции Мангольдта* $\Lambda(n)$.

Сумматорной функцией коэффициентов этого ряда будет известная *функция Чебышева*

$$\psi(x) = \sum_{n\le x}\Lambda(n).$$

Используя формулу Перрона и сведения о границе нулей дзета-функции Римана в критической полосе, нетрудно получить для $\psi(x)$ асимптотическую формулу ([8])

$$\psi(x) = \sum_{n\le x}\Lambda(n) = x + O(xe^{-C_1\sqrt{\log x}}),$$

что равносильно *асимптотическому закону распределения простых чисел* ([8])

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1 = \operatorname{li} x + O(xe^{-0,5C_1\sqrt{\log x}}).$$

Хорошо известно и следующее представление функции Чебышева $\psi(x)$ в виде суммы по нулям дзета-функции Римана ([8], с. 80):

$$\psi(x) = x - \sum_{|\operatorname{Im}\rho| \le T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right),$$

где $x = N + 0,5$, $N \in \mathbb{N}$, $2 \le T \le x$, и $\rho = \beta + i\gamma$ — *нетривиальные нули дзета-функции Римана* $\zeta(s)$.

Данное соотношение является классическим примером явных формул, связывающих различные суммы по простым числам с нулями $\zeta(s)$.

В работе Е. И. Деза и Л. В. Варухиной [4] получено аналогичное разложение по нетривиальным нулям дзета-функции Римана для двух арифметических функций, родственных функции Чебышева:

$$\psi_1(x) = \sum_{n \le x} (x - n)\Lambda(n) \text{ и } \psi_2(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) \log \frac{x}{n}.$$

Возведение дзета-функции Римана в k-ю степень при $\operatorname{Re} s > 1$ даст нам ряд Дирихле

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_k(n) n^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

где $\tau_k(n)$ — число натуральных решений уравнения $x_1 \cdot \ldots \cdot x_k = n$. Сумматорная функция коэффициентов этого ряда

$$D_k(x) = \sum_{n \le x} \tau_k(n)$$

есть число точек с натуральными координатами под гиперболической поверхностью

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_k = x,$$

в частности, для $k = 2$, под гиперболой $x_1 \cdot x_2 = x$.

Задачу об асимптотической оценке суммы $D_k(x)$ принято называть *проблемой делителей Дирихле.* Наряду с *проблемой Гаусса о числе целых точек в круге*, она является частным случаем проблемы о числе целых точек в некоторой замкнутой области.

Пользуясь формулой Перрона, нетрудно получить соотношение

$$D_k(x) = \sum_{n \le x} \tau_k(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \zeta^k(s) \frac{x^s}{s} ds, \ c_1 > 1.$$

Перенося прямую интегрирования влево, мы перейдем через полюс функции $\zeta^k(s)\frac{x^s}{s}$ порядка k с вычетом $xP_k(\log x)$ в точке $s = 1$, где P_k – многочлен степени $k - 1$. Таким образом,

$$D_k(x) = xP_k(\log x) + \Delta_k(x),$$

где

$$\Delta_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2 - i\infty}^{c_2 + i\infty} \zeta^k(s) \frac{x^s}{s} ds, \ 0 < c_2 < 1.$$

Классические теоремы Дирихле (1849 г., [20]) и Ландау (1912 г., [22]) дают для остаточного члена $\Delta_k(x)$ оценку

$$\Delta_k(x) = O(x^{\alpha_k+\varepsilon}),$$

где

$$\alpha_k \le 1 - \frac{1}{k},\ k \ge 2. \tag{2}$$

А. А. Карацуба (1971 г., [5]) доказал, что

$$\alpha_k \le 1 - \frac{c}{k^{2/3}},\ k \ge 2, \tag{3}$$

получив, кроме того (1972 г., [6]), оценку $\Delta_k(x)$, равномерную по всем $2 \le x \le \log x$. (Развернутую историю вопроса см., например, в [3].)

В работе Пантелеевой (Деза) Е. И. (1988 г., [10]) была получена оценка

$$\alpha_k \le 1 - \frac{2}{31k^{2/3}}, k \ge 2,$$

равномерная по всем $2 \le k \le \log x$.

В статье [3] Е. И. Деза и Е. И. Варухиной удалось улучшить значение константы c в показателе остаточного члена $O(x^{1-ck^{-2/3}+\varepsilon})$ асимптотической формулы для $D_k(x) = \sum_{n\le x} \tau_k(n)$, получив величину $c = \frac{1}{13}$.

Аналогичные результаты (улучшающие [12]) могут быть получены и для средних значений двух других арифметических функций, подобных функции делителей. Именно, в данной статье мы доказываем две теоремы, дающие асимптотические формулы для функций $\sum_{n\le x} \tau_{k_1}(n) \cdot \ldots \cdot \tau_{k_l}(n)$ и $\sum_{n\le x} \tau_k(n^2)$.

Теорема 2. (Стр. 69) *Имеет место формула*

$$\sum_{n\le x} \tau_{k_1}(n) \cdot \ldots \cdot \tau_{k_l}(n) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{13}m^{-2/3}}(C\log x)^m,$$

где $l \ge 1$, $k_1, \ldots, k_l \ge 2$, $m = k_1 \cdot \ldots \cdot k_l$, P_m *— многочлен степени* $m-1$, θ *— комплексное число,* $|\theta| \le 1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $C > 0$ *— абсолютная постоянная.*

Теорема 3. (Стр. 70) *Имеет место формула*

$$\sum_{n\le x} \tau_k(n^2) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{13}m^{-2/3}}(C\log x)^m,$$

где $k \ge 2$, $m = \frac{k(k+1)}{2}$, P_m *— многочлен степени* $m-1$, θ *— комплексное число,* $|\theta| \le 1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $C > 0$ *— абсолютная постоянная.*

Другим хорошо известным примером рядов Дирихле являются L-функции Дирихле, при $\operatorname{Re} s > 1$ определяемые равенством

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}, \operatorname{Re} s > 1,$$

где χ – характер Дирихле по некоторому модулю D. Произведение нескольких L-функций Дирихле дает при $\operatorname{Re} s > 1$ ряд

$$L_1(s,\chi_1) \cdot \ldots \cdot L_k(s,\chi_k) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}, \operatorname{Re} s > 1,$$

сумматрная функция коэффициентов которого имеет вид

$$C_k(x) = \sum_{n \le x} c_n = \sum_{n_1 \cdot \ldots \cdot n_k \le x} \chi_1(n_1) \cdot \ldots \cdot \chi_k(n_k).$$

Задача об асимптотической оценке функции $C_k(x)$ является обобщением проблемы делителей Дирихле и связана с проблемой делителей в числовых полях, в частности, квадратичном и t-круговом.

Классическими в этой области являются результаты Ландау (1912 г., [22]), который получил для $C_k(x)$ асимптотическую формулу

$$C_k(x) = \sum_{n \le x} c(n) = \mathrm{Res}_{s=1} \frac{L_1(s, \chi_1) \cdot \ldots \cdot L_k(s, \chi_k)}{s} + O(x^{\alpha_k + \varepsilon}),$$

где

$$\alpha_k \le 1 - \frac{2}{k+1}, \ k \ge 2. \tag{4}$$

Отметим, что эта оценка является улучшением результата

$$\alpha_k \le 1 - \frac{1}{k}, \ k \ge 2,$$

который следует из работы Дирихле [20].

А. А. Карацуба (1972 г., [7]) получил для α_k оценку

$$\alpha_k \le 1 - \frac{c}{k^{2/3}}, \ k \ge 2, \tag{5}$$

где k — фиксированное натуральное число, $\chi_1, \ldots, \chi_k$ — характеры Дирихле по некоторым фиксированным модулям $D_1, \ldots, D_k$, а c — абсолютная постоянная.

В работе Пантелеевой (Деза) Е. И. (1988 г., [10]) была получена оценка

$$\alpha_k \le 1 - \frac{2}{31k^{2/3}}, k \ge 2,$$

равномерная по всем $2 \le k \le \log x$, причем здесь была учтена возможность некоторого роста модулей $D_1, \ldots, D_k$, по которым рассматриваются характеры Дирихле $\chi_1, \ldots, \chi_k$.

В статье Деза Е. И. и Варухиной Л. В. [3] было доказано, что можно заменить константу $\frac{2}{31}$ в показателе остаточного члена на константу $c = \frac{1}{13}$. Это дало возможность улучшить остаточные члены проблемы делителей в числовых полях, именно, в квадратичном поле $K = Q(\sqrt{D})$, где D – бесквадратное число, и в t-круговом поле $K = Q(\varsigma)$, где $\varsigma^t = 1$, $t > 1$ – натуральное число ([3]).

Новые результаты о поведении функции $C_k(x)$ позволяют нам получить новые асимптотические формулы для средних значений арифметических функций $\tau_k^K(n) = \sum_{N(U_1 \cdot \ldots \cdot U_k) = n} 1$, $\tau_{k_1}^K(n) \cdot \ldots \cdot \tau_{k_l}^K(n)$ и $\tau_k^K(n^2)$, родственных функции делителей $\tau_k(n)$, в квадратичном поле $K = Q(\sqrt{D})$, D - бесквадратное число, и t-круговом поле $K = Q(\varsigma)$, $\varsigma^t = 1$, с константой $c = \frac{1}{13}$ в показателе остаточного члена. Это уточняет и обобщает результаты работы Пантелеевой (Деза) Е. И. ([12]), где соответствующие формулы с константой $c = \frac{2}{31}$ в показателе остаточного члена были получены для классического случая функций $\tau_{k_1}(n) \cdot \ldots \cdot \tau_{k_l}(n)$ и $\tau_k(n^2)$ в поле рациональных чисел, а также работы [18], где для случая квадратичного и кругового полей получены оценки остаточного члена с константой $\frac{1}{15}$.

Теорема 4. (Стр. 70)*Для квадратичного поля $K = Q(\sqrt{D})$, D – бесквадратное число, имеет место формула*

$$\sum_{n \le x} \tau_{k_1}^K(n) \cdot \ldots \cdot \tau_{k_l}^K(n) = x P_m(\log x) + \theta x^{1 - \frac{1}{19} m^{-2/3}} (C \log x)^{2m},$$

где $l \geq 1$, $k_1, ..., k_l \geq 2$, $m = k_1 \cdot ... \cdot k_l$, P_m *– многочлен степени* $m-1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $|D| \ll \log^2 x$, θ *– комплексное число,* $|\theta| \leq 1$, $C > 0$ *– абсолютная постоянная.*

Теорема 5. (Стр. 73) *Для квадратичного поля* $K = Q(\sqrt{D})$, D *— бесквадратное число, имеет место формула*

$$\sum_{n \leq x} \tau_k^K(n^2) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{19}m^{-2/3}}(C \log x)^{2m},$$

где $k \geq 2$, $m = \frac{k(k+1)}{2}$, P_m *– многочлен степени* $m-1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $|D| \ll \log^2 x$, θ *– комплексное число,* $|\theta| \leq 1$, $C > 0$ *– абсолютная постоянная.*

Теорема 6. (Стр. 75) *Для* t*-кругового поля* $K = Q(\varsigma)$, $\varsigma^t = 1$, *имеет место формула*

$$\sum_{n \leq x} \tau_{k_1}^K(n) \cdot ... \cdot \tau_{k_l}^K(n) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{13}(\varphi(t)m)^{-2/3}}(C \log x)^{\varphi(t)m},$$

где $t > 1$ *– натуральное число,* $t \ll \log^{5/6} x$, $l \geq 1$, $k_1, ..., k_l \geq 2$, $m = k_1 \cdot ... \cdot k_l$, P_m *– многочлен степени* $m-1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $\varphi(t) = |\{x \in \mathbb{N} : x \leq t, (x,t) = 1\}|$ *— функция Эйлера,* θ *— комплексное число,* $|\theta| \leq 1$, $C > 0$ *— абсолютная постоянная.*

Теорема 7. (Стр. 77) *Для* t*-кругового поля* $K = Q(\varsigma)$, $\varsigma^t = 1$, *имеет место формула*

$$\sum_{n \leq x} \tau_k^K(n^2) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{13}(\varphi(t)m)^{-2/3}}(C \log x)^{\varphi(t)m},$$

где $t > 1$ *— натуральное число,* $t \ll \log^{5/6} x$, $k \geq 2$, $m = \frac{k(k+1)}{2}$, P_m *– многочлен степени* $m-1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $\varphi(t) = |\{x \in \mathbb{N} : x \leq t, (x,t) = 1\}|$ *— функция Эйлера,* θ *– комплексное число,* $|\theta| \leq 1$, $C > 0$ *– абсолютная постоянная.*

2. Оценка сумматорных функций рядов Дирихле

В этом разделе мы представляем новую формулу, связывающую ряд Дирихле и его сумматорную функцию. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть ряд* $f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$ *абсолютно сходится при* $\operatorname{Re} s > 1$, $a_n = O(n^{\varepsilon})$, *где* $\varepsilon > 0$ *– произвольно малое действительное число, и при* $\sigma \to 1+$ *имеет место оценка*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} = O((\sigma-1)^{-\alpha}), \ \alpha > 0.$$

Тогда при любых $b \geq b_0 > 1$, $T \geq 1$, $x = N + 0,5$, $H > b$ *имеет место формула*

$$\Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s) \frac{x^s H}{s(H-s)} ds +$$

$$+O\left(\frac{x^b H}{T^2 (b-1)^{\alpha}}\right) + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon} H \log x}{T^2}\right) + O\left(x^{\varepsilon} e^{H \log \frac{x}{x+0,5}} \left(1 + \frac{x}{H}\right)\right).$$

Доказательство.

I. Докажем сначала, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^sH}{s(H-s)}ds=\begin{cases}1+O\left(\frac{a^bH}{T^2|\log a|}\right), & a>1,\\ -a^H+O\left(\frac{a^bH}{T^2|\log a|}\right), & 0<a<1.\end{cases}$$

1. Пусть $a>1$. Рассмотрим контур Γ с вершинами $b\pm iT$, $-U\pm iT$, где U – произвольное действительное число, большее b. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{a^sH}{s(H-s)}ds=Res_{a=0}\frac{a^sH}{s(H-s)}=a^0=1,$$

откуда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^sH}{s(H-s)}ds=1-I_1-I_2-I_3,$$

где I_1,I_2,I_3 – интегралы по верхней, нижней и левой сторонам контура Γ. Интегралы I_1 и I_2 по верхней и нижней сторонам контура Γ оцениваются одинаково:

$$|I_1|=|I_2|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-U}^{b}\frac{a^\sigma H}{\sqrt{\sigma^2+T^2}\cdot\sqrt{(H-\sigma)^2+T^2}}d\sigma\le\frac{H}{T^2}\int_{-U}^{b}a^\sigma d\sigma=$$

$$=\frac{Ha^\sigma}{T\log a}\bigg|_{-\sigma}^{b}=\frac{H(a^b-a^{-U})}{T^2\log a}\le\frac{a^bH}{T^2|\log a|}.$$

Для интеграла I_3 по левой стороне контура Γ имеет место оценка

$$|I_3|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{a^{-U}H}{\sqrt{U^2+t^2}\cdot\sqrt{(H+U)^2+t^2}}dt\le\frac{a^{-U}H}{(H+U)U}\int_{-T}^{T}dt\le\frac{2Ta^{-U}}{U}.$$

Так как для $a>1$ при $U\to+\infty$ имеет место соотношение $\frac{a^{-U}}{U}\to 0$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^sH}{s(H-s)}ds=1+O\left(\frac{a^bH}{T^2|\log a|}\right).$$

2. Пусть $0<a<1$. Рассмотрим контур Γ с вершинами $b\pm iT$, $U\pm iT$, где U — произвольное действительное число, большее H. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{a^sH}{s(H-s)}ds=Res_{s=H}\frac{a^sH}{s(H-s)}=\lim_{s\to H}\frac{(s-H)a^sH}{s(H-s)}=a^{-H},$$

откуда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^sH}{s(H-s)}ds=a^{-H}-I_1-I_2-I_3,$$

где I_1,I_2,I_3 – интегралы по верхней, нижней и левой сторонам контура Γ, соответственно. Интегралы I_1 и I_2 по верхней и нижней сторонам контура Γ оцениваются одинаково:

$$|I_1|=|I_2|\le\frac{1}{2\pi}\int_{b}^{U}\frac{a^\sigma H}{\sqrt{\sigma^2+T^2}\cdot\sqrt{(H-\sigma)^2+T^2}}d\sigma\le\frac{H}{T^2}\int_{b}^{U}a^\sigma d\sigma=$$

$$=\frac{H(a^b-a^U)}{T^2|\log a|}\le\frac{a^bH}{T^2|\log a|}.$$

Для интеграла I_3 по левой стороне контура Γ имеет место оценка

$$|I_3| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{a^U H}{\sqrt{U^2+t^2}\cdot\sqrt{(U-H)^2+t^2}}dt \le \frac{a^U H}{U(U-H)}\int_{-T}^{T}dt \le \frac{2Ta^U H}{U(U-H)}.$$

Так как для $0<a<1$ при $U\to+\infty$ имеет место соотношение $\frac{a^U}{U}\to 0$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^s H}{s(H-s)}ds = a^{-H} + O\left(\frac{a^b H}{T^2|\log a|}\right).$$

II. Ряд $f(s)$ абсолютно и равномерно сходится при $s=b+it$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} f(s)\frac{x^s H}{s(H-s)}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}a_n n^{-s}\right)\frac{x^s H}{s(H-s)}ds =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}a_n\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{(\frac{x}{n})^s H}{s(H-s)}ds\right) = \sum_{n\le x}a_n\left(1+O\left(\frac{(\frac{x}{n})^b H}{T^2|\log\frac{x}{n}|}\right)\right)+$$

$$+\sum_{n>x}a_n\left(-\left(\frac{x}{n}\right)^H + O\left(\frac{(\frac{x}{n})^b H}{T^2|\log\frac{x}{n}|}\right)\right) = \sum_{n\le x}a_n + R_1 + R_2,$$

где

$$R_1 = \sum_{n=1}^{+\infty}a_n O\left(\frac{(\frac{x}{n})^b H}{T^2|\log\frac{x}{n}|}\right),\ R_2 = -\sum_{n>x}a_n\left(\frac{x}{n}\right)^H.$$

Другими словами,

$$\Phi(x) = \sum_{n\le x}a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} f(s)\frac{x^s H}{s(H-s)}ds - R_1 - R_2.$$

1. Оценим сумму R_1. Пусть $R_1 = R_1' + R_1''$, где R_1' содержит слагаемые, для которых $\frac{x}{n}\le 0,5$ или $\frac{x}{n}\ge 2$, а R_1'' содержит слагаемые с $0,5<\frac{x}{n}<2$. Тогда для R_1' выполняется оценка $|\log\frac{x}{n}|\ge 2$, и, с учетом оценки $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n n^{-b} = O((b-1)^{-\alpha})$, мы получаем, что

$$R_1' = O\left(\frac{x^b H}{T^2(b-1)^\alpha}\right).$$

Условие $0,5<\frac{x}{n}<2$ равносильно условию $\frac{x}{2}<n<2x$, то есть

$$R_1'' = O\left(\left(\sum_{\frac{x}{2}<n<2x}|a_n|n^{-b}\right)\frac{x^b H}{T^2|\log\frac{x}{n}|}\right).$$

Если $n=N$, то

$$\log\frac{x}{n} = \log\frac{N+0,5}{N} = \log\left(1+\frac{1}{2N}\right) = \frac{1}{2N} - \frac{1}{8N^2} + ... \ge \frac{1}{2N} - \frac{1}{8N^2} \ge \frac{1}{4N}.$$

Если $n=N-1$, то

$$\log\frac{x}{n} = \log\frac{N+0,5}{N-1} = \log\left(1+\frac{1,5}{N-1}\right) = \frac{1,5}{N-1} - \frac{2,25}{2(N-1)^2} + ... \ge \frac{1}{4N}.$$

Если $n = N+1$, то

$$\left|\log\frac{x}{n}\right| = \left|\log\frac{N+0,5}{N+1}\right| = \left|\log(1-\frac{0,5}{N+1})\right| =$$

$$= \left|-\frac{0,5}{N+1} - \frac{0,25}{2(N+1)^2} - ...\right| = \frac{0,5}{N+1} + \frac{0,25}{2(N+1)^2} + ... \geq \frac{1}{4N}.$$

Тогда, с учетом оценки $a_n = O(n^\varepsilon)$, мы получаем, что

$$O\left(\left(\sum_{N-1\leq n\leq N+1} |a_n| n^{-b}\right)\frac{x^b H}{T^2|\log\frac{x}{n}|}\right) = O\left(\frac{x^\varepsilon HN}{T^2}\right) = O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}H}{T^2}\right).$$

Так как при $\frac{x}{2} < n < N-1$ и при $N+1 < n < 2x$ имеет место оценка

$$\sum_{\frac{x}{2}<n<x-\frac{3}{2}} \left|\log\frac{x}{n}\right|^{-1} + \sum_{x+\frac{1}{2}<n<2x} \left|\log\frac{x}{n}\right|^{-1} = O(x\log x),$$

то

$$R_1'' = O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}H\log x}{T^2}\right).$$

2. Оценим сумму R_2. С учетом оценки $a_n = O(n^\varepsilon)$ получим, что

$$R_2 = O\left(\sum_{n>x} |a_n| \left(\frac{x}{n}\right)^H\right) = O\left(x^H \sum_{n=N+1}^{+\infty} n^{-H+\varepsilon}\right) =$$

$$= O\left(x^H\left((N+1)^{-H+\varepsilon} + \int_{N+1}^{+\infty} u^{-H+\varepsilon}du\right)\right) =$$

$$= O\left(x^H\left((N+1)^{-H+\varepsilon} + \frac{(N+1)^{-H+\varepsilon+1}}{H-\varepsilon-1}\right)\right) =$$

$$= O\left(\left(\frac{x}{N+1}\right)^H (N+1)^\varepsilon\left(1+\frac{N+1}{H-\varepsilon-1}\right)\right) =$$

$$O\left(\left(\frac{x}{x+0,5}\right)^H x^\varepsilon\left(1+\frac{x}{H}\right)\right) = O\left(x^\varepsilon e^{H\log\frac{x}{x+0,5}}\left(1+\frac{x}{H}\right)\right).$$

Таким образом,

$$R_1' + R_1'' + R_2 = O\left(\frac{x^b H}{T^2(b-1)^\alpha}\right) + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}H\log x}{T^2}\right) + O\left(x^\varepsilon e^{H\log\frac{x}{x+0,5}(1+\frac{x}{H})}\right),$$

откуда следует утверждение теоремы. □

3. Средние значения функций, родственных функции делителей

В этом разделе мы прежде всего представляем две теоремы, дающие асимптотические формулы для функций $\sum_{n\leq x}\tau_{k_1}(n)\cdot ...\cdot\tau_{k_l}(n)$ и $\sum_{n\leq x}\tau_k(n^2)$.

Теорема 2. *Имеет место формула*

$$\sum_{n\leq x}\tau_{k_1}(n)\cdot ...\cdot\tau_{k_l}(n) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{13}m^{-2/3}}(C\log x)^m,$$

где $l \geq 1$, $k_1, ..., k_l \geq 2$, $m = k_1\cdot ...\cdot k_l$, P_m *– многочлен степени* $m-1$, θ *– комплексное число,* $|\theta| \leq 1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $C > 0$ *– абсолютная постоянная.*

Доказательство. Доказательство теоремы 2 может быть получено по схеме, приведенной в [12], с использованием новых результатов об оценке дзета-функции Римана в критической полосе, полученной в [3]. Подробное изложение указанной схемы в несколько более общем случае мы приводим ниже при доказательстве теоремы 4. □

Теорема 3. *Имеет место формула*

$$\sum_{n\le x}\tau_k(n^2)=xP_m(\log x)+\theta x^{1-\frac{1}{13}m^{-2/3}}(C\log x)^m,$$

где $k\ge 2$, $m=\frac{k(k+1)}{2}$, P_m *– многочлен степени* $m-1$, θ *– комплексное число,* $|\theta|\le 1$, $m\ll\log^{\frac{5}{6}}x$, $C>0$ *– абсолютная постоянная.*

Доказательство. Доказательство теоремы 3 может быть получено по схеме, приведенной в [12], с использованием новых результатов об оценке дзета-функции Римана в критической полосе, полученной в [3]. Подробное изложение указанной схемы в несколько более общем случае мы приводим ниже при доказательстве теоремы 5. □

Аналогичные результаты могут быть получены для соответствующих арифметических функций в числовых полях. В теоремах 4 и 5 данного раздела мы получим новые асимптотические формулы для двух арифметических функций $\tau_{k_1}^K(n)\cdot\ldots\cdot\tau_{k_l}^K(n)$ и $\tau_k^K(n^2)$, родственных функции делителей $\tau_k^K(n)=\sum_{N(U_1\cdot\ldots\cdot U_k)=n}1$, в квадратичном поле $K=Q(\sqrt{D})$, D — бесквадратное число.

Теорема 4. *Для квадратичного поля* $K=Q(\sqrt{D})$, D *– бесквадратное число, имеет место формула*

$$\sum_{n\le x}\tau_{k_1}^K(n)\cdot\ldots\cdot\tau_{k_l}^K(n)=xP_m(\log x)+\theta x^{1-\frac{1}{19}m^{-2/3}}(C\log x)^{2m},$$

где $l\ge 1$, $k_1,\ldots,k_l\ge 2$, $m=k_1\cdot\ldots\cdot k_l$, P_m *– многочлен степени* $m-1$, $m\ll\log^{\frac{5}{6}}x$, $|D|\ll\log^2 x$, θ *– комплексное число,* $|\theta|\le 1$, $C>0$ *– абсолютная постоянная.*

Доказательство. **I.** Дзета-функция Дедекинда квадратичного поля $K=Q(\sqrt{D})$ имеет вид

$$\zeta_K(s)=\zeta(s)L(s,\chi),$$

где χ – неглавный характер по модулю $|D|$. Тогда при $\operatorname{Re}s>1$ для натурального числа $m=k_1\cdot\ldots\cdot k_l$ имеет место равенство

$$\zeta_K^m(s)=\zeta^m(s)L^m(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{\mathrm{N}(U_1\cdot\ldots\cdot U_m)=n}1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_m^K(n)}{n^s}.$$

Рассмотрим функцию $\Phi_m(s)$, при $\operatorname{Re}s>1$ задаваемую равенством

$$\Phi_m(s)=\prod_p(1+a_1p^{-s}+a_2p^{-2s}+\ldots+a_{m-1}p^{-(m-1)s}),$$

где произведение взято по всем простым числам, а коэффициенты a_ν, $\nu=1,\ldots,m-1$, определяются по формуле

$$a_\nu=\sum_{\lambda=1}^{\nu}(-1)^\lambda\binom{k_1+\nu-\lambda-1}{\nu-\lambda}\cdot\ldots\cdot\binom{k_l+\nu-\lambda-1}{\nu-\lambda}\binom{m}{\lambda}.$$

При этом $a_1 = 0$. Отсюда следует, что

$$\zeta_K^m(s)\Phi_m(s) = \prod_p (1 + \tau_m^K(p)p^{-s} + \tau_m^K(p^2)p^{-2s} + ...)\cdot$$

$$\cdot(1 + a_1 p^{-s} + a_2 p^{-2s} + ... + a_{m-1}p^{-(m-1)s}) = \prod_p (1 + b_1 p^{-s} + b_2 p^{-2s} + ...),$$

где

$$b_i = \begin{cases} \tau_m^K(p^i) + \tau_m^K(p^{i-1})a_1 + ... + \tau_m^K(p)a_{i-1} + a_i, & i \le m-1, \\ \tau_m^K(p^i) + \tau_m^K(p^{i-1})a_1 + ... + \tau_m^K(p^{i-m-1})a_{m-1}, & i > m-1. \end{cases}$$

Пользуясь тождеством

$$\tau_k(p_1^{m_1}...p_r^{m_r}) = \binom{k+m_1-1}{m_1} \cdot ... \cdot \binom{k+m_r-1}{m_r}$$

и определением величин a_ν, получим соотношение

$$b_i = \tau_{k_1}^K(p^i) \cdot ... \cdot \tau_{k_l}^K(p^i).$$

Таким образом,

$$\zeta_K^m(s)\Phi_m(s) = \prod_p (1 + \tau_{k_1}^K(p) \cdot ... \cdot \tau_{k_l}^K(p)p^{-s} + \tau_{k_1}^K(p^2) \cdot ... \cdot \tau_{k_l}^K(p^2)p^{-2s} + ...),$$

откуда при $\operatorname{Re} s > 1$ получаем равенство

$$\zeta_K^m(s)\Phi_m(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau_{k_1}^K(n) \cdot ... \cdot \tau_{k_l}^K(n)}{n^s}.$$

Сумматорная функция коэффициентов этого ряда имеет вид

$$D_m^K(x) = \sum_{n \le x} \tau_{k_1}^K(n) \cdot ... \cdot \tau_{k_l}^K(n).$$

II. В ходе доказательства нам потребуется оценить сверху величину $|D_m^K(\xi)|$. Чтобы использовать для этого известную лемму Марджанишвили [9], используем неравенство ([12])

$$\tau_{k_1}(n) \cdot ... \cdot \tau_{k_l}(n) \le \tau_{k_1 \cdot ... \cdot k_l}(n).$$

Воспользовавшись данным неравенством и леммой Марджанишвили, мы получим теперь для $|D_m^K(\xi)|$ следующую оценку:

$$0 \le |D_m^K(\xi)| \le \sum_{n \le \xi} \tau_{2m}(n) \le \xi \frac{(\log \xi + 2m - 1)^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

III. Для исследования сумматорной функции $D_m^K(x)$ мы можем применить интегральную формулу А. А. Карацубы. Возьмем

$$F(s) = \zeta_K^m(s)\Phi_m(s) = \zeta^m(s)L^m(s,\chi)\Phi_m(s),$$

$$a_n = \tau_{k_1}^K(n) \cdot ... \cdot \tau_{k_l}^K(n),$$

$$A(\xi) = D_m^K(\xi) = \sum_{x \le \xi} \tau_{k_1}^K(n) \cdot ... \cdot \tau_{k_l}^K(n),$$

$$b = 1 + (\log x)^{-1},\ e^2 \le T \le x.$$

Тогда

$$\int_1^x A(\xi)d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{\zeta^m(s)L^m(s,\chi)\Phi_m(s)x^{s+1}}{s(s+1)}ds + R(x),$$

где

$$R(x) \le C\left(\int_1^{+\infty} \frac{|A(\xi)|}{\xi^{b+1}}d\xi \frac{x^{b+1}}{T} + 2^b\left(\frac{x\log x}{T} + \log T\left(\max_{0,5x\le\xi\le 1,5x}|A(\xi)|\right)\right)\right).$$

Как было доказано в пункте II,

$$|A(\xi)| = |D_m^K(\xi)| \le \xi\frac{(\log\xi + 2m - 1)^{2m-1}}{(2m-1)!},$$

поэтому

$$B(b) = \int_1^{+\infty} \frac{|A(\xi)|}{\xi^{b+1}}d\xi \le (4\log x)^{2m},$$

отуда следует, что

$$|R(x)| \le \frac{x^2}{T}(C\log x)^{2m}.$$

Взяв $\eta = 1 - ((2(1+\varepsilon)am)^{-2/3}$, $a = 15,24$, $T = x^{1-\eta}$, рассмотрим интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\zeta^m(s)L^m(s,\chi)\Phi_m(s)x^{s+1}}{s(s+1)}ds$$

по контуру Γ с вершинами $b \pm iT$, $\eta \pm iT$. По теореме Коши,

$$I = Res_{s=1}\frac{\zeta^m(s)L^m(s,\chi)\Phi_m(s)x^{s+1}}{s(s+1)}.$$

Функция $\Phi_m(s)$ является регулярной при $\operatorname{Re} s > 0,5$, и в окрестности точки $s = 1$ имеет место разложение

$$\Phi_m(s) = \Phi_m(1) + \Phi_m^{'}(1)(s-1) + \frac{\Phi_m^{''}(1)}{2!}(s-1)^2 + \dots.$$

Аналогично ведет себя и функция $L(s,\chi)$, поскольку характер χ не является главным. Кроме того,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma_0 + \gamma_1(s-1) + \gamma_2(s-1)^2 + \dots.$$

Наконец,

$$x^{s+1} = x^2\left(1 + \frac{\log x}{1!}(s-1) + \frac{\log^2 x}{2!}(s-1)^2 + \dots\right),$$

$$s^{-1} = b_{01} + b_{11}(s-1) + \dots,$$

$$(s+1)^{-1} = b_{02} + b_{12}(s-1) + \dots.$$

Отсюда следует, что

$$I = x^2 P_m(\log x).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{\zeta^m(s)L^m(s,\chi)\Phi_m(s)x^{s+1}}{s(s+1)}ds = I - I_1 - I_2 - I_3,$$

где I_1, I_2 и I_3 – интегралы по верхней, нижней и левой сторонам контура Г. Используя оценку дзета-функции Римана в критической полосе, доказанную в [3], и аналогичную оценку L-функций Дирихле из той же статьи, мы получаем, что интегралы по верхней, нижней и левой сторонам контура Г оцениваются величиной $x^{\eta+1}(C\log x)^{2m}$:

$$\max\{|I_1|, |I_2|, |I_3|\} = \theta x^{1+\eta}(C\log x)^{2m}.$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{\zeta^m(s)L^m(s,\chi)\Phi_m(s)x^{s+1}}{s(s+1)}ds = x^2\overline{P}_m(\log x) + \overline{\theta}x^{1+\eta}(\overline{C}\log x)^{2m}.$$

Таким образом, мы получаем, что

$$\int_1^x A(\xi)d\xi = x^2\overline{P}_m(\log x) + \overline{\theta}x^{1+\eta}(\overline{C}\log x)^{2m}.$$

Возьмем $h = x^{\frac{1+\eta}{2}}$. Так как функция $A(\xi)$ монотонно не убывает, то

$$h^{-1}\int_{x-h}^{x} A(y)dy \le A(x) \le h^{-1}\int_{x}^{x+h} A(y)dy.$$

С другой стороны, используя оценку $A(\xi)$ и формулу конечных приращений Лагранжа, получим:

$$h^{-1}\int_{x}^{x+h} A(y)dy = xP_m(\log x) + \theta_1 x^{\frac{1+\eta}{2}}(C\log x)^k.$$

Аналогично,

$$h^{-1}\int_{x-h}^{x} A(y)dy = xP_m(\log x) + \theta_2 x^{\frac{1+\eta}{2}}(C\log x)^k.$$

Тогда

$$A(x) = xP_m(\log x) + \theta_2 x^{\frac{1+\eta}{2}}(C\log x)^{2m}.$$

При заданном η имеем

$$\frac{1+\eta}{2} = 1 - \frac{1}{2(2(1+\varepsilon)a)^{2/3}}m^{-2/3},$$

где $a = 15,24$ – константа из оценки $\zeta(s)$ в критической полосе. Поскольку

$$0,5(2(1+\varepsilon)15,24)^{-2/3} > \frac{1}{19},$$

то

$$\frac{1+\eta}{2} < 1 - \frac{1}{19}m^{-2/3},$$

и мы получаем формулу

$$\sum_{n\le x}\tau_{k_1}^K(n)\cdot\ldots\cdot\tau_{k_l}^K(n) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{19}m^{-2/3}}(C\log x)^{2m}.$$

Теорема доказана. □

Теорема 5. *Для квадратичного поля $K = Q(\sqrt{D})$, D — бесквадратное число, имеет место формула*

$$\sum_{n\le x}\tau_k^K(n^2) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{19}m^{-2/3}}(C\log x)^{2m},$$

где $k \ge 2$, $m = \frac{k(k+1)}{2}$, P_m — многочлен степени $m-1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $|D| \ll \log^2 x$, θ — комплексное число, $|\theta| \le 1$, $C > 0$ – абсолютная постоянная.

Доказательство. **I.** Дзета-функция Дедекинда квадратичного поля $K = Q(\sqrt{D})$ имеет вид

$$\zeta_K(s) = \zeta(s)L(s,\chi),$$

где χ – неглавный характер по модулю $|D|$. Тогда при $\operatorname{Re} s > 1$ для натурального числа $m = \frac{k(k+1)}{2}$ справедливо равенство

$$\zeta_K^m(s) = \zeta^m(s)L^m(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{\mathrm{N}(U_1\cdot\ldots\cdot U_m)=n} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_m^K(n)}{n^s}.$$

При $\operatorname{Re} s > 1$ рассмотрим ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tau_k^K(n^2)n^{-s} = \prod_p (1 + \tau_k^K(p^2)p^{-s} + \tau_k^K(p^4)p^{-2s} + \ldots).$$

Так как $\tau_k(p^2) = \frac{k(k+1)}{2}$, и при $\operatorname{Re} s > 1$ имеет место равенство

$$\zeta^{\frac{k(k+1)}{2}}(s) = \prod_p (1 + \frac{k(k+1)}{2}p^{-s} + \ldots),$$

а функция $L(s,\chi)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0,5$, то

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tau_k^K(n^2)n^{-s} = \zeta^m(s)L^m(s,\chi)\Phi(s), \operatorname{Re} s > 1,$$

где $\Phi(s)$ — регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0,5$ функция. Сумматорная функция этого ряда имеет вид

$$D_m^K(x) = \sum_{n\le x} \tau_k^K(n^2).$$

II. В ходе доказательства нам потребуется оценить сверху величину $|D_m^K(\xi)|$. Для этого используем доказанное в [12] неравенство

$$\tau_k(n^2) \le \tau_{\frac{k(k+1)}{2}}(n).$$

Воспользовавшись леммой Марджанишвили [9], мы получим теперь для $|D_m^K(\xi)|$ следующую оценку:

$$0 \le |D_m^K(\xi)| \le \sum_{n\le\xi} \tau_{2m}(n) \le \xi \frac{(\log\xi + 2m - 1)^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

III. Для исследования сумматорной функции $D_m^K(x)$ вновь применим интегральную формулу А. А. Карацубы, взяв

$$F(s) = \zeta^m(s)L^m(s,\chi)\Phi(s), \quad a_n = \tau_k^K(n^2), \quad A(\xi) = D_m^K(\xi) = \sum_{x\le\xi} \tau_k^K(n^2),$$

$b = 1 + (\log x)^{-1},\ e^2 \le T \le x$. Тогда, действуя по стандартной схеме, мы получим равенство

$$\int_1^x A(\xi)d\xi = x^2\overline{P}_m(\log x) + \overline{\theta}x^{1+\eta}(\overline{C}\log x)^{2m}.$$

Взяв $h = x^{\frac{1+\eta}{2}}$ и применяя метод асимптотического дифференцирования, мы получим асимптотическую формулу

$$A(x) = xP_m(\log x) + \theta_2 x^{\frac{1+\eta}{2}}(C\log x)^{2m},$$

что при заданных параметрах дает утверждение теоремы. Теорема доказана.

В следующих двух теоремах данного раздела мы получим новые асимптотические формулы для двух арифметических функций $\tau_{k_1}^K(n)\cdot\ldots\cdot\tau_{k_l}^K(n)$ и $\tau_k^K(n^2)$, родственных функции делителей $\tau_k^K(n)$, в t-круговом поле $K = Q(\varsigma)$, $\varsigma^t = 1$.

Теорема 6. *Для t-кругового поля $K = Q(\varsigma)$, $\varsigma^t = 1$, имеет место формула*

$$\sum_{n\le x}\tau_{k_1}^K(n)\cdot\ldots\cdot\tau_{k_l}^K(n) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{13}(\varphi(t)m)^{-2/3}}(C\log x)^{\varphi(t)m},$$

где $t > 1$ – натуральное число, $t \ll \log^{5/6} x$, $l \ge 1$, $k_1,\ldots,k_l \ge 2$, $m = k_1\cdot\ldots\cdot k_l$, P_m – многочлен степени $m-1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $\varphi(t) = |\{x \in \mathbb{N} : x \le t, (x,t) = 1\}|$ – функция Эйлера, θ – комплексное число, $|\theta| \le 1$, $C > 0$ – абсолютная постоянная.

Доказательство. Дзета-функция Дедекинда t-кругового поля имеет вид

$$\zeta_K(s) = \zeta(s)L_2(s,\chi_2^*)\cdot\ldots\cdot L_{\varphi(t)}(s,\chi_{\varphi(t)}^*),$$

где $\chi_2^*,\ldots,\chi_{\varphi(t)}^*$ – неглавные характеры по модулям $d_2(d_2|t)$, ..., $d_{\varphi(t)}(d_{\varphi(t)}|t)$.

Тогда при $\operatorname{Re} s > 1$ для натурального числа $m = k_1\cdot\ldots\cdot k_l$ справедливо равенство

$$\zeta_K^m(s) = \zeta^m(s)L_2^m(s,\chi_2^*)\cdot\ldots\cdot L_{\varphi(t)}^m(s,\chi_{\varphi(t)}^* = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{\mathrm{N}(U_1\cdot\ldots\cdot U_m)=n}1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_m^K(n)}{n^s}.$$

Пользуясь соображениями, подробно рассмотренными выше, и учитывая, что L-функции Дирихле, возникающие в представлении дзета-функции Дедекинда t-кругового поля, есть функции с неглавными характерами, мы можем перейти от ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\tau_m^K(n)n^{-s}$ к нужному нам ряду $\sum_{n=1}^{+\infty}\tau_{k_1}^K(n)\cdot\ldots\cdot\tau_{k_l}^K(n)n^{-s}$, использовав вспомогательную функцию $\Phi_m(s)$. Именно, при $\operatorname{Re} s > 1$ имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\tau_{k_1}^K(n)\cdot\ldots\cdot\tau_{k_l}^K(n)}{n^s} = \zeta_K^m(s)\Phi_m(s),$$

где $\Phi_m(s)$ – регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0,5$ функция. Сумматорная функция коэффициентов этого ряда имеет вид

$$D_m^K(x) = \sum_{n\le x}\tau_{k_1}^K(n)\cdot\ldots\cdot\tau_{k_l}^K(n).$$

II. В ходе доказательства нам потребуется оценить сверху величину $|D_m^K(\xi)|$. Поскольку, как было доказано ранее,

$$\tau_{k_1}(n)\cdot\ldots\cdot\tau_{k_l}(n) \le \tau_{k_1\cdot\ldots\cdot k_l}(n),$$

то, воспользовавшись леммой Марджанишвили, мы получим для $|D_m^K(\xi)|$ следующую оценку:

$$0 \le |D_m^K(\xi)| \le \xi\frac{(\log\xi + \varphi(t)m - 1)^{\varphi(t)m-1}}{(\varphi(t)m-1)!}.$$

III. Для исследования сумматорной функции $D_m^K(x)$ мы можем применить лемму 1. Возьмем

$$F(s) = \zeta_K^m(s)\Phi_m(s) = \zeta^m(s)L_2^m(s,\chi_2^*)\cdot\ldots\cdot L_{\varphi(t)}^m(s,\chi_{\varphi(t)}^*)\Phi_m(s),$$

$$a_n = \tau_{k_1}^K(n)\cdot\ldots\cdot\tau_{k_l}^K(n),$$

$$A(\xi) = D_m^K(\xi) = \sum_{x\le\xi}\tau_{k_1}^K(n)\cdot\ldots\cdot\tau_{k_l}^K(n),$$

$$b = 1+(\log x)^{-1},\ e^2\le T\le x.$$

Тогда

$$|A(\xi)| = |D_m^K(\xi)| \le \xi\frac{(\log\xi+\varphi(t)m-1)^{\varphi(t)m-1}}{(\varphi(t)m-1)!},$$

поэтому

$$B(b) = \int_1^{+\infty}\frac{|A(\xi)|}{\xi^{b+1}}d\xi \le (4\log x)^{\varphi(t)m},$$

отуда следует, что

$$|R(x)| \le \frac{x^2}{T}(C\log x)^{\varphi(t)m}.$$

Взяв $\eta = 1-(((1+\varepsilon)a(\varphi(t)m))^{-2/3}$, $a = 15,24$, $T = x^{1-\eta}$, рассмотрим интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\zeta^m(s)L_2^m(s,\chi_2^*)\cdot\ldots\cdot L_{\varphi(t)}^m(s,\chi_{\varphi(t)}^*)\Phi_m(s)x^{s+1}}{s(s+1)}ds$$

по контуру Γ с вершинами $b\pm iT$, $\eta\pm iT$. Нетрудно показать ([12]), что

$$I = x^2P_m(\log x).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{\zeta^m(s)L_2^m(s,\chi_2^*)\cdot\ldots\cdot L_{\varphi(t)}^m(s,\chi_{\varphi(t)}^*)\Phi_m(s)x^{s+1}}{s(s+1)}ds = I-I_1-I_2-I_3,$$

где I_1, I_2 и I_3 — интегралы по верхней, нижней и левой сторонам контура Γ. Используя оценку дзета-функции Римана в критической полосе, доказанную в теореме [3], и аналогичную оценку L-функций Дирихле, мы получаем, что интегралы по верхней, нижней и левой сторонам контура Γ оцениваются величиной $x^{\eta+1}(C\log x)^{\varphi(t)m}$:

$$\max\{|I_1|,|I_2|,|I_3|\} = \theta x^{1+\eta}(C\log x)^{\varphi(t)m}.$$

Таким образом, мы получаем, что

$$\int_1^x A(\xi)d\xi = x^2\overline{P}_m(\log x)+\overline{\theta}x^{1+\eta}(\overline{C}\log x)^{\varphi(t)m}.$$

Взяв $h = x^{\frac{1+\eta}{2}}$ и пользуясь стандартными рассуждениями, получим равенство

$$A(x) = xP_m(\log x)+\theta_2x^{\frac{1+\eta}{2}}(C\log x)^{\varphi(t)m}.$$

При заданном η имеем

$$\frac{1+\eta}{2} = 1-\frac{1}{2((1+\varepsilon)a)^{2/3}}(\varphi(t)m)^{-2/3},$$

где $a = 15,24$ – константа из оценки $\zeta(s)$ в критической полосе. Поскольку

$$0,5((1+\varepsilon)15,24)^{-2/3} > \frac{1}{13},$$

то

$$\frac{1+\eta}{2} < 1 - \frac{1}{13}(\varphi(t)m)^{-2/3},$$

и мы получаем формулу

$$\sum_{n\le x} \tau_{k_1}^K(n)\cdot\ldots\cdot\tau_{k_l}^K(n) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{15}m^{-2/3}}(C\log x)^{\varphi(t)m}.$$

Теорема доказана. □

Теорема 7. *Для t-кругового поля $K = Q(\varsigma)$, $\varsigma^t = 1$, имеет место формула*

$$\sum_{n\le x} \tau_k^K(n^2) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{13}(\varphi(t)m)^{-2/3}}(C\log x)^{\varphi(t)m},$$

где $t > 1$ – натуральное число, $t \ll \log^{5/6} x$, $k \ge 2$, $m = \frac{k(k+1)}{2}$, P_m – многочлен степени $m-1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $\varphi(t) = |\{x \in \mathbb{N} : x \le t, (x,t) = 1\}|$ – функция Эйлера, θ – комплексное число, $|\theta| \le 1$, $C > 0$ — абсолютная постоянная.

Доказательство. Как было показано ранее, дзета-функция Дедекинда t-кругового поля имеет вид

$$\zeta_K(s) = \zeta(s)L_2(s,\chi_2^*)\cdot\ldots\cdot L_{\varphi(t)}(s,\chi_{\varphi(t)}^*),$$

где $\chi_2^*, \ldots, \chi_{\varphi(t)}^*$ – неглавные характеры по модулям $d_2(d_2|t)$, ..., $d_{\varphi(t)}(d_{\varphi(t)}|t)$.

Тогда при $\operatorname{Re} s > 1$ для натурального числа $m = \frac{k(k+1)}{2}$ справедливо равенство

$$\zeta_K^m(s) = \zeta^m(s)L_2^m(s,\chi_2^*)\cdot\ldots\cdot L_{\varphi(t)}^m(s,\chi_{\varphi(t)}^* = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{\mathrm{N}(U_1\cdot\ldots\cdot U_m)=n} 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_m^K(n)}{n^s}.$$

Учитывая, что L-функции Дирихле, возникающие в представлении дзета-функции Дедекинда t-кругового поля, есть функции с неглавными характерами, мы можем перейти от ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\tau_m^K(n)n^{-s}$ к нужному нам ряду $\sum_{n=1}^{+\infty}\tau_k^K(n^2)n^{-s}s$, использовав вспомогательную функцию $\Phi(s)$. Именно, при $\operatorname{Re} s > 1$ имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\tau_k^K(n)}{n^s} = \zeta_K^m(s)\Phi(s),$$

где $\Phi(s)$ — регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0,5$ функция. Сумматорная функция коэффициентов этого ряда имеет вид

$$D_m^K(x) = \sum_{n\le x}\tau_k^K(n^2).$$

II. В ходе доказательства нам потребуется оценка сверху величины $|D_m^K(\xi)|$:

$$0 \le |D_m^K(\xi)| \le \xi\frac{(\log\xi + \varphi(t)m - 1)^{\varphi(t)m-1}}{(\varphi(t)m-1)!}.$$

III. Для исследования сумматорной функции $D_m^K(x)$ мы можем применить лемму 1. Возьмем

$$F(s) = \zeta_K^m(s)\Phi(s) = \zeta^m(s)L_2^m(s,\chi_2^*)\cdot\ldots\cdot L_{\varphi(t)}^m(s,\chi_{\varphi(t)}^*)\Phi(s),$$

$$a_n = \tau_k^K(n^2),$$

$$A(\xi) = D_m^K(\xi) = \sum_{x \le \xi} \tau_k^K(n^2),$$

$$b = 1 + (\log x)^{-1},\ e^2 \le T \le x.$$

Тогда

$$\int_1^x A(\xi)d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{\zeta^m(s)L_2^m(s,\chi_2^*)\cdot\ldots\cdot L_{\varphi(t)}^m(s,\chi_{\varphi(t)}^*)\Phi(s)x^{s+1}}{s(s+1)}ds + R(x),$$

где

$$R(x) \le C\left(\int_1^{+\infty}\frac{|A(\xi)|}{\xi^{b+1}}d\xi\frac{x^{b+1}}{T} + 2^b\left(\frac{x\log x}{T} + \log T\left(\max_{0,5x\le\xi\le 1,5x}|A(\xi)|\right)\right)\right).$$

Взяв $\eta = 1-(((1+\varepsilon)a(\varphi(t)m))^{-2/3}$, $a = 15,24$, $T = x^{1-\eta}$ и используя стандартные рассуждения, мы получим равенство

$$\int_1^x A(\xi)d\xi = x^2\overline{P}_m(\log x) + \overline{\theta}x^{1+\eta}(\overline{C}\log x)^{\varphi(t)m}.$$

Взяв $h = x^{\frac{1+\eta}{2}}$ и применяя метод асимптотического дифференцирования, мы получим, что

$$A(x) = xP_m(\log x) + \theta_2 x^{\frac{1+\eta}{2}}(C\log x)^{\varphi(t)m},$$

что при заданных параметрах дает утверждение теоремы. Теорема доказана. □

4. Заключение

Полученные результаты находят свои применения в различных вопросах аналитической теории чисел. Так, пользуясь общими формулами, можно получить соответствующие результаты для кольца $G = Z[i]$ целых чисел Гаусса: $Z[i] = \{\alpha = a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$. Арифметическая функция $\tau_k^G(n) = \sum_{N(\alpha_1\cdot\ldots\cdot\alpha_k)=n} 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in Z[i], n \in \mathbb{N}$, дает количество представлений натурального числа n как нормы произведения k чисел Гаусса. Поскольку для целого положительного числа m его норма $N(m)$ вычисляется по формуле $N(m) = m^2$, то функция $\tau_k^G(n)$ является обобщением функции делителей $\tau_k(n)$. Таким образом, доказанные выше теоремы могут быть использованы при получении асимптотических формул для средних значений функции делителей $\tau_k^G(n)$, равно как и для двух арифметических функций $\tau_{k_1}^G(n)\cdot\ldots\cdot\tau_{k_l}^G(n)$ и $\tau_k^G(n^2)$, родственных функции делителей $\tau_k^G(n)$, в кольце целых чисел Гаусса (см. [13]).

С другой стороны, было бы интересно рассмотреть конкретные задачи на применение полученной в разделе 2 формулы, родственной формуле Перрона (см. [14]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1981.

2. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. – М.: Физматлит, 1994.

3. Деза Е. И., Варухина Л. В. Об оценке дзетовой суммы и проблеме делителей Дирихле // Вестник Сант-Петербургского Университета. Серия 1 (математика, механика, астрономия). 2013. Вып. 4. С. 15–24.

4. Деза Е. И., Варухина Л. В. Вопросы суммирования арифметических функций, родственных функции Чебышева // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, № 2. С. 319–333.

5. Карацуба А. А. Оценки тригонометрических сумм методом И.М. Виноградова и их применение // Труды Матем. института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1971. Т. 112. С. 241–255.

6. Карацуба А. А. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле // Известия АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36, № 3. С. 475–483.

7. Карацуба А. А. Проблема делителей Дирихле в числовых полях // Доклады АН СССР. 1972. Т. 204, № 3. С. 55–59.

8. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. – М.: Наука, 1983.

9. Марджанишвили К. К. Оценка одной арифметической суммы // Доклады АН СССР. 1939. Т. 22, № 7. С. 391–393.

10. Пантелеева (Деза) Е. И. К вопросу о проблеме делителей Дирихле в числовых полях // Математические заметки. 1988. Т. 44, вып. 4. С. 494–505.

11. Пантелеева (Деза) Е. И. Одно замечание к вопросу о проблеме делителей // Математические заметки. 1993. Т. 53, вып. 4. С. 148–152.

12. Пантелеева (Деза) Е. И. О средних значениях некоторых арифметических функций // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 5. С. 7–12.

13. Пантелеева (Деза) Е. И. Проблема делителей Дирихле в кольце целых Гауссовых чисел // Труды МПГУ. 2001. № 4. С. 23–34.

14. Пантелеева (Деза) Е. И., Варухина Л. В. Об оценке сумматорных функций рядов Дирихле // Научные труды математического факультета МПГУ. Юбилейный сборник. – М.: МПГУ, 2000. С. 45–56.

15. Прахар К. Распределение простых чисел. – М.: Мир, 1967.

16. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. – М.: ИЛ, 1953.

17. Титчмарш Е. К. Теория функций. – М.: Наука, 1980.

18. Deza E., Varukhina L. On mean values of some arithmetic functions in number fields // Discrete Mathematics. 2008. Vol. 308. P. 4892–4899.

19. Deza E., Varukhina L. Representations of arithmetic sums over non-trivial zeros of the zeta function // Asian-European Journal of Mathematics. 2008. Vol. 1, issue 4. P. 509–519.

20. Dirichlet P. Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie // Abh. Acad. Wiss., Berlin. 1849. Werke 2. P. 49–66.

21. Ivič A. The Riemann zeta-function. – New Jork: J. Wiley & Sons, 1985.

22. Landay E. Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math-Phys. Kl. 1912. Hft. 6. S. 687–771.

REFERENCES

1. Vinogradov, I. M. 1981, "Bases of the theory of numbers", *M.: Nauka.*

2. Voronin, S. M. & Karatsuba, A. A. 1994, "Riemann zeta function", *M.: Fizmatlit.*

3. Deza, E. I., Varukhina, L. V. 2013, "On an estimation of zeta sum and on Dirichlet divisor problem", *Vestnik of Saint Petersburg University. Ser. 1 (Mathematics, Mechanics, Astronomy)*, Vol. 4, pp. 15–24.

4. Deza, E. I., Varukhina, L. V. 2018, "Problems of the summation of arithmetical functions, relative to Chebyshev function", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 19, N 2, pp. 319–333.

5. Karatsuba, A. A. 1971, "Estimates of trigonometric summs by Vinogradov method and their application", *Works of Math. instute of Steklov*, Vol. 112, pp. 241–255.

6. Karatsuba, A. A. 1972, "Uniform estimate of error term in Dirichlet divisor problem", *Izv. Acad. of Sci. SSSR, Math.*, Vol. 36, № 3, pp. 475–483.

7. Karatsuba, A. A. 1972, "Dirichlet divisor problem in Number Fields", *Dokl. of Acad. of Sc. URSS*, Vol. 204, № 3, pp. 55–59.

8. Karatsuba, A. A. 1983, "Bases of the analytical theory of numbers", *M.: Nauka.*

9. Mardganishvili K. K. 1939, "An estimate of one arithmetic sum", *Dokl. Acad. of Sci. URSS*, Vol. 22, № 7.

10. Panteleeva (Deza), E. I. 1988, "Dirichlet divisor problem in number fields", *Mathematical notes*, Vol. 44, issue 4, pp. 494–505.

11. Panteleeva (Deza), E. I. 1993, "A remark to Divisor problem", *Mathematical notes*, Vol. 53, issue 4, pp. 148–152.

12. Panteleeva (Deza), E. I. 1994, " Average values of some arithmetic functions", *Mathematical notes*, Vol. 55, issue 5, pp. 7–12.

13. Panteleeva (Deza), E. I. 2001, "Dirichlet divisor problem in the ring of the Gaussian integers", *Works of MPGU*, № 4. pp. 23–34.

14. Panteleeva (Deza), E. I.& Varukhina, L. V. 2000, "Estimations of adding function of Dirichlet series", in *Scientific works of mathematical department of MPGU*, *M.: MPGU*, pp. 45–56.

15. Prahar, K. 1967, "Distribution of prime numbers", *M.: Mir.*

16. Titchmarsh, E. K. 1953, "The theory of the Riemann zeta function", *M.: IL.*

17. Titchmarsh, E. K. 1980, "The theory of functions", *M.: Nauka.*

18. Deza, E. & Varukhina, L. 2008, "On mean values of some arithmetic functions in number fields", *Discrete Mathematics*, Vol. 308, pp. 4892–4899.

19. Deza, E. & Varukhina, L. 2008, "Representations of arithmetic sums over non-trivial zeros of the zeta function", *Asian-European Journal of Mathematics*, Vol. 1, issue 4, pp. 509–519.

20. Dirichlet, P. 1849, "Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie", *Abh. Acad. Wiss., Berlin*, Werke 2, pp. 49–66.

21. Ivic̆, A. 1985, "The Riemann zeta function", *New Jork: J. Wiley & Sons.*

22. Landay, E. 1912, "Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen", *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math-Phys. Kl.*, Hft. 6, ss. 687–771.

Получено 9.06.2019 г.
Принято в печать 12.07.2019 г.