ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 4 (2014)

УДК 512.543

КОМБИНАТОРНАЯ ТЕОРИЯ ГРУПП В ИВАНОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Д. И. Молдаванский (г. Иваново)

Аннотация

Изложение истории развития исследований по комбинаторной теории групп в Ивановском государственном университете и обзор результатов, полученных с 60-х годов прошлого столетия по настоящее время. Представляемые результаты относятся, главным образом, к изучению свойства финитной аппроксимируемости групп и его различных обобщений применительно к свободным конструкциям групп и к группам, определяемым одним соотношением.

Ключевые слова: обобщенное свободное произведение групп, HNN-расширение, группы с одним определяющим соотношением, финитно аппроксимируемые группы.

Библиография: 76 названий

COMBINATORIAL GROUP THEORY IN IVANOVO STATE UNIVERSITY

D. I. Moldavanskii (Ivanovo)

Abstract

Outlines of the history of researches on the Combinatorial Group Theory in the Ivanovo State University and an overview of the results obtained from 60-s of the last century up to the present. The results that are presented concern mainly to the study of property of residual finiteness of groups and of its various generalizations as applied to free constructions of groups and to the one-relator groups.

Keywords: generalized free product of groups, HNN-extension, one-related groups, residually finite groups.

Bibliography: 76 titles

1. Введение

Становление и развитие научно-исследовательской работы в области алгебры и, в частности, в области теории групп в Ивановском государственном педагогическом институте (впоследствии — Ивановском государственном университете) явилось результатом работы в институте в течение многих лет выдающегося математика современности Анатолия Ивановича Мальцева. При этом, ряд работ по теории групп А. И. Мальцева и его учеников, выполненных в этот период, относится к тому разделу общей теории групп, который теперь называется комбинаторной теорией групп и характеризуется тем, что информация о строении и свойствах группы извлекается из вида ее задания порождающими и определяющими соотношениями.

Отдельным направлением научно-исследовательской работы на кафедре высшей алгебры (впоследствии — кафедре алгебры и математической логики) комбинаторная теория групп становится после того, как к работе на кафедре приступает Мартин Давидович Гриндлингер. Разумеется, этому немало способствовала и атмосфера научного поиска на математическом факультете института, созданная А. И. Мальцевым. Полагаю, что об этом следует сказать несколько подробнее.

Напомню, что в 1931 году после окончания математического факультета Московского университета А. И. Мальцев переезжает в Иваново и с 1932 года в течение почти тридцати лет до переезда в 1960 году в Новосибирский академгородок непрерывно работает в Ивановском педагогическом институте сначала ассистентом, затем доцентом и профессором, заведуя созданной им кафедрой высшей алгебры. Здесь он проводил интенсивную и весьма успешную научно-исследовательскую работу в области алгебры и математической логики, сочетая ее с организацией и выполнением плодотворной педагогической деятельности, воспитал группу математиков, получившую неофициальное название Ивановской алгебраической школы.

2. М. Д. Гриндлигер и Ивановская алгебраическая школа

После отъезда Анатолия Ивановича в Новосибирск на кафедре алгебры остались работать его ученики Д. М. Смирнов и Е. А. Халезов. Кафедру возглавил Д. А. Захаров, которого также можно считать учеником А. И. Мальцева, хотя кандидатскую диссертацию он написал по топологии под руководством В. А. Ефремовича. Благодаря им, на кафедре (и в целом на математическом факультете) сохранилась атмосфера научного творчества, продолжал работать созданный А. И. Мальцевым алгебраический семинар, активным участником которого стал и М. Д. Гриндлигер, переехавший в Иваново по приглашению А. И. Мальцева и приступивший к работе на кафедре в 1960 году.

Научно-исследовательская работа на кафедре проводилась по следующим сложившимся к этому времени направлениям: теория алгоритмов (Д. А. Захаров и его аспирант Е. А. Поляков), теория групп и теория колец (Д. М. Смирнов и его аспирант А. И. Черемисин). Аспирантом кафедры был и И. А. Лавров. Его научным руководителем являлся А. И. Мальцев, и потому все время аспирантской подготовки он провел в Новосибирске. На кафедру вернулся в 1963 году после защиты кандидатской диссертации и проработал здесь до 1966 года, т. е. до перехода на работу в Новосибирском Академгородке. Несколько ранее в Новосибирск переехали Д. М. Смирнов и Д. А. Захаров. После этого исследования по теории алгоритмов и теории колец выполнялись соответственно Е. А. Поляковым и А. И. Черемисиным (уже ставшими кандидатами наук) и их аспирантами. Исследования по теории групп проводил со своими аспирантами М. Д. Гриндлигер.

Первая группа аспирантов Мартина Давидовича (поступивших в 1962 году) состояла из трех выпускников математического факультета нашего института Е. В. Кашинцева, В. В. Солдатовой и М. В. Постниковой. В это время Мартин Давидович, занимаясь алгоритмическими проблемами теории групп, доказывал теоремы, ставшие основой важного раздела современной комбинаторной теории групп, именуемого теорией малых сокращений. Задачи по этой проблематике он предложил и своим аспирантам. Серьезные результаты в этом направлении получила В. В. Солдатова (см. [1], [2]), защитившая диссертацию в 1969 году. Е. В. Кашинцев занимался теорией полугрупп и защитил диссертацию позднее. М. В. Постникова аспирантуру закончила без защиты диссертации и, насколько мне известно, впоследствии стала кандидатом наук в области, связанной с теорией обучения.

По материалам своих исследований Мартин Давидович читал спецкурсы для аспирантов и студентов, которые я исправно посещал. Но когда я в 1964 году стал аспирантом Мартина Давидовича и он предложил мне заниматься аналогичной проблематикой, я ему честно ответил, что она не очень меня привлекает. К этому времени я уже приобрел некоторое представление о содержании и методах современной алгебры вообще и теории групп в частности.

С конца третьего или начала четвертого курса (точнее не помню) по весьма настоятельному совету А. И. Черемисина (тогда — студента 5-го курса) я начал посещать заседания научно-исследовательского семинара кафедры алгебры. Разумеется, поначалу я мало что понимал, но соединение этих занятий с чтением соответствующей литературы постепенно привело меня к более осмысленному восприятию произносимых сообщений.

Кроме того, по совету того же А. И. Черемисина я прочитал статью, написанную англичанином (имя которого я забыл и не смог восстановить) о промежуточных группах, т. е. о группах, на множестве элементов которого определено тернарное отношение “лежать между”, обобщающее отношение порядка и связанное естественным образом с групповой операцией. А. И. Черемисин предложил мне изучить промежуточные полугруппы, и я даже получил какойто результат о строении промежуточных полугрупп с сокращением. Этот результат нигде не публиковался, и все это вскоре было благополучно забыто так же, как забытым оказалось, насколько мне известно, и понятие промежуточной группы.

Мое заявление Мартина Давидовича не обидело, что, как я понял много лет спустя, явилось ярким свидетельством его демократичности и чрезвычайного уважения к любому человеку, независимо от его возраста и положения. Он предложил мне самому выбрать тему для исследования, для чего передал мне ряд статей, авторы которых, как и он сам, принадлежали научной школе, созданной В. Магнусом.

Первой из прочитанных мною статей оказалась обзорная работа Г. Баумслага [3], в которой были приведены практически все известные к тому времени результаты о группах с одним определяющим соотношением. В частности, я узнал о двух классических результатах В. Магнуса о группах с одним определяющим соотношением: теорема о свободе и алгоритмическая разрешимость проблемы слов. По статье [4] я познакомился с идеями и техникой их доказательства, а в статье [5] — с определением и свойствами конструкции свободного произведения групп с объединенными подгруппами.

В конце обзора [3] Г. Баумслаг спрашивал, какие абелевы группы могут быть подгруппами группы с одним определяющим соотношением, и, в частности, предполагал, что аддитивная группа рациональных чисел не может быть подгруппой группы с одним определяющим соотношением. Занявшись с благословения Мартина Давидовича этим вопросом, я доказал (см. [6, теорема 3]), что произвольная абелева подгруппа группы с одним определяющим соотношением является либо конечной циклической, либо свободной абелевой ранга 2, либо группой без кручения ранга 1. Поскольку вопрос о том, какие группы ранга 1 действительно вложимы в группу с одним соотношением, остался открытым, гипотеза Баумслага в работе [6] также осталась неразрешенной. Ее справедливость несколько позже была доказана в [7].

Следует отметить, что последовавшие вскоре ссылки на статью [6] относились не к результату теоремы 3, а к ее доказательству. Ранее в работе [8] была введена теоретико-групповая конструкция, названная впоследствии HNN-расширением (расширением Г. Хигмана, Б. Неймана и Х. Нейман). Так вот, при доказательстве теоремы 3 я воспользовался следующим замеченным мной утверждением: произвольная группа G, задаваемая одним определяющим словом R, в запись которого входят хотя бы два порождающих и сумма показателей в котором по одному из порождающих равна нулю, является HNN-расширением, базовая группа которого задается одним определяющим словом длины, меньшей, чем длина R. Используя это замечание и некоторые свойства HNN-расширений, Дж. МакКулл и П. Шупп в статье [9] привели более короткие и более простые доказательства ряда известных результатов о группах с одним определяющим соотношением, включая вышеупомянутые результаты Магнуса. С того времени практически во всех работах, посвященных изучению групп этого семейства, используется конструкция HNN-расширения.

Разумеется, при подготовке этой первой моей статьи я постоянно консультировался с Мартином Давидовичем. Надо было видеть, как он радовался нашим успехам и как огорчался при неудачах. Я продолжал обращаться к нему за советом и после его переезда в Тулу. В это время мне удалось доказать алгоритмическую разрешимость проблемы сопряженности конечно порожденных подгрупп свободной группы. Чтобы проверить правильность своих рассуждений я поехал в Тулу и выступил с докладом на организованном им семинаре в Тульском педагогическом институте. Вскоре после этого Мартин Давидович, выступая на семинаре "Алгебра и логика" в Новосибирском Академгородке с докладом о своих работах и работах учеников, рассказал и об этом моем результате, что в соответствии с принятым там порядком позволило мне опубликовать его в одноименном журнале (см. [10]).

Отмечу, что этот результат был впоследствии усилен, а именно, в статье [11] было доказано, что произвольная свободная группа F является финитно аппроксимируемой относительно сопряженности конечно порожденных подгрупп. Это означает, что для любых конечно порожденных подгрупп A и B группы F, не сопряженных в этой группе, существует гомоморфизм группы F на некоторую конечную группу G, образы подгрупп A и B относительно которого в группе G не сопряжены. В силу замечания А. И. Мальцева [12] отсюда следует алгоритмическая разрешимость соответствующей проблемы. (Недавно результат из [11] был также доказан в [13]).

3. Ивановская алгебраическая школа после отъезда М. Д. Гриндлингера

Я защитил диссертацию в 1968 году. В это же время М. Д. Гриндлингер переехал в Тулу, где возглавил кафедру высшей алгебры и геометрии Тульского педагогического института. Вместе с ним уехал и его аспирант А. Е. Устян. Таким образом, в Иваново осталось лишь два человека, работающих в области комбинаторной теории групп: я и В. В. Солдатова. Естественное желание увеличить число исследований путем привлечения молодежи начало осуществляться обычным способом чтения специальных курсов и проведения спецсеминаров. Этой работе весьма помогало и то, что тогда, благодаря Мартину Давидовичу, мы располагали оригинальным изданием (1966 года) монографии [14], перевод которой под редакцией М. Д. Гриндлингера вскоре был выполнен мною и московскими математиками А. А. Фридманом и Ю. И. Хмелевским. В результате сложился творческий коллектив, состав которого, разумеется, изменялся время от времени и который успешно работает до сих пор и, как всегда, состоит из сотрудников факультета, аспирантов и студентов. Приведу некоторые из результатов, полученных членами этого коллектива.

Мой первый аспирант А. П. Горюшкин, занимаясь некоторыми свойствами подгрупп (обычного и обобщенного) свободного произведения двух групп обобщил и усилил ряд результатов из работ [15] и [16]. В частности, он получил положительный ответ на вопрос из [15], доказав, что в обычном свободном произведении G неединичных групп произвольная конечно разложимая подгруппа, пересекающаяся нетривиально с каждой неединичной нормальной подгруппой группы G, имеет в этой группе конечный индекс [17]. (Напомню, что подгруппа свободного произведения называется конечно разложимой, если ее разложение Куроша состоит из конечного числа сомножителей. В вопросе из [15] речь шла о конечно порожденных подгруппах, которые, как легко видеть, являются конечно разложимыми.) По понятным причинам статья [17] оставалась неизвестной для зарубежных математиков, и недавно этот результат был передоказан в [18].

Заметные результаты были получены по вопросам, связанным с разрешимостью уравнений над группами. Уравнение над группой является аналогом алгебраического уравнения, т. е. уравнения вида $f(x) = 0$, где $f(x)$ — многочлен над некоторым полем. Классическая теорема алгебры утверждает, что для любого поля F и произвольного многочлена $f(x)$ положительной степени над этим полем существует расширение поля F, в котором уравнение имеет решение.

Если G — некоторая группа, аналогом многочлена от одной переменной над этой группой является элемент $w(x)$ свободного произведения $G[x] = G * X$ группы G и бесконечной циклической группы X с порождающим x, а аналогом положительности степени является требование, чтобы элемент $w(x)$ не был сопряженным в группе $G[x]$ ни с одним элементом из подгруппы G (и далее это предполагается всегда выполненным). Говорят, что уравнение $w(x) = 1$ разрешимо над группой G, если существует группа H, содержащая группу G и такой элемент c, что $w(c) = 1$ (или, что равносильно, если нормальное замыкание в группе $G[x]$ элемента $w(x)$ пересекается с подгруппой G тривиально).

Оказалось, что, в отличие от упомянутой выше ситуации для алгебраических уравнений, существуют группы, некоторые уравнения над которыми не является разрешимыми; простейшим примером такой группы является конечная циклическая группа простого порядка. С другой стороны, теорема Магнуса о свободе фактически означает, что свободные группы являются примерами групп, над которыми разрешимы любые уравнения. Существуют также (см., напр., [19]) примеры уравнений, разрешимых над любыми группами. Таким образом, здесь естественно возникают две задачи: первая состоит в описании всех таких групп, над которыми разрешимы любые уравнения, а вторая состоит в описании вида всех таких уравнений, которые разрешимы над любыми группами. Были сформулированы и соответствующие гипотезы: 1) над группой без кручения любое уравнение разрешимо и 2) любое степенное уравнение, т. е. уравнение вида $w(x)^n = 1$, где $n > 1$, над каждой группой разрешимо. Обе гипотезы до сих пор остаются неразрешенными. По первой из них заметное продвижение принадлежит С. Д. Бродскому [20], доказавшему, что над произвольной локально индикабельной группой любое уравнение разрешимо (группа называется локально индикабельной, если каждая ее конечно порожденная подгруппа обладает гомоморфизмом на бесконечную циклическую группу). По второй существенных результатов добился В. Н. Егоров [21], доказавший, что степенные уравнения определенного вида разрешимы над любой группой. Насколько мне известно, к настоящему времени эти результаты улучшить никому не удалось.

4. Финитная аппроксимируемость групп и некоторые ее обобщения

Начиная с 80-х годов прошлого столетия основным направлением научно-исследовательской работы нашей кафедры постепенно становится раздел современной комбинаторной теории групп, в котором изучаются свойства финитной аппроксимируемости групп и его обобщений применительно к свободным конструкциям групп. Изучение свойств финитно аппроксимируемых групп можно считать одним из традиционных направлений научной работы кафедры. Действительно, как утверждают авторы монографии [22] понятие финитно аппроксимируемой группы впервые в явном виде появилось в статье А. И. Мальцева [23] (используемое теперь название для этого понятия вошло в обиход позднее). В статье [12] он вводит такие обобщения этого понятия как аппроксимируемость группы в произвольном классе групп $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$-аппроксимируемость) и финитная отделимость подгрупп; ранее, в работе [24], уже рассматривается аппроксимируемость групп в классе нильпотентных групп. (Далее, используя обозначение $\mathcal{F}$ для класса всех конечных групп, я буду термин "финитная аппроксимируемость" сокращать до $\mathcal{F}$-аппроксимируемости; аналогично, понятное значение будет иметь термин $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость, где $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p-групп, и т. п.) Эти результаты А. И. Мальцева являются основополагающими в данном разделе теории групп и цитируются практически в каждой работе по этой проблематике наших и зарубежных авторов. Весьма интересной и важной является и доказанная Д. М. Смирновым [25] теорема, утверждающая, что группа автоморфизмов конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой (этот же результат независимо и практически одновременно был получен и Г. Баумслагом [26]).

Одна из теорем статьи [12] утверждает, что расщепляемое расширение конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы при помощи $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Простые примеры показывают, что в этой теореме, как и в теореме Д. М. Смирнова, предположение о конечной порожденности группы является существенным. Тем не менее, Д. Н. Азаров [27] заметил, что это условие можно ослабить, доказав, что если G — $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа конечного общего ранга, то $\mathcal{F}$-аппроксимируемыми являются группа автоморфизмов группы G и расщепляемое расширение группы G при помощи произвольной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы. (Напомню (см. [28]), что группа G называется группой конечного общего ранга, если существует такое натуральное число r, что всякое конечное множество ее элементов содержится в некоторой подгруппе, обладающей не более чем r порождающими.) Классическая теорема А. И. Мальцева о хопфовости конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы также может быть распространена на группы конечного общего ранга.

Приведу еще один результат Д. Н. Азарова, в котором рассматривается свойство аппроксимируемости корневыми классами групп. Семейство корневых классов групп было введено К. Грюнбергом в статье [29]; оно включает в себя, частности, такие классы, как класс всех конечных групп, всех конечных p-групп, всех разрешимых групп. В статье [29] было доказано, что для любого корневого класса $\mathcal{K}$ обычное свободное произведение произвольного семейства $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда каждая свободная группа $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Д. Н. Азаров [30] показал, что произвольная свободная группа является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой для любого корневого класса $\mathcal{K}$, доказав тем самым, что для любого корневого класса $\mathcal{K}$ свободное произведение произвольного семейства $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой.

Таким образом, в частности, обычное свободное произведение произвольного семейства $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Простые примеры показывают, что аналогичное утверждение может оказаться неверным уже для обобщенного свободного произведения двух групп, и это приводит к поискам условий наследования обобщенным свободным произведением от сомножителей свойства $\mathcal{F}$-аппроксимируемости. Доказательства практически всех известных к настоящему времени результатов об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп используют методику, предложенную Г. Баумслагом [31] и основанную на доказанной в этой работе теореме, утверждающей, что обобщенное свободное произведение двух конечных групп $\mathcal{F}$-аппроксимируемо. Используя указанную методику, Д. Н. Азаров доказал в работе [32], что свободное произведение G с одной объединенной подгруппой произвольного (не обязательно конечного) семейства конечных групп является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой, если порядки групп этого семейства ограничены в совокупности (что обобщает упомянутую теорему Баумслага). Более того, в этом случае группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема относительно сопряженности.

По понятным причинам я не буду приводить здесь формулировок многих других наших результатов по $\mathcal{F}$-аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп. Отмечу лишь, что в последнее время в этом направлении был получен ряд глубоких результатов для случая, когда сомножители являются разрешимыми группами конечного специального ранга (в смысле [28]), см. [33], [34], [35].

Положение с $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемостью обобщенных свободных произведений групп оказалась еще более сложным, поскольку уже обобщенное свободное произведение двух конечных p-групп может не быть $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой. Соответствующий критерий был получен Г. Хигманом [36], и на его основе в [37] была предложена методика, являющаяся p-аналогом методики Баумслага упомянутой выше. С помощью этой методики был получен ряд результатов об $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенных свободных произведений. В частности, в [32] указан критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободного произведения с одной объединенной конечной подгруппой свободного произведения произвольного семейства $\mathcal{F}_p$-аппроксимируем групп.

Для изучения условий $\mathcal{F}$-аппроксимируемости HNN-расширений групп, методика, аналогичная методике Баумслага, была разработана независимо в работах [38] и [39]. Ряд результатов с применением этой методики был получен в статьях [40] и [41]. Критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости HNN-расширения конечной p-группы был получен в статье [42], и там же на его основе разработана методика получения соответствующих условий для HNN-расширений с бесконечной базовой группой; см. также [43].

Наряду с $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемыми группами рассматриваются группы почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемые, т. е. группы, обладающие $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой нормальной подгруппой конечного индекса. Во многих случаях свойство почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости ведет себя лучше свойства $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости. Так приведенные выше теоремы Мальцева о расщепляемых расширениях и Смирнова о группах автоморфизмов перестают быть верными для свойства $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости. Тем не менее, в статье [44] доказано, что расщепляемое расширение почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы конечного общего ранга при помощи почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой и группа автоморфизмов почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы конечного общего ранга является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой. Из ряда результатов, относящихся к почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободных конструкций групп, приведу формулировки лишь двух: в работе [45] доказано, что свободное произведение двух полициклических групп с нормальными объединяемыми подгруппами является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой для любого простого числа p, а одним из следствий основного результата статьи [46] является утверждение о почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости нисходящего HNN-расширения почти полициклической группы для почти всех простых чисел p (см. также [47]). В статьях [48] – [51] рассматривается аппроксимируемость и почти аппроксимируемость свободных конструкций групп произвольными корневыми классами.

Вместе с $\mathcal{K}$-аппроксимируемостью групп, т. е. с аппроксимируемостью в классе $\mathcal{K}$ относительно предиката равенства, применительно к свободным конструкциям групп рассматривалась и аппроксимируемость и относительно других предикатов, главным образом, — относительно сопряженности и относительно принадлежности элемента подгруппе (выше упоминалось и свойство аппроксимируемости относительно сопряженности подгрупп). Приведу несколько полученных здесь результатов.

В. Н. Ремесленников [52] доказал, что обычное свободное произведение произвольного семейства $\mathcal{F}$-аппроксимируемых относительно сопряженности групп является группой, $\mathcal{F}$-аппроксимируемой относительно сопряженности. С другой стороны, легко привести пример обобщенного свободного произведения двух $\mathcal{F}$-аппроксимируемых относительно сопряженности групп, которое не является даже просто $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. В статье [53] построен более тонкий пример обобщенного свободного произведения двух $\mathcal{F}$-аппроксимируемых относительно сопряженности групп, являющегося $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой и не являющегося группой, $\mathcal{F}$-аппроксимируемой относительно сопряженности.

В работе [54] доказано, что обобщенное свободное произведение двух конечных групп и HNN-расширение конечной группы являются группами, $\mathcal{F}$-аппроксимируемыми относительно сопряженности. Аналогичное утверждение об $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости относительно сопряженности свободных конструкций, составленных из конечных p-групп, вообще говоря, не является справедливым, поскольку, как отмечалось выше, такие группы могут не быть просто $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемыми. Тем не менее, в статье [55] показано, что обобщенное свободное произведение двух конечных p-групп является группой, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой относительно сопряженности, если объединяемые подгруппы лежат в центрах сомножителей.

Приведу еще результат, показывающий, что условие $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы относительно сопряженности является намного более жестким ограничением, чем $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость и $\mathcal{F}$-аппроксимируемость относительно сопряженности. Хорошо известно [56], что конечно порожденные нильпотентные группы $\mathcal{F}$-аппроксимируемы относительно сопряженности. Известно также [29], что для любого множества простых чисел π конечно порожденная нильпотентная группа является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда ее периодическая часть является π-группой. В статье [57] доказано, что для любого непустого собственного подмножества π множества всех простых чисел конечно порожденная нильпотентная группа $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема относительно сопряженности тогда и только тогда, когда ее периодическая часть является π-группой и фактор-группа по периодической части абелева.

Переходя к свойству $\mathcal{F}$-отделимости подгрупп (т. е. $\mathcal{F}$-аппроксимируемости относительно предиката вхождения элемента в подгруппу), напомню, прежде всего, что уже каждая нециклическая свободная группа содержит подгруппу, не являющуюся $\mathcal{F}$-отделимой. Известно, тем не менее, что в любой свободной группе произвольная конечно порожденная подгруппа $\mathcal{F}$-отделима. Поскольку практически каждая группа, построенная с помощью свободных конструкций, содержит нециклическую свободную подгруппу, отсюда следует, что в задаче нахождения условий наследования свободными конструкциями групп свойства $\mathcal{F}$отделимости всех подгрупп определенного вида интересно рассматривать лишь конечно порожденные подгруппы. Соответствующие исследования были начаты в работе [58] и продолжены в других работах, см., напр., [59].

Некоторые условия $\mathcal{F}$-отделимости циклических подгрупп для обобщенных свободных произведений установлены в статьях [60] и [61], а для HNN-расширений — в статьях [62] и [63]. Частичным обобщением некоторых результатов из [58] и [59] является следующее утверждение, доказанное в [64]: в обобщенном свободном произведении двух групп все конечно порожденные подгруппы $\mathcal{F}$-отделимы, если этим свойством обладают свободные множители, а объединяемые подгруппы нормальны в них и удовлетворяют условию максимальности.

5. Группы с одним определяющим соотношением. Группы Баумслага — Солитэра

Исследованиям различных свойств групп с одним определяющим соотношением был также посвящен ряд наших публикаций. Так, в статье [65] доказано, что группа, задаваемая одним определяющим соотношением вида $w^n = 1$, где w — позитивное слово и n — составное целое число, $\mathcal{F}$-аппроксимируема. Основной результат работы [66] утверждает, что если центр группы с одним определяющим соотношением нетривиален, то все ее конечно порожденные подгруппы $\mathcal{F}$-отделимы. В статье [67] найдены примеры пар неизоморфных групп с одним определяющим соотношением, каждая из которых является гомоморфным образом другой.

Особое место среди групп с одним определяющим соотношением занимает семейство групп Баумслага – Солитэра. Так теперь называют группы вида $G(m, n) = \langle a, b;\ a^{-1}b^m a = b^n \rangle$, где m и n — ненулевые целые числа, причем без потери общности можно считать, что параметры m и n, определяющие группу $G(m, n)$, удовлетворяют условию $|n| \geqslant m > 0$. Это семейство групп было введено в рассмотрение в статье [68], авторы которой среди групп $G(m, n)$ обнаружили первые примеры групп с одним определяющим соотношением, не являющихся хопфовыми и, следовательно, не являющихся $\mathcal{F}$-аппроксимируемыми. В течение полувека свойства групп Баумслага – Солитэра привлекали внимание многих математиков, в частности, — членов нашего коллектива. В работе [69] было доказано, что группы $G(m, n)$ и $G(m', n')$, где $|n| \geqslant m > 0$ и $|n'| \geqslant m' > 0$ изоморфны тогда и только тогда, когда $m = m'$ и $n = n'$, и это дает очевидный алгоритм решения проблемы изоморфизма для групп этого семейства.

В работе [70] было доказано, что группа $G(m, n)$ $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда (при условии $|n| \geqslant m > 0$) или $m = 1$, или $|n| = m.$. Критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, полученный в [42], состоит в том, что для любого простого числа p группа $G(m, n)$ (при тех же условиях относительно параметров) является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда или $m = 1$ и $n \equiv 1 \pmod{p}$, или $|n| = m = p^r$ для некоторого $r \geqslant 0$, причем если $n = -m$, то $p = 2$. Эти критерии вытекают также из описаний пересечений всех нормальных подгрупп конечного индекса и всех нормальных подгрупп конечного p-индекса произвольной группы $G(m, n)$, полученных в работах [71] и [72] соответственно. Д. Н. Азаров [73] доказал недавно, что группа $G(1, n)$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда простое число p не делит n, а при $|n| = m$ группа $G(m,n)$ является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой для любого простого числа p (это - критерий почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости групп Баумслага - Солитэра, так как любая почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой). Обзор полученных к настоящему результатов об аппроксимационных свойствах групп Баумслага – Солитэра содержится в [74], расширенный вариант — в [75].

6. Заключение

Разумеется, здесь перечислены далеко не все результаты, полученные в нашем коллективе за пятьдесят лет. Следует также отметить, что не все члены коллектива занимались теорией групп. Работы Л. М. Шнеерсона относятся к области, которую можно называть “Комбинаторная теория полугрупп”, и его кандидатская диссертация называлась “Тождества конечно определенных полугрупп”. В том же направление работал и А. И. Зимин, являвшийся фактически учеником Л. М. Шнеерсона.

Результаты исследований непременно докладывались их авторами на кафедральном семинаре. При этом доказательства заслушивались и обсуждались со всеми подробностями, и потому нередко один доклад занимал несколько заседаний семинара. Подготовленные статьи публиковались как в центральной печати, так и в издательстве нашего университета. Начиная с 2000 года издается “Вестник Ивановского государственного университета”, и в каждом его выпуске, содержащем раздел “Математика”, печатались наши статьи. К сожалению, статьи, опубликованные в нем, оказались трудно доступными для многих специалистов, и недавно было решено издать сборник [76] таких статей, опубликованных в период с 2000 по 2011 год.

По результатам исследований было защищено двенадцать кандидатских диссертаций и одна докторская. Назначена дата защиты еще одной кандидатской диссертации, идет подготовка докторской диссертации. Продолжается работа аспирантуры. Недавно руководить подготовкой аспирантов начал Д. Н. Азаров и уже добился здесь заметных успехов: его аспирант А. В. Розов блестяще защитил кандидатскую диссертацию.

Подводя итоги пятидесятилетних исследований по комбинаторной теории групп в Ивановском государственном университете, я с полным на то основанием могу утверждать, что эта работа будет успешно продолжаться и в дальнейшем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Солдатова В. В. О группах с δ-базисом, при $\delta < 1/4$, и одним дополнительным условием // Сиб. мат. журн. 1966. Т. 7, № 3. С. 617—627.

2. Солдатова В. В. Об одном классе конечно определенных групп // ДАН СССР. 1967. Т. 172, № 6. С. 1276—1277.

3. Baumslag G. Groups with one defining relator // J. Australian Math. Soc. 1964. Vol. 4, № 4. P. 385—392.

4. Karass A., Magnus W. and Solitar D. Elements of finite order in groups with a single defining relation // Comm. Pure Appl. Math. 1960. Vol. 13. P. 57—66.

5. Neumann B. H. An assay on free products of groups with amalgamations // Phil. Trans. Royal Soc. of London. 1954. Vol. 246. P. 503—554.

6. Молдаванский Д. И. О некоторых подгруппах групп с одним определяющим соотношением. // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, вып. 6. С. 1370—1384.

7. Newman B. B. Some results on one-relator groups. // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 74. P. 568—571.

8. Higman G., Neumann B. H. and Neumann H. Embedding Theorems for Groups // J. London Math. Soc. 1949. Vol. 24, № 4. P. 247—254.

9. McCool J. and Schupp P. On one relator groups and HNN extensions // J. Australian Math. Soc. 1973. Vol. 16, № 2 P. 249—256.

10. Молдаванский Д. И. Сопряженность подгрупп свободной группы // Алгебра и логика. 1969. Т. 8, вып. 6. С. 691—694.

11. Алексеев Ю. Н., Молдаванский Д. И. О сопряженности конечно порожденных подгрупп свободной группы // Чебышевский сборник. 2002. Т. 3, вып. 1. С. 8—10.

12. Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. Зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49—60.

13. Bogopolski O. and Grunewald F., On subgroup conjugacy separability in the class of virtually free groups // arXiv: 1012.5122v1 [math.GR]. 22 Dec.2010.

14. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974. 455 с.

15. Karrass A. and Solitar D. On finitely generated subgroups of a free product // Math. Z. 1969. Vol. 108. P. 285—287.

16. Karrass A. and Solitar D. The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 150. P. 227—255.

17. Горюшкин А. П. Ответ на один вопрос Каррасса и Солитэра // Учен. Зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1972. Т. 117. С. 44—58.

18. Steinberg B. On a Conjecture of Karrass and Solitar // arXiv: 1303.7279v1 [math.GR] 29 Mar 2013.

19. Levin F. Solutions of equations over groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P. 603–604.

20. Бродский С. Д. Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 26, № 2. С. 84—108.

21. 21. Егоров В. Н. Степенные уравнения над группами // Деп. ВИНИТИ, 03.03.08, №1127.

22. Чандлер Б., Магнус В. Развитие комбинаторной теории групп. М.: Мир, 1985. 253 с.

23. Мальцев А. И. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Мат. сб. 1940. Т. 8. С. 405—422.

24. Мальцев А. И. Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Мат. сб. 1949. Т. 25. С. 347—366.

25. Смирнов Д. М. К теории финитно аппроксимируемых групп // Укр. мат. журн. 1963. Т. 15. С. 453—457.

26. Baumslag G. Automorphism groups of residually finite groups // J. London Math. Soc. 1963. Vol. 38. P. 117—118.

27. Азаров Д. Н. О группах конечного общего ранга // Вестник Иван. гос. ун-та. 2004, Вып. 3. С. 100—103.

28. Мальцев А. И. О группах конечного ранга // Мат. сб. 1948. Т. 22, № 2. С. 351—352.

29. Gruenberg K. W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29—62.

30. Азаров Д. Н., Тьеджо Д. Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. Вып. 5. С. 6—10.

31. Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193—209.

32. Азаров Д. Н. О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 3—13.

33. Азаров Д. Н., Розов А. В. О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами // Вестник ИвГУ. 2011. Вып 2. С. 98—103.

34. Розов А. В. Некоторые аппроксимационные свойства свободных произведений разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, вып. 1. С. 130—142.

35. Азаров Д. Н. О финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 485—497.

36. Higman G. Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. Vol. 1. P. 301—305.

37. Логинова Е. Д. Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 395—407.

38. Cohen D. Residual finiteness and Britton's lemma // J. London Math. Soc.(2). 1977. Vol. 16. P. 232—234.

39. Baumslag B. and Tretkoff M. Residually finite HNN extensions // Communs in Algebra. 1978. Vol. 6(2). P. 179—194.

40. Молдаванский Д. И. Финитная аппроксимируемость нисходящих HNN-расширений групп // Укр. мат. журн. 1992. Т. 44. С. 842—845.

41. Молдаванский Д. И. Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений групп // Вестник Иван. гос. ун-та. 2003. Вып. 3. С. 123—133.

42. Молдаванский Д. И. Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений // Вестник Иван. гос. ун-та. 2000. Вып. 3. С. 129—140.

43. Молдаванский Д. И. Аппроксимируемость конечными p-группами некоторых HNN-расширений групп // Вестник Иван. гос. ун-та. 2003. Вып. 3. С. 102—116.

44. Азаров Д. Н. О почти аппроксимируемости конечными p-группами // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11, вып. 3. С. 11—21.

45. Розов А. В. О почти аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения полициклических групп с нормальными объединенными подгруппами // Известия ВУЗов. Математика. 2014. Вып. 11. С. 64—71.

46. Азаров Д. Н. О почти аппроксимируемости конечными p-группами нисходящих HNN-расширений // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, вып. 1. С. 9—19.

47. Азаров Д. Н. Аппроксимируемость разрешимых групп конечного ранга некоторыми классами конечных групп // Известия ВУЗов. Математика. 2014. Вып. 8. С. 18—29.

48. Азаров Д. Н., Гольцов Д. В. О почти аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп некоторыми классами конечных групп // Вестник Иван. гос. ун-та. Естеств., обществ. науки. 2012. Вып. 2. С. 98—103.

49. Азаров Д. Н., Туманова Е. А. Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2008. Вып. 6. С. 29—42.

50. Гольцов Д. В. О почти аппроксимируемости корневыми классами обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп. // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 3. С. 53—59.

51. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Модел. и анализ информ. систем. 2013. Т. 20, № 1. С. 133—137.

52. Ремесленников В. Н. Финитная аппроксимируемость групп относительно сопряженности // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 5. С. 1085—1099.

53. Азаров Д. Н, Иванова Е. А. О финитной аппроксимируемости относительно сопряженности свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. Вып. 5. С. 3—5.

54. Dyer J. L. Separating conjugates in amalgamating free products and HNN-extentions // J. Austral. Math. Soc. 1980. Vol. 29, № 1. P. 35—51.

55. . Иванова Е. А. Об аппроксимируемости относительно сопряженности конечными p-группами свободных произведений двух групп с объединенной подгруппой // Мат. заметки. 2004. Т. 76, вып. 4. С. 502—509.

56. Blackburn N. Conjugacy in nilpotent groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1965, Vol. 16, № 1, P. 143—148.

57. Иванова Е. А., Молдаванский Д. И. Об аппроксимируемости относительно сопряженности конечно порожденных нильпотентных групп // Вестник Иван. гос. ун-та. 2004. Вып. 3. С. 125—130

58. Allenby R., Gregorac R. On locally extended residually finite groups // Lecture Notes Math. 1973. Vol. 319. P. 9—17.

59. Allenby R., Tang C. Subgroup separability of generalized free products of free-by-finite groups // Canad. Math. Bull. 1993. Vol. 36(4). P. 385—389.

60. Соколов Е. В. Финитная отделимость циклических подгрупп в некоторых обобщенных свободных произведениях групп // Вестник молодых ученых ИвГУ. 2002. Вып. 2. С. 7—10.

61. Соколов Е. В. Замечание об отделимости подгрупп в классе конечных групп // Мат. заметки. 2003. Т. 73, вып. 6. С. 904—909.

62. Молдаванский Д. И. Об отделимости циклических подгрупп нисходящего HNN-расширения групп // Научн. тр. Ивановск. гос. ун-та. Математика. 2000. Вып. 3. С. 56—58.

63. Молдаванский Д. И. Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений групп // Вестник Иван. гос. ун-та. 2003. Вып. 3. С. 123—133.

64. Молдаванский Д. И., Ускова А. А. О финитной отделимости подгрупп обобщенных свободных произведений групп // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 3(47). С. 92—98.

65. Егоров В. Н. Финитная аппроксимируемость некоторых групп с одним определяющим соотношением // Алгебраические системы (межвузовский сб. науч. тр.). Иваново: Иван. гос. ун-т 1987. С. 100—121.

66. Молдаванский Д. И., Тимофеева Л. В. Конечно порожденные подгруппы группы, определяемой одним соотношением и обладающей нетривиальным центром, финитно отделимы // Известия ВУЗов. Математика. 1987. Вып. 12. С. 58—59.

67. Борщев А. В, Молдаванский Д. И. Об изоморфизме некоторых групп с одним определяющим соотношением // Мат. заметки. 2006. Т. 79, вып. 1. С. 34—44.

68. Baumslag G., Solitar D. Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P. 199—201.

69. Молдаванский Д. И. Изоморфизм групп Баумслага – Солитэра // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 12. С. 1684—1686.

70. Meskin S. Nonresidually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 164. P. 105—114.

71. Молдаванский Д. И. О пересечении подгрупп конечного индекса в группах Баумслага – Солитэра // Мат. заметки. 2010. Т. 87, вып. 1. С. 92—100.

72. Молдаванский Д. И. О пересечении подгрупп конечного p-индекса в группах Баумслага – Солитэра // Вестник Иван. гос. ун-та. 2010. Вып. 2. Естеств., обществ. науки. С. 106—111.

73. Азаров Д. Н. О почти аппроксимируемости конечными p-группами групп Баумслага – Солитэра // Модел. и анализ информ. систем. 2013. Т. 20. № 1. С. 116—123.

74. Молдаванский Д. И. Об аппроксимируемости групп Баумслага – Солитэра // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, вып.1(41). С. 110—113.

75. Moldavanskii D. On some residual properties of Baumslag – Solitar groups // arXiv: 1310.3585v1 [math.GR]. 14 Oct.2013.

76. Аппроксимационные свойства групп. Записки семинара по комбинаторной теории групп. Ред. Д. И.Молдаванский, Н. И.Яцкин. LAP: Lambert Academic Publishing. 2012. 285 с.

REFERENCES

1. Soldatova, V. V. 1966, "On the groups with δ-basis, where $\delta < 1/4$, and with the additional condition", *Sibirskii Math. J.*, vol. 7, № 3, pp. 617—627. (Russian)

2. Soldatova, V. V. 1967, "On the one class of finitely related groups", *DAN SSSR.*, vol. 172, № 6, pp. 1276—1277. (Russian)

3. Baumslag, G. 1964, "Groups with one defining relator", *J. Australian Math. Soc.*, vol. 4, № 4, pp. 385—392.

4. Karass, A., Magnus, W. & Solitar, D. 1960, "Elements of finite order in groups with a single defining relation", *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 13, pp. 57—66.

5. Neumann, B. H. 1954, "An assay on free products of groups with amalgamations", *Phil. Trans. Royal Soc. of London.*, vol. 246, pp. 503—554.

6. Moldavanskii, D. I. 1967, "On some subgroups of one-relator groups", *Sibirskii Math. J.*, vol. 8, issue 6, pp. 1370—1384. (Russian)

7. Newman, B. B. 1968, "Some results on one-relator groups", *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 74, pp. 568—571.

8. Higman, G., Neumann, B. H. & Neumann, H. 1949, "Embedding Theorems for Groups", *J. London Math. Soc.*, vol. 24, № 4, pp. 247—254.

9. McCool, J. & Schupp, P. 1973, "On one relator groups and HNN extensions", *J. Australian Math. Soc.*, vol. 16, № 2, pp. 249—256.

10. Moldavanskii, D. I. 1969, "Conjugacy of subgroups of a free group", *Algebra and Logic.*, vol. 8, issue. 6, pp. 691—694. (Russian)

11. Alekseev, Yu. N. & Moldavanskii, D. I. 2002, "On the conjugacy of finitely generated subgroups of a free group" , *Chebyshevskii Sb.*, vol. 3, issue 1, pp. 8—10 (in Russian).

12. Maltsev, A. I. 1958, "On homomorphisms onto finite groups" , *Uchen. zap. of Ivanovo State pedagogic Institute*, vol. 18, pp. 49—60.

13. Bogopolski, O. & Grunewald, F., 2010, "On subgroup conjugacy separability in the class of virtually free groups" , arXiv:1012.5122v1 [math.GR] 22 Dec 2010.

14. Magnus, W., Karass, A. & Solitar, D. 1974, "Kombinatornaya teoriya grupp" , *M.: Nauka*, 455 p. (Russian)

15. Karrass, A. & Solitar, D. 1969, "On finitely generated subgroups of a free product" , *Math. Z.*, vol. 108, pp. 285—287.

16. Karrass, A. & Solitar, D. 1970, "The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup" , *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 150, pp. 227—255.

17. Goryushkin, A. P. 1972, "The answer to one question of Karrass and Solitar" , *Uchen. zap. of Ivanovo State pedagogic Institute.*, vol. 117, pp. 44—58. (Russian)

18. Steinberg, B. 2013, "On a Conjecture of Karrass and Solitar" , arXiv: 1303. 7279v1 [math.GR] 29 Mar 2013.

19. Levin, F. 1962, "Solutions of equations over groups" , *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 68, pp. 603-604.

20. Brodzkii, S. D. 1984, "Equationz over groups and one-relator groups" , *Sibirskii Math. J.*, vol. 26, issue 2, pp. 84—108. (Russian)

21. Egorov, V. N. 2008, "Power equations over groups" , *Preprint. VINITI*, 03.03.08, № 1127. (Russian)

22. Chandler, B. & Magnus, V. 1985, "Razvitiye kombinatornoy teorii grupp" , *M.: Mir*, 253 p. (Russian)

23. Maltsev, A. I. 1940, "On the isomorphic reprezentation of infinite groups by matrixes" , *Math. sb.*, vol. 8, pp. 405—422. (Russian)

24. Maltsev, A. I. 1949, "Generalized nilpotent algebras and their associated groups" , *Math. sb.*, vol. 25, pp. 347—366. (Russian)

25. Smirnov, D. M. 1963, "On the theory of residually finite groups" , *Ukranian Math. J.*, vol. 15, pp. 453—457. (Russian)

26. Baumslag, G. 1963, "Automorphism groups of residually finite groups", *J. London Math. Soc.*, vol. 38, pp. 117—118.

27. Azarov, D. N. 2004, "On groups of finite general rank", *Vestnik of Ivanovo State University.*, issue 3, pp. 100—103. (Russian)

28. Maltsev, A. I. 1948, "On groups of finite rank", *Math. sb.*, vol. 22, issue 2, pp. 351—352. (Russian)

29. Gruenberg, K. W. 1957, "Residual properties of infinite soluble groups", *Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. 7, pp. 29—62.

30. Azarov, D. N. & Tieudjo, D. 2002, "On the residuallity of a free product with amalgamation by a root class of groups", *Nauch. trudy of Ivanovo State University. Mathematics.*, issue 5, pp. 6—10. (Russian)

31. Baumslag, G. 1963, "On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 106, pp. 193—209.

32. Azarov, D. N. 1997, "On residual finiteness of free products of groups with single amalgamated subgroup", *Sibirskii Math. J.*, vol. 38, pp. 3—13. (Russian)

33. Azarov, D. N. & Rozov, A. V. 2011, "On residual finiteness of free products of solvable groups of finite rank with normal amalgamated subgroups", *Vestnik of Ivanovo State University. Natural, Social Sciences.*, issue 2, pp. 98—103. (Russian)

34. Rozov, A. V. 2012, "Some residual properties of free products of solvable groups of finite rank with normal amalgamated subgroups", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 13, issue. 1, pp. 130—142. (Russian)

35. Azarov, D. N. 2013, "On residual finiteness of generalized free products of groups of finite rank", *Sibirskii Math. J.*, vol. 54, issue 3, pp. 485—497. (Russian)

36. Higman, G. 1964, "Amalgams of p-groups", *J. Algebra.*, vol. 1, pp. 301—305.

37. Loginova, E. D. 1999, "Residual finiteness of free product of two groups with commuting subgroups", *Sibirskii Math. J.*, vol. 40, issue 2, pp. 395—407. (Russian)

38. Cohen, D. 1977, "Residual finiteness and Britton's lemma", *J. London Math. Soc.(2).*, vol. 16, pp. 232—234.

39. Baumslag, B. & Tretkoff, M. 1978, "Residually finite HNN extensions", *Communs in Algebra.*, vol. 6(2), pp. 179—194.

40. Moldavanskii, D. I. 1992, "Residual finiteness of descending HNN-extensions of groups", *Ukranian Math. J.*, vol. 44., pp. 842—845. (Russian)

41. Moldavanskii, D. I. 2003, "Residual finiteness of some HNN-extensions of groups" , *Vestnik of Ivanovo State University*, issue 3, pp. 123—133. (Russian)

42. Moldavanskii, D. I. 2000, "Residuallity by finite p-groups of HNN-extensions" , *Vestnik of Ivanovo State University*, issue. 3, pp. 129—140. (Russian)

43. Moldavanskii, D. I. 2003, "Residuallity by finite p-groups of some HNN-extensions of groups" , *Vestnik of Ivanovo State University*, issue 3, pp. 102—116. (Russian)

44. Azarov, D. N. 2010, "On the virtually residuallity by finite p-groups" , *Chebyshevskii Sb.*, vol. 11, issue 3, pp. 11—21. (Russian)

45. Rozov, A. V. 2014, "On the virtually residuallity by finite p-groups of free product of polycyclic groups with normal amalgamated subgroups" , *Izvestiya VUZov. Mathematics.*, issue. 11, pp. 64—71. (Russian)

46. Azarov, D. N. 2012, "On the virtually residuallity by finite p-groups of descending HNN-extensions" , *Chebyshevskii Sb.*, vol. 13, issue 1, pp. 9—19. (Russian)

47. Azarov, D. N. 2014, "The residuallity of solvable groups of finite rank by some classes of finite groups" , *Izvestiya VUZov. Mathematics*, issue 8, pp. 18—29. (Russian)

48. Azarov, D. N. & Goltsov, D. V. 2012, "On the virtually residuallity of generalized free products and HNN-extensions of groups by some classes of finite groups" , *Vestnik of Ivanovo State University. Natural, Social Sciences*, issue 2, pp. 98—103. (Russian)

49. Azarov, D. N. & Tumanova, E. A. 2008, "On the residuallity of generalized free products of groups by root classes" , *Nauch. trudy of Ivanovo State University. Mathematics*, issue 6, pp. 29—42. (Russian)

50. Goltsov, D. V. 2013, "On the virtually residuallity by root classes of generalized free products and HNN-extensions of groups" , *Chebyshevskii Sb.*, vol. 14, issue 3, pp. 53—59. (Russian)

51. Tumanova, E. A. 2013, "On the residuallity of generalized free products by root classes of groups" , *Modeling and Analysis of Information Systems.*, vol. 20, issue 1, pp. 133—137. (Russian)

52. Remeslennikov, V. N. 1971, "Conjugacy separability of groups" , *Sibirskii Math. J.*, vol. 12, issue 5, pp. 1085—1099. (Russian)

53. Azarov, D. N. & Ivanova, E. A. 2002, "On the conjugacy separability of free product of two groups with amalgamation" , *Nauch. trudy of Ivanovo State University. Mathematics.*, issue 5, pp. 3—5. (Russian)

54. Dyer, J. L. 1980, "Separating conjugates in amalgamating free products and HNN-extentions" , *J. Austral. Math. Soc.*, vol. 29, issue 1, pp. 35—51.

55. Ivanova, E. A. 2004, "On the conjugacy separability by finite p-groups of free product of two groups with amalgamation" , *Math. zametki.*, vol. 76, issue 4, pp. 502—509. (Russian)

56. Blackburn, N. 1965, "Conjugacy in nilpotent groups" , *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 16, № 1, pp. 143—148.

57. Ivanova, E. A. & Moldavanskii, D. I. 2004, "On the conjugacy separability of finitely generated nilpotent groups" , *Vestnik of Ivanovo State University*, issue 3, pp. 102—116. (Russian)

58. Allenby, R. & Gregorac, R. 1973, "On locally extended residually finite groups" , *Lecture Notes Math.*, vol. 319, pp. 9—17.

59. Allenby, R. & Tang, C. 1993, "Subgroup separability of generalized free products of free-by-finite groups" , *Canad. Math. Bull.*, vol. 36(4), pp. 385—389.

60. Socolov, E. V. 2002, "Finite separability of cyclic subgroups in some generalized free products of groups" , *Vestnik molodih uchenih Ivgu*, issue. 2, pp. 7—10. (Russian)

61. Socolov, E. V. 2003, "A remark on the finite separability of subgroups" , *Math. zametki.*, vol. 73, issue 6, pp. 904—909. (Russian)

62. Moldavanskii, D. I. 2000, "On the conjugacy separability of cyclic subgroups of descending HNN-extension of groups" , *Nauch. trudy of Ivanovo State University. Mathematics.*, issue 3, pp. 56—58. (Russian)

63. Moldavanskii, D. I. 2003, "Residual finiteness of some HNN-extension of groups" , *Vestnik of Ivanovo State University.*, issue 3, pp. 123—133. (Russian)

64. Moldavanskii, D. I. & Uskova, A. A. 2013, "On the finite separability of subgroups of generalized free products of groups" , *Chebyshevskii Sb.*, vol. 14, issue 3(47), pp. 92—99. (Russian)

65. Egorov, V. N. 1987, "Residual finiteness of some one-relator groups" , *Algebraicheskiye sistemi (mejvuzovskii sb. nauch. tr.) Ivanovo: Ivanovo state Univ.* pp. 100—121. (Russian)

66. Moldavanskii, D. I. & Timofeeva, L. V. 1987, "Finetely generated sugroups of one-relator group with non-trivial center are finitely separable" , *Izvestiya VUZov. Mathematics.*, issue. 121, pp. 58—59. (Russian)

67. Borschev, A. V & Moldavanskii, D.I. 2006, "On the isomorphism of some one-relator groups" , *Math. zametki.*, vol. 79, issue 1, pp. 34—44. (Russian)

68. Baumslag, G. & Solitar, D. 1962, "Some two-generator one-relator non-Hopfian groups", *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 68, pp. 199—201.

69. Moldavanskii, D. I. 1991, "Isomorphism of Baumslag – Solitar groups", *Ukranian Math. J.*, vol. 43, issue 12, pp. 1684—1686. (Russian)

70. Meskin, S. 1972, "Nonresidually finite one-relator groups", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 164, pp. 105—114.

71. Moldavanskii, D. I. 2010, "On the intersection of subgroup of finite index in Baumslag – Solitar groups", *Math. zametki.*, vol. 87, issue 1, pp. 92—100. (Russian)

72. Moldavanskii, D. I. 2010, "On the intersection of subgroup of finite p-index in Baumslag – Solitar groups", *Vestnik of Ivanovo State University. Natural, Social Sciences.*, issue 2, pp. 106—111. (Russian)

73. Azarov, D. N. 2013, "On the virtually residuallity by finite p-groups of Baumslag – Solitar groups", *Modeling and Analysis of Information Systems.*, vol. 20, issue 1, pp. 116—123. (Russian)

74. Moldavanskii, D. I. 2012, "On residuality of Baumslag – Solitar groups", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 13, issue 1(41), pp. 110—113. (Russian)

75. Moldavanskii, D. 2013, "On some residual properties of Baumslag – Solitar groups", arXiv: 1310.3585v1 [math.GR]. 14 Oct.2013.

76. "Residual properties of groups. Notes of the seminar on Combinatorial group theory. Editors D. I. Moldavanskii, N. I. Yatskin.", *LAP: Lambert Academic Publishing.* 2012. 285 p.

Ивановский государственный университет
Поступило 30.11.2014