

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-22-38

О методике оценки критических определителей в рамках вопроса оценки константы совместных диофантовых приближений¹

Ю. А. Басалов

Басалов Юрий Александрович — аспирант кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: basalov_yuriy@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена вопросам оценки константы совместных диофантовых приближений для n действительных чисел. В работе развивается подход, заложенный Г. Дэвенпортом и Дж. В. С. Касселсом. Г. Дэвенпорт обнаружил связь между значением критического определителя звездного тела и оценкой некоторых форм. В частном случае это позволяет, вычислив критический определитель $(n+1)$ -мерного звездного тела Дэвенпорта

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^n < 1,$$

получить значение константы совместных диофантовых приближений. Однако, вычисление критических определителей для тел такого вида является сложной задачей. Поэтому Дж. В. С. Касселс перешел от непосредственного вычисления критического определителя, к оценке его значения. Для этого он использовал оценку наибольшего значения $V_{n,s}$ — объема параллелепипеда с центром в начале координат, находящегося внутри $(n+1)$ -мерного звездного тела

$$\mathbb{F}_{n,s} : f_{n,s} = \frac{1}{2^s} \prod_{i=1}^s |x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^n |x_i| < 1.$$

Эти результаты сводят задачу оценки константы совместных диофантовых приближений к оценке объема наибольшего параллелепипеда $V_{n,s}$. Ранее оценки для $V_{n,s}$ были получены в работах Дж. В. С. Касселса, Т. Кьюзика, С. Красса. Данная работа посвящена методике формирования гипотез о значениях $V_{n,s}$ на основе результатов численных экспериментов. В статье изложен подход к получению параллелепипедов, содержащихся внутри звездного тела и обладающих наибольшим объемом. Этот подход сочетает в себе использование как численных, так и аналитических методов.

Ключевые слова: наилучшие совместные диофантовы приближения, геометрия чисел, звездные тела, критические определители.

Библиография: 21 название.

Для цитирования:

Ю. А. Басалов. О методике оценки критических определителей в рамках вопроса оценки константы совместных диофантовых приближений // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 22–38.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант 19-41-710004_p_a).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-22-38

About the method of estimating critical determinants within the question of the estimation of the constant of simultaneous diophantine approximations ²

Yu. A. Basalov

Basalov Yuriy Aleksandrovich — Postgraduate Student, Department of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Pedagogical University of Leo Tolstoy (Tula).

e-mail: basalov_yuriy@mail.ru

Abstract

This paper is devoted to the estimation of the constant of simultaneous Diophantine approximations for n real numbers. The approach developed by H. Davenport and J. W. S. Cassels. H. Davenport discovered the connection between the value of the critical determinant of a star body and the estimation of some forms. In the particular case, this allows calculating the critical determinant of the $(n + 1)$ -dimensional star body of Davenport

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^n < 1,$$

get the value of the constant of joint Diophantine approximations. However, the calculation of critical determinants for bodies of this type is a difficult task. Therefore, J. W. S. Cassels moved from directly calculating the critical determinant, to estimating its value. For this, he used the estimate of the largest value of $V_{n,s}$ — the volume of a parallelepiped centered at the origin of coordinates located inside the $(n + 1)$ -dimensional star body

$$\mathbb{F}_{n,s} : f_{n,s} = \frac{1}{2^s} \prod_{i=1}^s |x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^n |x_i| < 1.$$

These results reduce the problem of estimating the constant of joint Diophantine approximations to an estimate of the volume of the largest parallelepiped $V_{n,s}$. Earlier, estimates for $V_{n,s}$ were obtained in the works of J. W. S. Cassels, T. Cusick, S. Krass. This paper is devoted to methods of forming hypotheses about the values of $V_{n,s}$ based on the results of numerical experiments. The article outlines the approach to obtaining parallelepipeds contained within a star body and possessing the largest volume. This approach combines the use of both numerical and analytical methods.

Keywords: best joint Diophantine approximations, geometry of numbers, star bodies, critical determinants.

Bibliography: 21 titles.

For citation:

Yu. A. Basalov, 2019, "About the method of estimating critical determinants within the question of the estimation of the constant of simultaneous Diophantine approximations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 22–38.

²The study was supported by RFBR (grant 19-41-71004_p_a).

1. Введение

Данная работа посвящена вопросам оценки константы совместных диофантовых приближений для n действительных чисел.

Мы будем следовать подходу Г. Дэвенпорта, Дж. В. С. Касселса. Г. Дэвенпорт [4] обнаружил связь между значением критического определителя (определение см. 5) звездного тела и оценкой некоторых форм. В частном случае это позволяет, вычислив критический определитель $(n + 1)$ -мерного звездного тела Дэвенпорта

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^n < 1,$$

получить значение константы совместных диофантовых приближений. Однако, вычисление критических определителей для тел такого вида является сложной задачей. Поэтому Дж. В. С. Касселс [2] перешел от непосредственного вычисления критического определителя, к оценке его значения. Для этого он использовал оценку наибольшего значения $V_{n,s}$ — объема параллелепипеда с центром в начале координат, находящегося внутри $(n + 1)$ -мерного звездного тела

$$\mathbb{F}_{n,s} : f_{n,s} = \frac{1}{2^s} \prod_{i=1}^s |x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^n |x_i| < 1.$$

Параллелепипеды, имеющие объем $V_{n,s}$, в дальнейшем мы будем называть *наибольшими*.

Таким образом задача оценки константы совместных диофантовых приближений сводится к оценке *объема наибольшего параллелепипеда*. Оценки для $V_{n,s}$ были получены в работах Дж. В. С. Касселса [2], Т. Кьюзика [3], С. Красса [9, 10]. В работе [17] представлены оценки для $V_{5,2}$ и $V_{6,3}$. В данной работе мы сосредоточимся на методике формирования гипотез о значениях $V_{n,s}$ на основе результатов численных экспериментов. Будет изложен подход к получению параллелепипедов, содержащихся внутри звездного тела и обладающих наибольшим объемом.

2. Необходимые обозначения

Сформулируем задачу наилучших совместных диофантовых приближений n действительных чисел. Пусть

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

— произвольный вектор действительных чисел. Нас будут интересовать приближения $\vec{\alpha}$ рациональными дробями

$$\frac{\vec{p}}{q} = \left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \dots, \frac{p_n}{q} \right).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Мерой качества совместных приближений первого рода вектора $\vec{\alpha}$ рациональным вектором \vec{p}/q называется величина

$$D(\vec{\alpha}, \vec{p}/q) = \max_{i=1, n} q |q\alpha_i - p_i|^n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Константой наилучших диофантовых приближений $C(\vec{x})$ для вектора \vec{x} называется точная нижняя грань величины C , для которой существует бесконечное число рациональных векторов \vec{p}/q , удовлетворяющих неравенству

$$D(\vec{x}, \vec{p}/q) < C.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Константой наилучших диофантовых приближений C_n называется точная верхняя грань числа $C(\vec{x})$ по всем векторам \vec{x} размерности n :

$$C_n = \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^s} C(\vec{x}).$$

Напомним некоторые понятия из геометрии чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть a_1, \dots, a_n – линейно независимые точки вещественного евклидова пространства. Множество всех точек

$$x = u_1 a_1 + \dots + u_n a_n$$

с целыми коэффициентами u_1, \dots, u_n называется решеткой Λ . Величина

$$d(\Lambda) = |\det(a_1, \dots, a_n)|$$

называется определителем решетки Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть \mathbb{F} – точечное тело. Если решетка Λ не имеет в \mathbb{F} отличных от \mathbb{O} точек ($\mathbb{O} \in \mathbb{F}$), то Λ допустима для \mathbb{F} или \mathbb{F} -допустима. Точную нижнюю грань

$$\Delta(\mathbb{F}) = \inf d(\Lambda)$$

определителей $d(\Lambda)$ всех \mathbb{F} -допустимых решеток Λ называют критическим определителем множества \mathbb{F} . Если \mathbb{F} -допустимых решеток нет, то \mathbb{F} является множеством бесконечного типа и $\Delta(\mathbb{F}) = \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Под звездным телом понимают множество, обладающее следующими свойствами

- существует точка, называемая "началом", которая является внутренней точкой множества;
- любой луч, выходящий из "начала", либо не пересекается с границей множества, либо имеет с ней только одну общую точку.

Г. Дэвенпортом[4] был получен следующий фундаментальный результат.

Пусть \mathbb{F}_n – это $(n + 1)$ -мерное звездное тело

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^n < 1,$$

а $\Delta \mathbb{F}$ – его критический определитель. Тогда

ТЕОРЕМА 1.

$$C_n = \frac{1}{\Delta \mathbb{F}_n}. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [18]. \square

Дж. В.С. Касселс [2, 3] получил следующую оценку для $\Delta \mathbb{F}_n$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$f_{n,s} = \frac{1}{2^s} \prod_{i=1}^s |x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^n |x_i|. \quad (2)$$

и $2^n V_{n,s}$ объем наибольшего параллелепипеда с центром в начале координат, содержащегося внутри фигуры

$$f_{n,s} \leq 1. \quad (3)$$

Пусть $\Delta_{n,s}$ наименьшее абсолютное значение дискриминанта действительного поля степени $n+1$, которое имеет s пар комплексно-сопряженных алгебраических чисел (то есть $2s \leq n+1$). Тогда

$$\Delta \mathbb{F}_n \leq \sqrt{\Delta_{n,s}} / V_{n,s}, \quad (4)$$

или же

$$C_n \geq V_{n,s} / \sqrt{\Delta_{n,s}}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [3]. \square

Значения $\Delta_{n,s}$ известны для обширного количества n (см. [21]). Тем самым, как уже отмечалось выше, теорема 2 сводит задачу оценки снизу константы совместных диофантовых приближений к оценке снизу $V_{n,s}$. Ранее были получены следующие оценки

$$\begin{aligned} V_{2,0} = 2, V_{2,1} = 1 & \quad (\text{Дж. В.С. Касселс}) [2] \\ V_{3,1} = 2, V_{3,0} = \frac{3^{3/2}}{2} & \quad (\text{Т. Кьюзик}) [3] \\ V_{4,2} \geq \frac{16}{9}, V_{4,1} \geq 2, V_{4,0} \geq 4 & \quad (\text{С. Красс}) [9, 10] \\ V_{5,2} \geq 2.3932\dots & \quad (\text{С. Красс}) [10] \end{aligned} \quad (6)$$

Из этих значений можно получить следующие оценки константы наилучших совместных диофантовых приближений

$$C_2 \geq \frac{2}{7}, \quad C_3 \geq \frac{2}{\sqrt{275}}, \quad C_4 \geq \frac{16}{9\sqrt{1609}}. \quad (7)$$

Более подробно с историей оценок константы совместных диофантовых приближений можно ознакомиться в работе [16].

Заметим, что две последние оценки (7) получаются из (5) при подстановке $s = \lfloor n/2 \rfloor$. Поэтому в дальнейшем мы сосредоточимся на оценке $V_{n, \lfloor n/2 \rfloor}$.

3. Предварительные рассуждения

Рассмотрим матрицу n -ого порядка

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

и

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пусть \mathbb{E} – это n -мерный единичный куб, состоящий из точек

$$\vec{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n), \quad 0 \leq e_i \leq 1, \quad i = \overline{1, n}.$$

Матрица A преобразует его в n -мерный параллелепипед

$$\mathbb{A} : \vec{a} = A \cdot \vec{e} \tag{9}$$

Заметим, что описанным выше образом каждому n -мерному параллелепипеду соответствует матрица A . Объем этого параллелепипеда равен $2^n \det A$.

Пусть $\mathbb{F}_{n,s}$ – это n -мерное звездное тело

$$\mathbb{F}_{n,s} : f_{n,s} \leq 1,$$

где $f_{n,s}$ это (2).

В рамках оценки $V_{n,s}$ нас будут интересовать параллелепипеды \mathbb{A} , находящиеся внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$. Можно предложить следующий метод проверки того, находится ли \mathbb{A} внутри $\mathbb{F}_{n,s}$ или нет. Составим оптимизационную задачу

$$\begin{aligned} f_{n,s} &\rightarrow \max, \\ |b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n| &\leq 1, \\ |b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n| &\leq 1, \\ &\dots \\ |b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n| &\leq 1. \end{aligned} \tag{10}$$

Если решение задачи ≤ 1 , то параллелепипед \mathbb{A} полностью лежит внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$, в противном случае, часть его находится вне звездного тела. Таким образом, задача определения, лежит ли параллелепипед \mathbb{A} внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$, сводится к задаче многомерной оптимизации. Очевидно, что если параллелепипед \mathbb{A} лежит внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$, имеет место оценка

$$V_{n,s} \geq \det A. \tag{11}$$

Нашей целью является построение матрицы A такого вида, чтобы задача (10) имела решение $\max f_{n,s} \leq 1$. Параллелепипеды \mathbb{A} для которых $\det A$ "велико" будем называть *наибольшими*. Соответствующую наибольшему параллелепипеду матрицу мы также будем называть *наибольшей*. Таким образом, задача нахождения наибольшего параллелепипеда также является оптимизационной задачей.

4. Численные эксперименты

В рамках исследования были проведены вычислительные эксперименты по численному нахождению наибольших значений $V_{n,s}$. Это стало возможным, потому что исходная задача свелась к композиции оптимизационных задач. В качестве инструмента численных исследований был выбран математический пакет **Wolfram Mathematica**.

Идея эксперимента состоит в следующем. Будем производить направленный перебор матриц A (см. (8)) с целью найти матрицу, обладающую наибольшим $\det A$ и удовлетворяющую условию (10). Процесс перебора следующий: построим "сетку" из коэффициентов матрицы и будем постепенно сужать ее в сторону, соответствующую большим значениям $\det A$.

Такой подход имеет право на существование по следующим причинам:

- Во-первых, небольшое изменение параметров параллелепипеда \mathbb{A} приводит к небольшому изменению значения $\max f_{n,s}$ на нем. Это позволяет применить к задаче итерационные методы поиска экстремума. Например, деление попалам. Применение градиентных

методов в данном случае невозможно, так как нам ничего неизвестно об аналитическом представлении оптимизируемой функции

$$F^*(A) = |\det A|, \quad \text{при условии } \max_A f_{n,s} \leq 1.$$

Для сужения интервала поиска мы будем использовать следующую эвристику – делим текущий интервал на три части (пусть длина части равна h_i) по каждому измерению, находим среди полученных точек точку, где значение $F^*(A)$ максимально, строим вокруг этой точки параллелепипед со сторонами $2h_i$ и продолжаем поиск в нем.

Отметим, что в первой итерации целесообразно делить текущий интервал не на три, а на большее число частей.

- Самой сложной подзадачей которую необходимо решить в рамках работы алгоритма является нахождение $\max_A f_{n,s}$ – это задача оптимизации нелинейной функции при линейных ограничениях. Как показывает практика, она может быть достаточно успешно решена с помощью системы компьютерной алгебры **Wolfram Mathematica**. Подробнее этот вопрос рассматривается в разделе 4.1.

Заметим также, что в общем случае описанный выше подход не гарантирует сходимости к локальному экстремуму и соответственно не позволяет найти абсолютное наибольшее значение $V_{n,s}$ для какой-то конкретной размерности. С другой стороны, этот подход позволяет получить предварительные результаты и выдвинуть гипотезы о структуре наибольшего параллелепипеда \mathbb{A} .

4.1. Методика оценки $\max f_{n,s}$

Отдельный вопрос встает о проверке допустимости конкретного параллелепипеда \mathbb{A} (находится ли \mathbb{A} внутри звездчатого тела $\mathbb{F}_{n,s}$). Как уже отмечалось выше, для этого достаточно решить задачу (10). На практике выяснилось, что математический пакет **Wolfram Mathematica**, не всегда корректно может решить данную оптимизационную задачу. Далее мы опишем технические проблемы возникшие в процессе численного решения задачи (10).

Так как нам необходимо найти максимум значения функции, мы использовали метод `NMaximize` $f_{n,s}$. Помимо оптимизируемой функции и ограничений он имеет следующие параметры

- `AccuracyGoal` и `PrecisionGoal` – точность полученного результата;
- `WorkingPrecision` – точность вычислений;
- `Method` – метод, возможные варианты `DifferentialEvolution`, `NelderMead`, `SimulatedAnnealing`, `RandomSearch`.

Потенциальными способами повысить точность полученного результата являются изменение этих параметров. Повышение `AccuracyGoal`, `PrecisionGoal`, `WorkingPrecision` на практике не имеет особого смысла так как, во-первых, значительно увеличивает время выполнения `NMaximize`, а во-вторых, чаще всего не решает проблемы сходимости к “неправильному” локальному минимуму. Этот эффект достаточно наглядно иллюстрируется на задаче

$$g(x, y) = -x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow \min, \quad x^2 + y^2 \leq 4$$

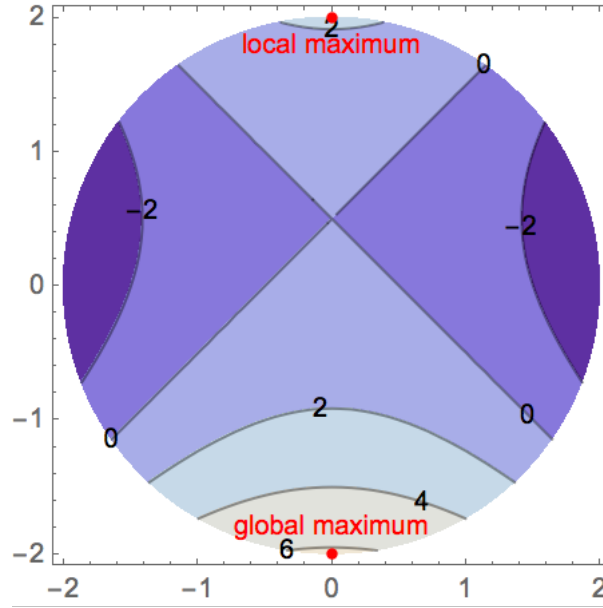


Рис. 1: Пример нескольких локальных минимумов

График значений функции $g(x, y)$ изображен на рисунке 1. На нем видно, что в данной области существует два локальных минимума, и оптимизационные алгоритмы теоретически могут сходиться к любому из них.

Теперь остановимся на зависимости результата оптимизации от параметра `Method`. Выяснилось, что в случае задач типа (10) результаты могут значительно различаться. Например, для задачи

$$f = -\frac{1}{4}c(-y_4 + y_5) \left(a^2 y_1^2 + b^2 (-y_2 + y_3)^2 \right) \left(b^2 (y_2 + y_3)^2 + c^2 (y_4 + y_5)^2 \right),$$

$$\text{где } a = 0.657, b = 1.138, c = 0.893,$$

$$-1 \leq y_1 \leq 1, -1 \leq y_2 \leq 1, -1 \leq y_3 \leq 1, -1 \leq y_4 \leq 1, -1 \leq y_5 \leq 1$$

результаты имеют следующий вид

Метод	Значение	Точка
DifferentialEvolution	1.18409	(-1, -1, -1, 0.3333, 1)
NelderMead	1.04968	(1, -0.2113, -1, -1, 1)
SimulatedAnnealing	1.18409	(1, 1, -1, -1, -0.3333)
RandomSearch	1	(-1, -1, -1, -1, 1)

Поэтому было решено: во-первых отказаться от использования методов `NelderMead` и `RandomSearch`, а во-вторых – производить предварительную проверку значений $f_{n,s}$ в вершинах, на ребрах и диагоналях параллелипипеда. Это позволяет, во-первых отсеять значительную часть некорректных значений, даже не решая оптимизационную задачу (на решение этой задачи требуется значительное количество ресурсов, поэтому такой подход также является и оптимизацией скорости), а во-вторых это может нивелировать ошибки возможные при работе функции `NMaximize`.

Полную программную реализацию экспериментов можно найти в работе [16].

4.2. Результаты численных экспериментов

В результате экспериментов, проводимых для размерностей 3 и 4, выяснилось, что существует множество наибольших матриц (а соответственного и параллелепипедов) с одинаковыми $\det A$. Поэтому было произведено исследование с целью получить наибольшую матрицу A с наиболее простой структурой. Оказалось, что можно найти наибольшую матрицу A следующего вида (примеры таких матриц см. в пункте 5)

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k & a_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_k & a_k \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Стоит отметить следующие моменты [17].

Во-первых, исходя из вида матрицы A , можно описать структуру параллелепипеда $V_{n,s}$ – все его грани прямоугольники (причем часть из них – квадраты), ребра либо параллельны осям координат, либо образуют с ними угол 45° .

Во-вторых, уже для $n = 7$ наибольшая матрица A_7^* может быть получена как комбинация наибольших матриц A_3^* и A_4^* (точные их значения см. в разделе 5)

$$A_3^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ 0 & -\alpha_1 & \alpha_1 \end{pmatrix},$$

$$A_4^* = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\alpha_2 & \sqrt{2}\alpha_2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\alpha_2 & \sqrt{2}\alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$A_7^* = \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\alpha_3 & \sqrt{2}\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\alpha_3 & \sqrt{2}\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{A_3^*} \quad \underbrace{\hspace{3.5cm}}_{A_4^*} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{A_3^*}$

Вообще, для $n > 6$, скорее всего, матрицу A_n^* можно получить из A_{n-4}^* и A_4^* . Этот факт схож с результатом, полученным С. Крассом [9]

$$V_{n,s}V_{n',s'} \leq V_{n+n',s+s'}, \quad (13)$$

только вместо знака неравенства здесь стоит равенство. Поэтому, нас в дальнейшем будут интересовать только оценки для $n \leq 6$, а именно $V_{3,1}$, $V_{4,2}$, $V_{5,2}$ и $V_{6,3}$.

5. Вывод значений A_n

Основной интерес для нас представляют не численные значения матриц A_n , а их аналитические представления. Для их нахождения поступим следующим образом. Можно постараться определить точки, в которых наибольший параллелепипед A_n “касается” звездного тела $\mathbb{F}_{n,[n/2]}$, выписать в этих точках граничные условия и на основании этих условий получить параметры параллелепипеда A_n .

Начнем с рассмотрения случая $n = 3$. В этом случае в результате численных экспериментов была найдена матрица

$$A_3^N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу вида (12)

$$A_3^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & b \\ 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

Посторим задачу обратную (10). Выберем набор точек в которых $f_{3,1}$ должна быть ≤ 1 (Если выбрать в качестве него все точки A_3^* (набор δ_{max}), то матрица гарантировано будет удовлетворять задаче (10)). При фиксированном наборе δ_0 точек будет максимизировать значение $\det A_3^*$. Если $\det A_3^*$ совпадет с $\det A_3$ наибольшей матрицы для $n = 3$, это будет означать, что можно перейти при проверке задачи (10) от набора δ_{max} к набору δ_0 . Сужая набор δ_0 до минимума, мы получим граничные точки в которых $f_{3,1} = 1$.

Было решено начать с набора точек δ_1 со значениями координат $-1, 0, 1$ (на единичном кубе, единичный куб с помощью преобразования (9) приводится к A_3^*). Программа, проверяющая этот набор точек, на языке Wolfram Mathematica имеет вид

```
transform = {{a, 0, 0}, {0, b, b}, {0, -b, b}};
f31 = Function[{x1, x2, x3}, (x1^2 + x2^2)*x3/2];
m = {Det[transform]};
Do[AppendTo[m, Abs[Apply[f31, transform. point]] <= 1],
  {point, Tuples[{-1, 0, 1}, 3]};
NMaximize[m, {a, b}]
```

ее результат

```
{2., {a -> 0.999978, b -> 1.00001}}
```

Опытным путем было выявлено, что в если в качестве граничных точек взять набор только из одной точки $\delta_2 = (1, 1, 0)$, результат оптимизации не изменится. Это иллюстрирует следующая программа

```
transform = {{a, 0, 0}, {0, b, b}, {0, -b, b}};
f31 = Function[{x1, x2, x3}, (x1^2 + x2^2)*x3/2];
m = {Det[transform], Abs[Apply[f31, transform.{1, 1, 0}]] <= 1};
NMaximize[m, {a, b}]
```

Точка $(1, 1, 0)$ с помощью преобразования (9) превращается в точку (a, b, b) , что приводит нас к задаче

$$2ab^2 \rightarrow \max,$$

$$\frac{1}{2} (a^2 + b^2) b = 1.$$

Решив эту задачу мы получим точное значение

$$A_3^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V_{3,1} \geq \det A_3^* = 2.$$

5.1. Случай $n = 4$

Стоит отметить, что переход от набора δ_1 к набору δ_2 может быть достаточно трудоемким. Постараемся упростить эту процедуру. Так как у нас уже есть примерные значения искомой матрицы, мы можем вычислить значение $f_{n,s}$ в граничных точках и взять только те, где абсолютное значение $f_{n,s}$ близко к 1. Применим этот подход для $n = 4$. В этом случае, в результате численных экспериментов была найдена матрица

$$A_4^N \approx \begin{pmatrix} 0.81649 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.81649 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.15469 & 1.15469 \\ 0 & 0 & -1.15469 & 1.15469 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу вида (12)

$$A_4^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

Во-первых, убеждаемся, что в качестве ограничений можно взять множество точек с координатами 0, 1

```
transform = {{a, 0, 0, 0}, {0, a, 0, 0}, {0, 0, b, b}, {0, 0, -b, b}};
f42 = Function[{x1, x2, x3, x4}, (x1^2 + x3^2)*(x2^2 + x4^2)/4];
m = {Det[transform]};
Do[AppendTo[m, Abs[Apply[f42, transform.point]] <= 1],
  {point, Tuples[{0, 1}, 4]};
NMaximize[m, {a, b}, Method -> "DifferentialEvolution"]
```

Далее, с помощью процедуры

```
transform = {{a, 0, 0, 0}, {0, a, 0, 0}, {0, 0, b, b}, {0, 0, -b, b}};
f42 = Function[{x1, x2, x3, x4}, (x1^2 + x3^2)*(x2^2 + x4^2)/4];
w = {};
Do[AppendTo[w, Simplify[Apply[f42, transform.point]]],
  {point, Tuples[{0, 1}, 4]};
Do[v = x /. a -> 0.81649 /. b -> 1.15469; If[Abs[v] > 0.999, Print[x]],
  {x, Union[w]}]
```

находим минимальный набор ограничений

$$\frac{1}{4} (a^2 + b^2)^2, \quad \frac{a^4}{4} + a^2 b^2.$$

Этим ограничениям соответствуют точки $(1, 1, 1, 0)$ и $(1, 1, 1, 1)$. Получаем задачу

$$\begin{aligned} 2a^2b^2 &\rightarrow \max, \\ \frac{1}{4}(a^2 + b^2)^2 &= 1, \\ \frac{1}{4}a^2(a^2 + 4b^2) &= 1, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{2}{3}}, & b &= \sqrt{\frac{4}{3}}, \\ V_{4,2} &\geq \det A_4^* &= \frac{16}{9}. \end{aligned}$$

5.2. Случай $n = 5$

Для $n = 5$ численные эксперименты дают следующую матрицу

$$A_5^N \approx \begin{pmatrix} 0.67958 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.13157 & 1.13157 & 0 & 0 \\ 0 & -1.13157 & 1.13157 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.84550 & 0.84550 \\ 0 & 0 & 0 & -0.84550 & 0.84550 \end{pmatrix},$$

$$\det A_5^N \approx 2.48831 \dots$$

Рассмотрим матрицу

$$A_5^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b & 0 & 0 \\ 0 & -c & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

В этом случае исходный набор точек не ограничивается простыми значениями $-1, 0, 1$ и угадать его не получится. В самом деле

```
transform = {
  {a, 0, 0, 0, 0},
  {0, b, b, 0, 0},
  {0, -b, b, 0, 0},
  {0, 0, 0, c, c},
  {0, 0, 0, -c, c}
};
f52 = Function[{x1, x2, x3, x4, x5}, (x1^2 + x3^2)*(x2^2 + x4^2)*x5/4];
m = {Det[transform]};
Do[AppendTo[m, Abs[Apply[f52, transform. point]] <= 1],
  {point, Tuples[{-1, 0, 1}, 5]};
NMaximize[Union[m], {a, b, c}, Method -> "DifferentialEvolution"]
```

дает значительно большее значение 2.71746. Снова воспользуемся тем, что нам известны примерные значения a, b, c . Решим задачу нахождения максимума $f_{n,s}$ отсекая часть граничных точек параллелипипеда

```

a = 0.67958; b = 1.13157; c = 0.84550;
NMaximize[{(a^2*y1^2 + b^2*(-y2 + y3)^2) *
  (b^2*(y2 + y3)^2 + c^2*(y4 + y5)^2) *c*(-y4 + y5) / 4,
  -1 <= y1 <= 1,
  -1 <= y2 <= 1,
  -0.9 <= y3 <= 0.9,
  -1 <= y4 <= 1,
  -1 <= y5 <= 1
}, {y1, y2, y3, y4, y5}, Method -> {"DifferentialEvolution", RandomSeed -> 10}]

```

и получим точку с $f_{n,s} = 1$ – это $(1, 1, \sqrt{5} - 2, -1, 1)$. Аналогично получаем еще одну точку $(1, 1, -1, \frac{1}{3}, 1)$. Беря еще одну точку $(1, 1, 1, -1, 1)$, получим задачу

$$\begin{aligned}
 4ab^2c^2 &\rightarrow \max, \\
 2a^2b^2c &= 1, \\
 \frac{8}{27}(a^2 + 4b^2)c^3 &= 1, \\
 (3 - \sqrt{5})b^2(a^2 + (3 - \sqrt{5})^2b^2)c &= 1.
 \end{aligned}$$

с решением

$$a = \sqrt{7 - 3\sqrt{5}} \cdot \sqrt[10]{\frac{134 + 30\sqrt{5}}{27}}, \quad b = a \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{8(4\sqrt{5} - 9)}}, \quad c = \frac{1}{2a^2b^2},$$

$$V_{5,2} \geq \det A_5^* = \sqrt{\frac{27(9 + 5\sqrt{5})}{88}}.$$

5.3. Случай $n = 6$

Для $n = 6$ в результате численных экспериментов была выбрана матрица

$$A_6^N \approx \begin{pmatrix} 0.62510 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.62510 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.04085 & 1.04085 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.04085 & 1.04085 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.04085 & 1.04085 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.04085 & 1.04085 \end{pmatrix}$$

Заменяем ее на

$$A_6^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

В этом случае, поступая аналогично случаю $n = 5$, получаем две граничные точки: $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ и $(1, 1, \sqrt{5} - 2, 1, 1, 1)$. Соответствующая задача имеет вид

$$\begin{aligned}
 4a^2b^4 &\rightarrow \max, \\
 \frac{1}{2}a^2b^2(a^2 + 4b^2) &= 1, \\
 \frac{1}{4}(3 - \sqrt{5})b^2(a^2 + 4b^2)(a^2 + (3 - \sqrt{5})^2b^2) &= 1.
 \end{aligned}$$

Ее решение

$$a = \sqrt[6]{\frac{8(30\sqrt{5} - 67)}{11}}, \quad b = \sqrt[6]{\frac{56 + 25\sqrt{5}}{88}},$$

$$V_{6,3} \geq \det A_6 = \frac{9 + 5\sqrt{5}}{11}.$$

6. Заключение

Изложенное в данной работе сочетание численных и аналитических подходов позволило преобразовать задачу оценки критического определителя звездного тела Дэвенпорта в комбинацию оптимизационных задач и по-новому взглянуть на задачу оценки константы совместных диофантовых приближений.

Полученные результаты для размерности $n = 3$ и $n = 4$ совпадают с результатами Т. Кьюзика [3] и С. Красса [9]. Для $n = 5$ и $n = 6$ полученные результаты позволяют записать (так как $\Delta_{5,2} = 28\,037$, $\Delta_{6,3} = 184\,607$, см. [21]) следующие оценки константы совместных диофантовых приближений

$$C_5 \geq \frac{V_{4,2}}{\Delta_{5,2}} \geq \sqrt{\frac{27(9 + 5\sqrt{5})}{88 \cdot 28\,037}} \approx 0.014860... \quad C_6 \geq \frac{V_{6,3}}{\Delta_{6,3}} \geq \frac{9 + 5\sqrt{5}}{11\sqrt{184\,607}} \approx 0.004269...$$

что превосходит известные ранее значения. Например, оценка Ф. Фуртвенлера [6, 7] дает

$$C_5 \geq \frac{1}{\Delta_{5,3}} = \frac{1}{\sqrt{9\,747}} \approx 0.010128... \quad C_6 \geq \frac{1}{\Delta_{6,3}} = \frac{1}{\sqrt{184\,607}} \approx 0.002327...$$

а оценка С. Красса [10] дает

$$C_5 \geq \frac{V_{4,2}}{\Delta_{5,2}} \geq \frac{16}{9\sqrt{28\,037}} \approx 0.010617... \quad C_6 \geq \frac{V_{4,2}}{\Delta_{6,3}} \geq \frac{16}{9\sqrt{184\,607}} \approx 0.004137...$$

Для получения более сильных оценок, скорее всего, потребуются принципиально новые подходы. На это указывает полученная нами в разделе 5 информация о том, что A_n^* можно представить в виде композиции A_{n-4}^* и A_4^* .

В качестве возможного подхода по усилению оценок C_n снизу можно предложить непосредственную оценку значения критического определителя звездного тела \mathbb{F}_n . Это сложная задача, но в случае оценки сверху были получены достаточно значительные результаты [11, 12, 13, 14, 15, 19].

Стоит также отметить, что предложенный в данной работе подход может быть применен для оценки снизу значений критического определителя ограниченного точечного тела. Эта задача достаточно схожа с задачей оценки $V_{n,s}$. На наш взгляд, применение описанной в работе методики может дать определенные результаты в этой области.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Basalov Yu. A. On estimating the constant of simultaneous Diophantine approximation // arXiv.org. 2019. Дата обновления: 09.04.2019. URL: <https://arxiv.org/abs/1804.05385> (дата обращения: 10.04.2019).
2. Cassels J. W. S. Simultaneous Diophantine approximation // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 119–121.

3. Cusick T. W. Estimates for Diophantine approximation constants // *Journal of Number Theory*. 1980. Vol. 12(4). P. 543–556.
4. Davenport. H. On a theorem of Furtwängler // *J. London Math. Soc.* 1955. Vol. 30. P. 186–195.
5. Finch S. R. *Mathematical Constants*. Cambridge University Press, 2003 (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Book 94).
6. Furtwängler H. Über die simultatene Approximation von Irrationalzahlen. I // *Math. Ann.* 1927. Vol. 96. P. 169–175;
7. Furtwängler H. Über die simultatene Approximation von Irrationalzahlen. II // *Math. Ann.* 1928. Vol. 99. P. 71–83.
8. Hurwitz A. Über die angenaherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Briiche // *Math. Ann.* 1891. Vol. 39. P. 279–284.
9. Krass S. Estimates for n -dimensional Diophantine approximation constants for $n \geq 4$ // *J. Number Theory*. 1985. Vol. 20(2). P. 172–176.
10. Krass S. The N -dimensional diophantine approximation constants // *Australian Mathematical Society*. 1985. Vol 32(2). P. 313–316.
11. Mack J. M. Simultaneous Diophantine approximation // *J. Austral. Math. Soc. A*. 1977. Vol. 24. P. 266–285.
12. Nowak W. G. A note on simultaneous Diophantine approximation // *Manuscr. Math.* 1981. Vol. 36. P. 33–46.
13. Nowak W. G. A remark concerning the s -dimensional simultaneous Diophantine approximation constants // *Graz. Math. Ber.* 1993. Vol. 318. P. 105–110.
14. Nowak W. G. Lower bounds for simultaneous Diophantine approximation constants // *Comm. Math.* 2014. Vol. 22, Is. 1, P. 71–76.
15. Nowak W. G. Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz’s theorem // In: T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), *Essays in mathematics and its applications*. Springer/ Switzerland. 2016. P. 181–197.
16. Басалов Ю. А. Об истории оценок константы наилучших совместных диофантовых приближений // *Чебышевский сборник*. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 388–405.
<https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-394-411>.
17. Басалов Ю. А. Оценка константы наилучших диофантовых приближений для $n = 5$ и $n = 6$. // *Чебышевский сборник*. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 0-0. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-00000000000000000000000000000000>
18. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел: Пер. с англ. – М.: Мир, 1965.
19. Мощевитин Н. Г. К теореме Бlichфельда-Мюллендера-Спона о совместных приближениях // *Тр. МИАН*, 2002, том 239, с. 268–274.
20. Шмидт В. М. Диофантовы приближения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983.
21. A Database for Number Fields // *A Database for Number Fields*.
URL: <http://galoisdb.math.upb.de/> (дата обращения: 05.05.2018).

REFERENCES

1. Basalov Yu. A. 2019, "On estimating the constant of simultaneous Diophantine approximation", Available at: <https://arxiv.org/abs/1804.05385>.
2. Cassels J. W. S. 1955, "Simultaneous Diophantine approximation", *J. London Math. Soc.*, Vol. 30, pp. 119–121.
3. Cusick T. W. Estimates for Diophantine approximation constants // *Journal of Number Theory*. 1980. Vol. 12(4). P. 543–556.
4. Davenport. H. 1955, "On a theorem of Furtwängler", *J. London Math. Soc.*, Vol. 30, pp. 186–195.
5. Finch S. R. 2003, *Mathematical Constants*, Cambridge University Press (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Book 94).
6. Furtwängler H. 1927, "Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. I", *Math. Ann.*, Vol. 96, pp. 169–175.
7. Furtwängler H. 1928, "Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. II", *Math. Ann.*, Vol. 99, pp. 71–83.
8. Hurwitz A. 1891, "Über die angenaherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche", *Math. Ann.*, Vol. 39, pp. 279–284.
9. Krass S. 1985, "Estimates for n -dimensional Diophantine approximation constants for $n \geq 4$ ", *J. Number Theory*, Vol. 20, Is. 2, pp. 172–176.
10. Krass S. 1985, "The N -dimensional diophantine approximation constants", *Australian Mathematical Society*, Vol. 32, Is. 2, pp. 313–316.
11. Mack J. M. 1977, "Simultaneous Diophantine approximation", *J. Austral. Math. Soc. A.*, Vol. 24, pp. 266–285.
12. Nowak W. G. 1981, "A note on simultaneous Diophantine approximation", *Manuscr. Math.*, Vol. 36, pp. 33–46.
13. Nowak W. G. 1993, "A remark concerning the s -dimensional simultaneous Diophantine approximation constants", *Graz. Math. Ber.*, Vol. 318, pp. 105–110.
14. Nowak W. G. 2014, "Lower bounds for simultaneous Diophantine approximation constants", *Comm. Math*, Vol. 22, Is. 1, pp. 71–76.
15. Nowak W. G. 2016, "Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz's theorem", In: *T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), Essays in mathematics and its applications*, Springer, Switzerland, pp. 181–197.
16. Basalov Yu. A., 2018, "On the history of estimates of the constant of the best joint Diophantine approximations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 388–405. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-394-411>
17. Basalov Yu. A., 2019, "Estimation of the constant of the best simultaneous Diophanite approximations for $n = 5$ and $n = 6$ " *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 0-0. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-000000000000000000000000>

18. Cassels J. W. S. 1965, *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Mir.
19. Moshchevitin N. G. 2002, "To the Blichfeldt-Mullender-Spohn theorem on simultaneous approximations", *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute*, Vol. 239, pp. 268–274.
20. Schmidt W. M. 1983, *Diophantine Approximation*, Mir.
21. A Database for Number Fields. Available at: <http://galoisdb.math.upb.de/>

Получено 23.05.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.