

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-47-54

Об оценках сверху числа минимальных полиномов
с малой производной в корне¹

Д. В. Васильев, А. С. Кудин

Васильев Денис Владимирович — кандидат физико-математических наук, заведующий отделом теории чисел, Институт математики НАН Беларуси (г. Минск).

e-mail: vasilyev@im.bas-net.by

Кудин Алексей Сергеевич — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела теории чисел, Институт математики НАН Беларуси (г. Минск).

e-mail: knxd@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматривается проблема получения оценок числа минимальных целочисленных полиномов $P(x)$ степени n и высоты не более Q таких, что производная полинома в одном из его корней α ограничена, $|P'(\alpha)| < Q^{1-v}$ для некоторого $v > 0$.

Данная проблема естественным образом возникает во многих задачах метрической теории чисел, связанных с получением эффективных оценок меры точек, в которых целочисленные полиномы из некоторого класса принимают малые значения. Например, в работе Р. Бейкера 1976 года подобный результат использовался для оценки сверху размерности Хаусдорфа в проблеме Бейкера-Шмидта.

Доказано, что число полиномов $P(x)$, определенных выше, с корнями α на интервале $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ не превосходит $c_1(n)Q^{n+1-\frac{3}{5}v}$ при $Q > Q_0(n)$ и $1.5 \leq v \leq \frac{1}{2}(n+1)$. Результат основан на усиленной версии леммы из монографии А.О. Гельфонда "Трансцендентные и алгебраические числа" о выделении малого делителя целочисленного полинома.

Ключевые слова: диофантовы приближения, размерность Хаусдорфа, трансцендентные числа, результат, матрица Сильвестра, неприводимый делитель, лемма Гельфонда

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:

Д. В. Васильев, А. С. Кудин. Об оценках сверху числа минимальных полиномов с малой производной в корне // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 47–54.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-47-54

On upper bounds for the number of minimal polynomials with
bounded derivative at a root²

D. V. Vasilyev, A. S. Kudin

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта БРФФИ Ф17-101.

²The work was supported by the BRFFI grant F17-101.

Vasilyev Denis Vladimirovich — Ph. D., head of number theory department, Institute of Mathematics NAS Belarus (Minsk).

e-mail: vasilyev@im.bas-net.by

Kudin Alexey Sergeevich — Ph. D., research fellow, number theory department, Institute of Mathematics NAS Belarus (Minsk).

e-mail: knxd@yandex.ru

Abstract

In the paper we consider the problem of obtaining estimates for the number of minimal integer polynomials $P(x)$ of degree n and height not exceeding Q , such that the derivative is bounded at a root α , i.e. $|P'(\alpha)| < Q^{1-v}$ for some $v > 0$.

This problem occurs naturally in many problems of metric number theory related to obtaining effective estimates for the measure of points at which integral polynomials from some class take small values. For example, in 1976 R. Baker has used such an estimate for obtaining an upper bound for the Hasdorff dimension in Baker-Schmidt problem.

We prove that the number of polynomials $P(x)$ defined above having roots α on the interval $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ doesn't exceed $c_1(n)Q^{n+1-\frac{3}{5}v}$ for $Q > Q_0(n)$ and $1.5 \leq v \leq \frac{1}{2}(n+1)$. The result is based on an improvement to the lemma on small integer polynomial divisor extraction from A.O. Gelfond's monograph "Transcendental and algebraic numbers".

Keywords: Diophantine approximation, Hausdorff dimension, transcendental numbers, resultant, Sylvester matrix, irreducible divisor, Gelfond's lemma

Bibliography: 13 titles.

For citation:

D. V. Vasilyev, A. S. Kudin, 2019, "On upper bounds for the number of minimal polynomials with bounded derivative at a root", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 47–54.

1. Введение

Многие проблемы в метрической теории диофантовых приближений и теории трансцендентных чисел формулируются в терминах множеств вещественных, комплексных, или p -адических чисел, удовлетворяющих неравенствам

$$|P(x)| < H(P)^{-w_1}, \quad |P(z)| < H(P)^{-w_2}, \quad |P(\omega)|_p < H(P)^{-w_3}, \quad (1)$$

где $w_i > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{Q}_p$, для бесконечного числа полиномов $P(x)$ из некоторого класса $\mathcal{P} \subset \mathbb{Z}[x]$. Множества, задаваемые неравенствами (1), устроены как правило сложно, поэтому их включают в более простые множества: вещественные интервалы, комплексные круги, p -адические цилиндры. При этом необходимо, чтобы меры включающих и включаемых множеств были как можно более близки.

Для целочисленного полинома $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ обозначим как $H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$ его высоту и как $\deg P = n$ его степень. Множества целочисленных полиномов ограниченной степени и высоты обозначим как

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n &:= \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \leq n\}, \\ \mathcal{P}_n(Q) &:= \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \leq n, H(P) \leq Q\}. \end{aligned}$$

Для матрицы $M \in \mathbb{R}^{m \times n} = (a_{ij})$ определим ее перманент как

$$\text{perm } M = \begin{cases} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}(n, m)} a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{m\sigma(m)}, & m \leq n, \\ \text{perm } M^T, & m > n, \end{cases}$$

где $P(n, m)$ — множество всех m -перестановок $\{1, \dots, n\}$.

Рассмотрим, например, вещественный случай (1). Решения первого неравенства (1) принадлежат интервалам вида

$$|x - \alpha_1| < 2^{n-1} |P(x)| |P'(\alpha_1)|^{-1},$$

где α_1 — ближайший к x корень $P(x)$. Эти интервалы могут быть достаточно велики при малых значениях $|P'(\alpha_1)|$. Естественный подход к решению этой проблемы — найти оценку сверху для числа полиномов с малой производной в корне.

Этот подход был использован в работе Р. Бейкера [1]. Для некоторого целого $n \geq 1$ и вещественных $H \geq 1$, $v \geq 0$ Бейкер рассматривает множество $\tilde{\mathcal{P}}_n(H, v)$ примитивных неприводимых полиномов $P(x)$ степени n и высоты H , которые также являются лидирующими (а именно, $|a_n| = H$), для которых найдется корень $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ с условием $|P'(\alpha_1)| < H^{1-v}$. Бейкер доказал, что при $0 \leq v < 1$ и достаточно больших H справедливо

$$\#\tilde{\mathcal{P}}_n(H, v) < c_1(n) H^{n-v}, \quad (2)$$

где $c_1(n)$ — некоторая величина, которая зависит только от n . Используя этот результат, он получил для $n \geq 3$ и $w_1 > \frac{1}{3}(n^2 + n - 3)$ точную оценку сверху размерности Хаусдорфа множества чисел $x \in \mathbb{R}$, для которых найдется бесконечное число целочисленных полиномов степени n , удовлетворяющих первому неравенству (1). Проблема вычисления размерности Хаусдорфа этого множества была окончательно решена В. Берником [4] с использованием других методов. Тем не менее, оценки вида (2) могут найти применение во многих проблемах метрической теории диофантовых приближений, таких как [12, 8, 11, 9, 2, 7, 3, 6].

Для некоторого подмножества $D \subseteq \mathbb{C}$, целого $n \geq 1$ и действительных $Q \geq 1$, $v \geq 0$ обозначим как $\mathcal{P}_n(Q, v, D)$ множество примитивных неприводимых полиномов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ с положительным старшим коэффициентом, которые имеют корень $\alpha \in D$ такой, что $|P'(\alpha)| < Q^{1-v}$. По определению, множество $\mathcal{P}_n(Q, v, D)$ содержит только минимальные полиномы, следовательно, подсчитывая элементы в $\mathcal{P}_n(Q, v, D)$, мы по сути подсчитываем алгебраические числа с определенными свойствами.

Мы будем рассматривать алгебраические числа на интервале $I_0 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Ранее была получена оценка сверху вида (2) для несколько более широкого диапазона v .

ТЕОРЕМА 1 ([5]). *Для $n \geq 1$ найдутся $c_1(n) > 0$ и $Q_0(n) > 0$ такие, что для любого $Q > Q_0(n)$ и для всех $0 \leq v \leq \frac{3}{2}$ верно*

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v, I_0) \leq c_1(n) Q^{n+1-v}.$$

В теореме 1 диапазон v не зависит от n , что значительно ограничивает приложения для больших значений n . Получена следующая оценка сверху, которая частично разрешает данную проблему.

ТЕОРЕМА 2. *Для $n \geq 9$ найдутся $c_1(n) > 0$ и $Q_0(n) > 0$ такие, что для любого $Q > Q_0(n)$ и для всех $1.5 \leq v \leq \frac{1}{2}(n+1)$ справедлива оценка*

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v, I_0) \leq c_1(n) Q^{n+1-v\gamma}, \quad (3)$$

где $\gamma = \frac{3}{5}$.

Доказательство теоремы 2 достаточно объемно, поэтому мы приведем лишь его основные шаги. Важной частью доказательства является следующая лемма из работы К.И. Тищенко.

ЛЕММА 1 ([13, лемма 3.3]). *Пусть даны полиномы $P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg P_i = n_i \geq 0$. Для любого $\xi \in \mathbb{C}$ результат полиномов P_1 и P_2 равен определителю матрицы Сильвестра для их сдвинутых аналогов $S_1(x) = P_1(x + \xi)$ и $S_2(x) = P_2(x + \xi)$.*

В доказательстве будет применяться адаптированная версия леммы 1, которую мы приводим ниже. Заметим, что если взять в (4) перманент с одним столбцом, мы получим лемму А.О. Гельфонда [10, глава 3, §4, лемма V], а (5) является расширенной версией леммы В.И. Берника [4, лемма 12] для случая полиномов разных степеней и высот.

ЛЕММА 2. Пусть заданы целые числа $n_1, n_2 \geq 1$ такие, что $n_1 + n_2 \leq n$ для некоторого целого n , а также действительные числа $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, Q \geq 1$. Пусть $P_1(x) \in \mathcal{P}_{=n_1}(Q^{\lambda_1})$, $P_2(x) \in \mathcal{P}_{=n_2}(Q^{\lambda_2})$ — целочисленные полиномы без общих корней и $\xi \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Для любого натурального $k \leq n_1 + n_2$ справедливо

$$1 \ll_n \text{perm} \begin{pmatrix} |\overline{P}_1(\xi)| & \cdots & |\overline{P}_1^{(k)}(\xi)| \\ & \ddots & \vdots \\ & & |\overline{P}_1(\xi)| \\ |\overline{P}_2(\xi)| & \cdots & |\overline{P}_2^{(k)}(\xi)| \\ & \ddots & \vdots \\ & & |\overline{P}_2(\xi)| \end{pmatrix} Q^{n_1\lambda_2 + n_2\lambda_1}, \quad (4)$$

где $\overline{P}_i^{(j)}(x) = P_i^{(j)}(x)Q^{-\lambda_i}$, $j \geq 0$, $i = 1, 2$.

Если $3 \leq n_1 + n_2$ и дополнительно $|P_i(\xi)| \leq Q^{-\tau_i}$, $\tau_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, для всех точек $\xi \in I$ некоторого интервала $I \subseteq (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\mu_1 I = Q^{-\eta}$, $\eta > 0$, тогда для любого $\delta > 0$ и для всех $Q > Q_0(n, \delta)$ справедливо

$$3 \min \{\tau_1 + \lambda_1, \tau_2 + \lambda_2\} - 2\eta < n_1\lambda_2 + n_2\lambda_1 + \delta. \quad (5)$$

2. Основные шаги доказательства теоремы 2

Предположим, что выполняется противное, а именно, найдется $n \geq 9$ такое, что для любого $c_1(n) > 0$ существует бесконечно много пар (Q, v) с $Q \rightarrow \infty$ и $1.5 \leq v \leq \frac{1}{2}(n+1)$, для которых

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v, I_0) > c_1(n)Q^{n+1-v\gamma},$$

и получим противоречие при $Q > Q_0(n)$.

Пусть $\mathcal{J}$ — минимальное покрытие интервала I_0 непересекающимися полуоткрытыми интервалами $J \subset \mathbb{R}$ длины Q^{-v} . Очевидно,

$$\#\mathcal{J} \asymp_n Q^v, \mathcal{P}_n(Q, v, I_0) \subseteq \bigcup_{J \in \mathcal{J}} \mathcal{P}_n(Q, v, J), \#\mathcal{P}_n(Q, v, I_0) \leq \sum_{J \in \mathcal{J}} \#\mathcal{P}_n(Q, v, J).$$

Зафиксируем некоторое достаточно малое значение $\Delta(n) > 0$, с помощью которого мы будем контролировать точность наших оценок. Например, $c(n) < Q^{\Delta(n)}$ для $Q > Q_0(n)$ для любого фиксированного значения $c(n)$. В соответствии с принципом ящиков Дирихле, найдется интервал $J \in \mathcal{J}$ с условием $\#\mathcal{P}_n(Q, v, J) \gg_n Q^{n+1-v(1+\gamma)}$. Однако, нам понадобится несколько более точное утверждение, приведенное ниже.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любого $c_2(n) > 0$ найдется $c_1(n) > 0$ такое, что для всех $Q > Q_0(n)$ существует действительное число ρ , $0 \leq \rho \leq v$, и множество интервалов $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{J}$,

$$\#\mathcal{K} \geq Q^{v-\rho-\Delta}, \mu_1 \left(\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K \right) \geq Q^{-\rho-\Delta},$$

каждый интервал $K \in \mathcal{K}$ из которого удовлетворяет

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v, K) \geq c_2(n)Q^{n+1-v(1+\gamma)+\rho}.$$

Среди интервалов $K \in \mathcal{K}$ выберем специальный интервал K_0 , точки которого удалены от алгебраических чисел ограниченной степени и высоты. В данных точках, имея оценку для значений полиномов, мы можем оценить значения их производных.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого $Q > Q_0(n)$ найдется интервал $K_0 \in \mathcal{K}$ и измеримое множество $B_0 \subseteq K_0$, $\mu_1 B_0 \geq \frac{1}{2}\mu_1 K_0$, такое, что для любого целочисленного полинома $s(x)$ с условием $\deg s = m \leq n$, $H(s) = Q^\lambda \leq Q^{1+\Delta}$, и для любой точки $\xi \in B_0$ справедливо $|s'(\xi)| < |s(\xi)|Q^{\rho+\lambda(m+1)+3\Delta}$.

Точки множества B_0 являются в некотором смысле особенными. В частности, если некоторый целочисленный полином $R(x)$ достаточно мал в точке $\xi \in B_0$, то согласно предложениям 3 и 4, один из его делителей принимает намного меньшее значение в точке $\xi \in B_0$, чем остальные. Отметим, что предложение 4 является усиленной версией леммы А.О. Гельфонда [10, глава 3, §4, лемма VI].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть задан целочисленный полином $S(x) \in \mathcal{P}_{\leq m}(Q^\lambda)$, $2 \leq m \leq n$, $0 \leq \lambda$, который является произведением двух целочисленных полиномов $s_1(x)$ и $s_2(x)$, $\deg s_i = m_i \geq 1$, $H(s_i) = Q^{\lambda_i} \leq Q^{1+\Delta}$, не имеющих общих корней, и в некоторой точке $\xi \in B_0$ выполняется:

$$\begin{aligned} |S(\xi)| &= Q^{-\tau}, |s_i(\xi)| = Q^{-\tau_i}, i = 1, 2, \\ \frac{|s_1(\xi)|}{H(s_1)} &= Q^{-\tau_1-\lambda_1} \leq Q^{-\tau_2-\lambda_2} = \frac{|s_2(\xi)|}{H(s_2)}. \end{aligned}$$

Если также $\tau > \rho + m\lambda + 5\Delta$, то для $Q > Q_0(n)$ справедливо следующее:

$$\tau_1 > \tau - \frac{1}{2}m\lambda + \frac{1}{2}m_1\lambda_1 + \frac{1}{2}(m - m_1)(\lambda - \lambda_1) - \Delta.$$

Мы доказываем предложение 3, используя перманент (4) с двумя столбцами, и подставляя оценки для $s'_1(x)$ и $s'_2(x)$ из предложения 2. Оказывается, в разложении перманента слагаемые вида $|s_1(x)s'_2(x)|$ и $|s'_1(x)s_2(x)|$ не могут доминировать, поэтому должно доминировать слагаемое $|s_2(x)s_2(x)|$, что дает искомую оценку. Из предложения 3 непосредственно следует предложение 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть задан примитивный целочисленный полином $R(x) \in \mathcal{P}_{\leq m}(Q^\lambda)$, $2 \leq m \leq n$, $0 \leq \lambda \leq 1$, который является произведением k , $2 \leq k \leq n$, степеней $t_i(x) = p_i(x)^{e_i}$, $e_i \in \mathbb{N}$, различных примитивных неприводимых целочисленных полиномов $p_i(x)$. Если в некоторой точке $\xi \in B_0$ справедливо $|R(\xi)| = Q^{-\tau}$, $\tau > \rho + m\lambda + 7\Delta$, то для одного из множителей $t_d(x) = t_i(x)$ при $Q > Q_0(n)$ выполняется:

$$\begin{aligned} \deg t_d &= m_d \geq 2, H(t_d) = Q^{\lambda_d}, |t_d(\xi)| = Q^{-\tau_d}, \\ \tau_d &> \tau - \frac{1}{2}m\lambda + \frac{1}{2}m_d\lambda_d + \frac{1}{2}(m - m_d)(\lambda - \lambda_d) - \Delta. \end{aligned}$$

Используя принцип ящиков Дирихле, мы можем находить полиномы из множества $\mathcal{P}_n(Q, v, K_0)$, старшие коэффициенты которых близки. Вычитая их, получим новые полиномы $R_m(x)$ для различных m .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть m_0 — целое число с условием $v(1+\gamma) - \rho - 1 \leq m_0 < v(1+\gamma) - \rho$. Можно считать, что $v(1+\gamma) > \rho + 2$, поэтому $m_0 \geq 2$. Если выбрать $c_2(n)$ достаточно большим, то для $Q > Q_0(n)$ и для всех целых $m_0 \leq m \leq n$ найдется примитивный целочисленный полином $R_m(x)$ с условием:

$$\begin{cases} 2 \leq \deg R_m \leq m, \\ H(R_m) \leq Q^{\lambda_m}, \lambda_m = \frac{v(1+\gamma)-2-\rho}{m-1}, \\ |R_m(\xi)| < Q^{1-2v+\Delta} \quad \forall \xi \in K_0, \\ |R'_m(\xi)| < Q^{1-v+\Delta} \quad \forall \xi \in K_0. \end{cases}$$

У каждого $R_m(x)$ найдется делитель $t_{d,m}(x)$, который является степенью некоторого примитивного неприводимого целочисленного полинома, с условием

$$\begin{aligned} \deg t_{d,m} &= k_{d,m} \geq 2, H(t_{d,m}) = Q^{\lambda_{d,m}}, |t_{d,m}(\xi)| < Q^{-\tau_{d,m}} \quad \forall \xi \in K_0, \\ \tau_{d,m} &= (2v-1) - \frac{1}{2}m\lambda_m + \frac{1}{2}k_{d,m}\lambda_{d,m} + \frac{1}{2}(m-k_{d,m})(\lambda_m - \lambda_{d,m}) - 3\Delta, \\ \tau_{d,m} &> \frac{1}{2}(\rho + v(3-\gamma) + k_{d,m}\lambda_{d,m} - 1) - 3\Delta. \end{aligned} \quad (6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Делители $t_{d,m}(x)$ всех полиномов $R_m(x)$, $m_0 \leq m \leq n$, являются степенями одного и того же примитивного неприводимого целочисленного полинома $p_0(x)$, т.е. $t_{d,m}(x) = p_0(x)^{e_{d,m}}$. Пусть $t_e(x) = p_0(x)^{\min e_{d,m}}$. Тогда $t_e(x)$ удовлетворяет следующему:

$$\begin{cases} \deg t_e &= m_e \leq m_0 < v(1+\gamma) - \rho, \\ H(t_e) &= Q^{\lambda_e} < Q^{\frac{v(1+\gamma)-2-\rho+\Delta}{n-1} + \frac{\Delta}{n}}, \\ |t_e(\xi)| &< Q^{-\tau_e} \quad \forall \xi \in K_0, \end{cases}$$

где τ_e оценивается (6).

Используя (5) для $t_e(x)$ и некоторого $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q, v, K_0)$ на интервале K_0 , докажем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Полином $t_e(x)$ имеет общие корни с каждым $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q, v, K_0)$. Отсюда следует, что все полиномы $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q, v, K_0)$ имеют общие корни, что противоречиво по определению. Это завершает доказательство теоремы 2.

3. Заключение

Использованный метод имеет перспективы для дальнейшего развития и получения более сильных оценок. С помощью индуктивного перехода к полиномам меньшей степени в теореме 2 можно получить более сильные оценки для производной полинома в предложении 2. Также в предложении 5 можно дополнительно рассмотреть полиномы $R_{m,\lambda}$ с условием $(m-1)\lambda > v(1+\gamma) - 2 - \rho$ и доказать, что их делители $t_{d,m,\lambda}(x)$ также являются степенями $p_0(x)$. Эти рассуждения дают более сильные оценки для $|t_e(\xi)|$. Авторы полагают, что данные идеи позволят им получить оценку (3) с $\gamma = 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baker R. Sprindzuk's theorem and Hausdorff dimension // Mathematika. 1976. Т. 23, № 2. С. 184–197.

2. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. The distribution of close conjugate algebraic numbers // *Compos. Math.* 2010. Т. 146, № 5. С. 1165–1179.
3. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. Integral polynomials with small discriminants and resultants // *Advances in Mathematics.* 2016. Т. 298. С. 393–412.
4. Bernik V.I., Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations // *Acta Arith.* 1983. Т. 42, №3. С. 219–253.
5. Берник В. И., Васильев Д. В., Кудин А. С. О числе целочисленных многочленов заданной степени и ограниченной высоты с малой производной в корне многочлена // *Труды Института математики НАН Беларуси.* 2014. Т. 22, № 2. С. 3–8.
6. Bernik V.I. Götze F. Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals // *Izvestiya: Mathematics.* 2015. Т. 79, № 1. С. 18–39.
7. Bugeaud Y., Mignotte M. Polynomial root separation // *Int. J. Number Theory.* 2010. Т. 6, № 3. С. 587–602.
8. Cassels J.W.S. *An Introduction to Diophantine Approximation* (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, №45) — Cambridge: Cambridge University Press. 1957.
9. Evertse J.-H. Distances between the conjugates of an algebraic number // *Publ. Math. Debrecen.* 2004. Т. 65. С. 323–340.
10. Гельфонд А. О. *Трансцендентные и алгебраические числа.* — Москва. 1952.
11. Schmidt W. *Diophantine approximation* (Lecture Notes in Math. № 785) — Berlin: Springer. 1980.
12. Спринджук В. Г. *Проблема Малера в метрической теории чисел* — Минск: Наука и Техника. 1967.
13. Tishchenko K. I., On approximation of real numbers by algebraic numbers of bounded degree // *Acta Arith.* 2000. Т. 94, №. 1. С. 1–24.

REFERENCES

1. Baker, R. 1976, “Sprindzuk’s theorem and Hausdorff dimension“, *Mathematika*, vol. 23, no. 2, pp. 184–197.
2. Beresnevich, V., Bernik, V. & Götze, F. 2010, “The distribution of close conjugate algebraic numbers“, *Compos. Math.*, vol. 146, no. 5, pp. 1165–1179.
3. Beresnevich, V., Bernik, V. & Götze, F. 2016, “Integral polynomials with small discriminants and resultants“, *Advances in Mathematics.*, vol. 298, pp. 393–412.
4. Bernik, V. 1983, “Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations“, *Acta Arith.*, vol. 42, no. 3, pp. 219–253.
5. Bernik, V., Vasiliev, D. & Kudin, A. 2014, “On the number of integral polynomials of given degree and bounded height with small value of derivative at root of polynomial“, *Trudy Instituta matematiki NAN Belarusi*, vol. 22, no. 2, pp. 3–8.
6. Bernik, V. & Götze, F. 2015, “Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals“, *Izvestiya: Mathematics*, vol. 79, no. 1, pp. 18–39.

7. Bugeaud, Y. & Mignotte, M. 2010, "Polynomial root separation" *Int. J. Number Theory*, vol. 6, no. 3, pp. 587–602.
8. Cassels, J. W. S. 1957, "An Introduction to Diophantine Approximation (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, №45)" — Cambridge: Cambridge University Press.
9. Evertse, J.-H. 2004, "Distances between the conjugates of an algebraic number", *Publ. Math. Debrecen*, vol. 65, pp. 323–340.
10. Gelfond, A. 1952, "Transcendental and Algebraic Numbers" — Moscow.
11. Schmidt, W. 1980, "Diophantine approximation (Lecture Notes in Math. no. 785)" — Berlin: Springer.
12. Sprindzhuk, V. 1967, "Mahler's Problem in Metric Number Theory" — Minsk: Nauka i Tehnika.
13. Tishchenko, K. 2000, "On approximation of real numbers by algebraic numbers of bounded degree", *Acta Arith.*, vol. 94, no. 1, pp. 1–24.

Получено 28.05.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.