ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 51-7, 519.816

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-82-93

Исследование систем действительных функций на двумерных сетках с использованием нечетких множеств¹

А. Д. Гвишиани, С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов

Гвишиани Алексей Джерменович — Академик РАН, профессор, доктор физико-математических наук, научный руководитель, Геофизический центр РАН; главный научный сотрудник, Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта, г. Москва.

e-mail: s.gvishiani@gcras.ru

Агаян Сергей Мартикович — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Геофизический центр РАН, г. Москва.

e-mail: s.agayan@gcras.ru

Богоутдинов Шамиль Рафекович — кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Геофизический центр РАН; старший научный сотрудник, Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта, г. Москва.

e-mail: shm@gcras.ru

Аннотация

Настоящая работа посвящена изложению программы исследования конечной системы функций на конечной двумерной сетке, способной учесть любую экспертную точку зрения на заданные функции, их свойства и динамику. Программа реализована на языке нечетких множеств и нечеткой логики, содержит несколько этапов и в конечном итоге позволяет решить в каких областях исходного множества система заданных функций ведет себя наиболее интересно с экспертной точки зрения.

Ключевые слова: нечеткая математика, меры близости, динамические показатели, меры аномальности, функциональная кластеризация.

Библиография: 24 названия.

Для цитирования:

А. Д. Гвишиани, С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов. Исследование систем действительных функций на двумерных сетках с использованием нечетких множеств // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 94–111.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 51-7, 519.816

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-82-93

Investigation of systems of real functions on two-dimensional grids using fuzzy sets²

А. Д. Gvishiani, S. M. Agayan, Sh. R. Bogoutdinov

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-17-00241).

²The study was carried out at the expense of a grant from the Russian science Foundation (project 18-17-00241).

Gvishiani Alexey Dzhermenovich — Academician, Prof., D.Sc., Chief Scientist, Geophysical Center RAS; Principal research scientist, Schmidt Institute of Physics of the Earth RAS, Moscow.
e-mail: s.gvishiani@gcras.ru

Agayan Sergey Martikovich — D.Sc., Principal research scientist, Geophysical Center RAS, Moscow.
e-mail: s.agayan@gcras.ru

Bogoutdinov Shamil Rafekovich — Ph.D., Leading research scientist, Geophysical Center RAS; Senior research scientist, Schmidt Institute of Physics of the Earth RAS, Moscow.
e-mail: shm@gcras.ru

Abstract

This work deals with the description of the study of a finite function system on a finite two-dimensional grid able to consider any expert's point of view on the given functions, their features and dynamics. The program is implemented using the fuzzy sets and fuzzy logic language, it consists of several stages and, ultimately, makes it possible to decide in which areas of the initial set the system of given functions behaves most interestingly from an expert point of view.

Keywords: fuzzy mathematics, nearness measures, dynamic indicators, anomaly measures, functional clusterization.

Bibliography: 24 titles.

For citation:

A. D. Gvishiani, S. M. Agayan, Sh. R. Bogoutdinov, 2019, "Investigation of systems of real functions on two-dimensional grids using fuzzy sets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 94–111.

1. Введение

Поиск аномалий в полях геофизических данных [1, 2, 3, 4, 5, 6], распознавание мест возможного возникновения сильнейших, сильных и значительных землетрясений [7, 8, 9], оптимизация захоронения радиоактивных отходов [10] и целый ряд других актуальных проблем природного риска приводят исследователя (эксперта) к необходимости ранжирования узлов конечной двумерной сетки с целью выбора наилучших в смысле произведенных в них измерений.

В статье изучается конечная система функций на конечной двумерной сетке. При этом делается попытка учесть различные экспертные точки зрения на заданные функции, их свойства и динамику. а также на то, какие именно узлы мы объявляем "наилучшими". В работе используется язык нечетких множеств и нечеткой логики, обладающий большими возможностями по сравнению с классическими множествами и булевой логикой для передачи различных экспертных представлений о явлениях, описываемых рассматриваемыми функциями.

Перейдем к формализованной постановке задачи: система функций $\mathcal{F}$ на двумерной сетке W анализируется виртуальным экспертом $\mathcal{E}$. Предполагается, что эксперт $\mathcal{E}$ имеет точку зрения на динамику $\mathcal{F}$ в каждом узле $w \in W$ и задается при этом двумя вопросами:

1. В какой степени мера $\mu_{\mathcal{E}\mathcal{F}}(w) \in [0, 1]$ выражает интересующие эксперта $\mathcal{E}$ свойства системы функций $\mathcal{F}$ в узле w ?
2. Существуют ли достаточно большие связные области сетки W , в которых подавляющее число узлов w обладают интересующими экспертов $\mathcal{E}$ свойствами?

Настоящая работа делает попытку продвинуться в получении формализованных ответов на эти вопросы.

2. Исходные данные, соглашения и обозначения

На плоскости $\mathbb{R}^2(x_1, x_2)$ выбрана конечная сетка $\mathcal{W} = \mathcal{W}(h_1, h_2)$ с узлами w :

$$\mathcal{W} = \{w = (ih_1, jh_2) : i, j \in \mathbb{Z}\}$$

Для i и j будем также использовать обозначения $i(w)$ и $j(w)$.

Расстояние на $\mathcal{W}$ считается индуцированным нормой $\|\cdot\|_\infty$ в координатах i и j :

$$\|w - \bar{w}\| = \max(|i(w) - i(\bar{w})|, |j(w) - j(\bar{w})|)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Узлы w и $\bar{w}$ полагаем соседними, если $|i(w) - i(\bar{w})| + |j(w) - j(\bar{w})| = 1$, а отношение соседства обозначаем через N (w и $\bar{w}$ – соседи $\Leftrightarrow w N \bar{w}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Подмножество $W \subset \mathcal{W}$ будем называть связным, если для каждой пары его узлов внутри W существует соединяющий их путь, состоящий из соседних узлов.

Далее множество W предполагается связным и конечным.

Обозначим через $\mathcal{F}$ конечную систему функций на W , представляющую исходные данные задачи:

$$\mathcal{F} = \{f_i|_1^M, f_i : W \rightarrow \mathbb{R}\} \quad (1)$$

а через $\mathcal{F}(W)$ пространство всех вещественнозначных функций на W .

3. Меры близости

Локальный анализ функций на W невозможен без формализации понятия локализации самого пространства W . Такая локализация пространства W в каждом из узлов w осуществляется с помощью нечеткой структуры δ_w на W , называемой мерой близости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Мера близости δ_w в W к узлу w – функция принадлежности на W к нечеткому множеству $\{(\bar{w}, \delta_w(\bar{w})) : \bar{w} \in W\}$. Значение $\delta_w(\bar{w})$ выражает в шкале $[0, 1]$ при нормировке $\delta_w(w)$ степень близости узла $\bar{w}$ к узлу w в метрическом пространстве $(W, \|\cdot\|)$

Таким образом строится отображение $w \rightarrow \delta_w$, ставящее в соответствие каждому узлу $w \in W$ некоторое упорядочивание объектов $\bar{w} \in W$ по их близости к w , определенной мерой $\delta_w(\bar{w})$. Иными словами $\forall w \in W$ вводит на W свою структуру нечеткого множества.

Мера близости δ_w определяет нечеткие окрестности для w в W . В общем случае значение $\delta_w(\bar{w})$ может убывать не только с ростом расстояния $\|w - \bar{w}\|$, но и зависеть от других факторов, в частности, от расположения («топологии») узлов W вокруг w .

Мера близости δ_w формализует «взгляд эксперта $\mathcal{E}$ на W из узла w ». Такой «взгляд» есть ранжирование $\bar{w} \in W$ вокруг w весами $\delta_w(\bar{w})$, которые $\mathcal{E}$ придает узлам $\bar{w}$ при локальном анализе в узле w пространства W и функций на нем. Пространство W превращается в пространство с отмеченной точкой $w \in W$.

Эксперт $\mathcal{E}$ из узла $w \in W$ может переместиться в другую точку $v \in W$. Тогда его взгляд на пространство W из новой точки v , вообще говоря, изменится.

В приведенных ниже примерах мер близости неотрицательный параметр « p » отвечает за масштаб δ -локализации. Чем больше « p », тем δ -локализация сильнее, в частности, в самом слабом случае при $p = 0$ получится «точка зрения» на W , одинаковая во всех его узлах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.

1. Будем называть меру близости δ глобальной, если $\delta_w(\bar{w}) \neq 0 \forall w, \bar{w} \in W$. Иными словами обзор эксперта из любого узла w охватывает все W .

2. Меры близости, не являющиеся глобальными, будем называть локальными.

ПРИМЕР 1.

1. Глобальная мера близости (первая конструкция) (рис. 1)

$$\delta_w(\bar{w}) = \left(1 - \frac{\|\bar{w} - w\|}{\max_{\bar{w} \in W} \|\bar{w} - w\| + 1} \right)^p \quad (2)$$

Рис. 1: Глобальная мера близости (первая конструкция)

2. Глобальная мера близости (вторая конструкция)

$$\delta_w(\bar{w}) = \left(1 - \frac{\sum \|\bar{w} - w\| : \|\bar{w} - w\| \leq \|\bar{w} - w\|}{(\sum \|\bar{w} - w\| : \bar{w} \in W) + 1} \right)^p \quad (3)$$

Рис. 2: Глобальная мера близости (вторая конструкция)

3. Локальная мера близости (рис. 3)

$$\delta_w(\bar{w}) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\|\bar{w} - w\|}{r} \right)^p, & \text{если } \|\bar{w} - w\| \leq r \\ 0 & \text{если } \|\bar{w} - w\| > r \end{cases} \quad (4)$$

где $r = r(w)$ – радиус обзора эксперта в узле w .

Параметр « p » из (2)-(4) имеет существенное значение, т.к. решение о поведении системы функций $\mathcal{F}$ в узле w эксперт $\mathcal{E}$ принимает в результате системного анализа разномасштабных взглядов на W из w . Представляя собой первый параметр исследования, меры близости δ_w нужны эксперту $\mathcal{E}$ для локального анализа системы функций $\mathcal{F}$.

Рис. 3: Локальная мера близости

4. Динамические показатели

Эксперт анализирует с разных сторон исходные данные с целью извлечь максимальное из них знание об изучаемом процессе или явлении. Интерпретируя измерение на формальном математическом языке, мы будем считать его функцией на W . Результат ее изучения с точек зрения разных экспертов назовем динамическими показателями этой функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Динамическим показателем D мы называем неотрицательный функционал на конечном пространстве W , параметризованный им самим же, т.е.*

$$D : \mathcal{F}(W) \times W \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad (5)$$

где $\mathbb{R}^+$ есть множество неотрицательных вещественных чисел.

Значение $D(f, w)$ будет обозначаться через $D_f(w)$ и трактоваться как количественные оценки поведения функции f в узле w при "взгляде" D на ее динамику (при подходе D к ее динамике). $D_f(w)$ – количественное выражение определенной точки зрения на функцию f в w .

Подчеркнем, что в точке зрения $\mathcal{E}$ на функцию f присутствует мера близости $\delta_w(\bar{w})$. Это дает возможность для каждого узла $w \in W$ определить совокупность

$$\text{Im}_w f = \{(f(\bar{w}), \delta_w(\bar{w})), \bar{w} \in W\}, \quad (6)$$

которую мы будем называть нечетким образом функции f в узле w .

Динамические показатели $D_f(w)$ являются некоторыми числовыми характеристиками нечеткого образа. Существует открытый к пополнению набор таких характеристик. Каждая из них имеет прозрачное математическое толкование.

ПРИМЕР 2. *Динамические показатели*

1. Энергия

$$E_f(w|\delta) = \frac{\sum_{\bar{w} \in W} |f(\bar{w}) - M_f(w|\delta)| \delta_w(\bar{w})}{\sum_{\bar{w} \in W} \delta_w(\bar{w})} \quad (7)$$

где

$$M_f(w|\delta) = \frac{\sum_{\bar{w} \in W} f(\bar{w}) \delta_w(\bar{w})}{\sum_{\bar{w} \in W} \delta_w(\bar{w})}$$

2. Разброс

$$Q_f(w|\delta, q) = \left(\frac{\sum_{\bar{w}, \bar{\bar{w}} \in W} |f(\bar{w}) - f(\bar{\bar{w}})|^q \delta_w(\bar{w}) \delta_w(\bar{\bar{w}})}{\sum_{\bar{w}, \bar{\bar{w}} \in W} \delta_w(\bar{w}) \delta_w(\bar{\bar{w}})} \right)^{1/q} \quad (8)$$

Мы пользуемся колмогоровскими средними, позволяющими получить статистически устойчивый разброс [14] (опыт показывает, что q должно быть ≥ 1). .

3. Изрезанность

$$L_f(w|\delta) = \frac{\sum_{\bar{w} \in N_{\bar{w}; \bar{w}, \bar{w} \in W}} |f(\bar{w}) - f(\bar{w})| \delta_w(\bar{w}) \delta_w(\bar{w})}{\sum_{\bar{w} \in N_{\bar{w}; \bar{w}, \bar{w} \in W}} \delta_w(\bar{w}) \delta_w(\bar{w})} \quad (9)$$

где N отношение соседства узлов (определение 1).

4. Градиент

Обозначим через $l_f(w|\delta)(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c$ линейную регрессию для нечетной функции (f, δ_w) . При маленьких шагах h_1 и h_2 для дифференцируемой функции f в непрерывной окрестности узла w такая регрессия близка к касательной $l_f(x_1, x_2) = \frac{df}{dx_1}(w)(x_1 - w_1) + \frac{df}{dx_2}(w)(x_2 - w_2) + f(w)$. Поэтому коэффициенты a и b в общем случае естественно считать «частными производными» $\frac{df}{dx_1}(w)$ и $\frac{df}{dx_2}(w)$, а вектор $\left(\frac{df}{dx_1}(w), \frac{df}{dx_2}(w)\right)$ градиентом $\text{grad } f(w)$ [13].

Динамический показатель

$$G_f(w|\delta) = \|\text{grad } f(w)\|_2 \quad (10)$$

выражает динамические свойства функции f в узле w , а именно: направление и силу ее роста.

5. Локальная линейность

$$R_{f_i}(w|\delta) = \frac{\sum_{w \in W} |f(\bar{w}) - l_f(w|\delta)(\bar{w})| \delta_w(\bar{w})}{\sum_{w \in W} \delta_w(\bar{w})} \quad (11)$$

6. Модуль

Технически важный показатель, не зависящий от локализации

$$M_f(w) = |f(w)| \quad (12)$$

Приведенные динамические показатели связаны с естественными и важными, но достаточно простыми точками зрения эксперта $\mathcal{E}$ на функцию f . Общий случай складывается из простых, причем соединение не может быть прямым, механическим. Дело в том, что изначально динамические показатели D_f для разных D имеют различный масштаб. Для выполнения таких соединений используются так называемые меры максимальности, определение которых будет приведено ниже.

Динамические показатели представляют собой второй параметр исследования.

5. Меры аномальности динамического показателя

Мера динамической активности μD_f является функцией принадлежности на W к нечеткому понятию «активность функции f в узле w с позиции показателя D ». Мера μD_f есть ответ на Вопрос № 1 из введения для показателя D : «значение $\mu D_f(w)$ есть степень выраженности в шкале $[0, 1]$ для функции f в узле w свойства, стоящего за показателем D ». Мера μD_f тесно связана с задачей поиска аномалий и, собственно, возникла благодаря им, поэтому μD_f мы также равнозначно будем называть мерой аномальности динамического показателя.

Мера μD_f получается из показателя D_f с помощью той или иной конструкции меры максимальности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Мера максимальности $\text{mesmax}_B(a)$ – нечеткая структура на $\mathbb{R}^+$, отвечающая для конечного взвешенного неотрицательного множества $B = \{(b_k, \omega_k) |_{k=1}^K, b_k \geq 0, \omega_k > 0\}$ на вопрос:

«В какой степени число $a \in \mathbb{R}^+$ является большим по модулю B ?»:

$$\text{mesmax}_B(a) = \text{mes}(B < a) \in [0, 1]$$

Для меры $\mu D_f(w)$ роль B играет $\text{Im}_w D_f$ – нечеткий образ, центрированный в узле w с помощью меры близости δ_w : $\text{Im}_w D_f = \{(D_f(\bar{w}), \delta_w(\bar{w})), \bar{w} \in W\}$ и

$$\mu D_f(w) = \text{mesmax}_{\text{Im}_w D_f} D_f(w)$$

Имеется несколько принципиально разных конструкций mesmax . Однако в этой статье мы ограничимся конструкцией меры максимальности, основанной на нечетких сравнениях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Нечеткое сравнение $n(b, a)$ неотрицательных чисел $a, b \in \mathbb{R}^+$ измеряет степень превосходства a над b

$$n(a, b) = \text{mes}(b < a) \in [0, 1]$$

Нечеткое сравнение чисел $n(b, a)$ следует понимать как нечеткое бинарное отношение на полуоси $\mathbb{R}^+$, согласованное с ее естественным порядком.

В качестве n может выступать любая функция $\Psi(b, a): \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$, возрастающая по a при фиксированном b , убывающая по b при фиксированном a и имеющая следующие дополнительные граничные условия

$$\begin{aligned} \forall b \lim_{a \rightarrow \infty} \Psi(a, b) &= 1 \\ \forall a \Psi(a, a) &= 0.5 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 3.

$$n(b, a) = \frac{a}{a + b}$$

Нечеткое сравнение $n(b, a)$ можно расширить (неоднозначно) до сравнения числа a с взвешенной числовой совокупностью $B = \{(b_k, \omega_k) |_{k=1}^K\}$. Всякое такое расширение $n(B, a)$ будет мерой максимальности $\text{mesmax}_B a$:

$$n(B, a) = \text{mes}(B < a) = \text{mesmax}_B a$$

Приведем три конструкции расширения $n(b, a) \rightarrow n(B, a)$

ПРИМЕР 4. Мера максимальности «нечеткие сравнения»

1. Бинарная конструкция

$$n_b(B, a) = \frac{\sum_{k=1}^K n(b_k, a) \omega_k}{\sum_{k=1}^K \omega_k}$$

2. Гравитационная конструкция. Обозначим через $\bar{B}$ среднее (центр тяжести) совокупности B :

$$\bar{B} = \frac{\sum_{k=1}^K b_k \omega_k}{\sum_{k=1}^K \omega_k}$$

Тогда

$$n_g(B, a) = n(\bar{B}, a)$$

3. Сигма-конструкция.

Левый момент

$$\sigma^l(B, a) = \left(\sum_{k=1}^K (a - b_k) \omega_k : b_k < a \right)$$

есть довод за максимальность « a » по модулю B . Соответственно, правый момент

$$\sigma^r(B, a) = \left(\sum_{k=1}^K (b_k - a) \omega_k : b_k > a \right)$$

есть довод за минимальность « a » по модулю B . Тогда

$$n_\sigma(B, a) = n(\sigma^r(B, a), \sigma^l(B, a))$$

Возвращаясь к мерам аномальности динамического показателя D , приведем их явное выражение для нечеткого сравнения $n(b, a)$ из примера 3.

ПРИМЕР 5. Меры μD_f на основе сравнения $n(b, a) = \frac{a}{a+b}$

1. Бинарная конструкция

$$\mu D_f(w) = \left(\sum_{\bar{w} \in W} \frac{D_f(w) \delta_w(\bar{w})}{D_f(w) + D_f(\bar{w})} \right) \left(\sum_{\bar{w} \in W} \delta_w(\bar{w}) \right)^{-1}$$

2. Гравитационная конструкция

$$\mu D_f(f) = \frac{D_f(w)}{D_f(w) + \overline{D_f(w)}}$$

где

$$\overline{D_f(w)} = \frac{\sum_{\bar{w} \in W} D_f(\bar{w}) \delta_w(\bar{w})}{\sum_{\bar{w} \in W} \delta_w(\bar{w})}$$

3. Сигма-конструкция

$$\mu D_f(w) = \frac{\sigma^l(\text{Im}_w D_f, D_f(w))}{\sigma^l(\text{Im}_w D_f, D_f(w)) + \sigma^r(\text{Im}_w D_f, D_f(w))}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma^l(\text{Im}_w D_f, D_f(w)) &= \sum_{\bar{w} \in W} (D_f(w) - D_f(\bar{w})) \delta_w(\bar{w}) : D_f(\bar{w}) < D_f(w) \\ \sigma^r(\text{Im}_w D_f, D_f(w)) &= \sum_{\bar{w} \in W} (D_f(\bar{w}) - D_f(w)) \delta_w(\bar{w}) : D_f(\bar{w}) > D_f(w) \end{aligned}$$

Меры максимальности являются третьим параметром исследования и, соединяясь с первыми двумя (мерами близости и динамическими показателями) дают меры аномальности, отвечающие на первый вопрос исследования в узком смысле только для динамического показателя. Общий ответ будет получен с привлечением нечеткой математики ниже.

6. Итоговая мера аномальности

Переход $D_f \rightarrow \mu D_f$ переводит анализ функции f на язык нечеткой логики и нечеткой математики: меры аномальности μD_f для разных показателей D принимают значения в единой шкале отрезка $[0, 1]$ и могут сочетаться в любых составах и любых количествах с помощью многочисленных операций нечеткой логики и всякого рода усреднений, которые мы обозначим через $*$. Становится возможным придать смысл сложной активности функции f по совокупности динамических показателей $\mathcal{D}$ в узле $w \in W$:

$$\mu \mathcal{D}_f(w) = *_{D \in \mathcal{D}}(\mu D_f(w))$$

Именно такой конструкцией в общем случае моделируется взгляд эксперта $\mathcal{E}$ на функцию f . Во многом такое моделирование является искусством и состоит в подборе базовых динамических показателей $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ и правильном их соединении $*(\mathcal{E})$:

$$\mu \mathcal{E}_f(w) = *(\mathcal{E})_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})}(\mu D_f(w))$$

ПРИМЕР 6.

1. Соединения $*$ с помощью нечеткой конъюнкции $\top$ дают возможность одновременно учесть все базовые динамики из $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ [14, 15]:

$$\mu \mathcal{E}_f(w) = \top_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})}(\mu D_f(w))$$

2. Соединения $*$ с помощью нечеткой дизъюнкции $\perp$ дают возможность проявить себя каждой базовой динамике из $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ [14, 15]:

$$\mu \mathcal{E}_f(w) = \perp_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})}(\mu D_f(w))$$

3. Соединение $*$ с помощью усреднения дает возможность учесть веса $\omega(D)$ базовых динамик из $\mathcal{D}(\mathcal{E})$, с которыми эксперт $\mathcal{E}$ к ним относится:

$$\mu \mathcal{E}_f(w) = \frac{\sum_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})} \omega(D) \mu D_f(w)}{\sum_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})} \omega(D)}$$

Итоговая мера аномальности $\mu \mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ для системы функций $\mathcal{F}$ получается соединением мер аномальности $\mu \mathcal{E}_f$ по всем $f \in \mathcal{F}$:

$$\mu \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(w) = *(\mathcal{E})_{f \in \mathcal{F}}$$

Значение $\mu \mathcal{E}_f(w)$ – степень интереса к узлу w эксперта $\mathcal{E}$ (степень $\mathcal{E}$ – аномальности w) и полный ответ на первый вопрос, поставленный во введении. Мера $\mu \mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ дает нам ключ к точечным $\mathcal{E}$ -аномалиям. Мы считаем $\mathcal{E}$ -аномальными для $\mathcal{F}$ узлы $w \in W$, в которых $\mu \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(w) \geq 0.75$. Это достаточно естественно, т.к. если некоторое свойство выражено в шкале $[0, 1]$, то его проявления, попадающие в отрезок $[0.75, 1]$, выглядят аномальными.

Соединения $*(\mathcal{E})$, преобразующие меры аномальности μD_f для отдельных динамических показателей D и отдельных функций f в итоговую меру аномальности $\mu \mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ системы $\mathcal{F}$ – четвертый параметр исследования.

В силу произвольности системы функций $\mathcal{F}$ $\mathcal{E}$ -аномальные узлы для нее могут представлять собой подмножество в W , нуждающееся в дополнительной работе (предварительной «топологической» фильтрации и последующей кластеризации). Несомненный интерес в W представляют подмножества, являющиеся основаниями возвышенностей меры $\mu \mathcal{E}_{\mathcal{F}}$. В этом нам поможет DPS.

7. Функциональный алгоритм DPS и $\mathcal{E}$ -аномалии для системы $\mathcal{F}$

Пусть $A, B \subset W$ и $w \in W$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Плотность $P(A, w)$ на множестве W – это отображение произведения $2^W \times W$ в отрезок $[0, 1]$, возрастающее по первому аргументу:

$$\forall w, A \subset B \Rightarrow P(A, w) \leq P(B, w)$$

Значение $P(A, w)$ называется плотностью подмножества A в w и в дальнейшем будет обозначаться через $P_A(w)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Подмножество A называется α -совершенным в W для $\alpha \in [0, 1]$, если

$$A = \{w \in W : P_A(w) \geq \alpha\}$$

Процесс построения в W максимального α -совершенного подмножества $W(\alpha)$ осуществляется обычным алгоритмом DPS (Discrete Perfect Sets) [11, 12]:

$$W(\alpha) = \text{DPS}(W|P, \alpha)$$

Подмножество $W(\alpha)$ получается в результате пересечения

$$W(\alpha) = \bigcap_{k=1}^{\infty} W^k(\alpha)$$

где

$$W^{k+1}(\alpha) = \{w \in W^k(\alpha) : P_{W^k(\alpha)}(w) \geq \alpha\}$$

Пересечение $\bigcap_{k=1}^{\infty}$ обязательно достигается, потому что всегда является конечным в силу конечности W и вложенности $W^{k+1}(\alpha)$ в $W^k(\alpha)$ при всех $k = 0, 1, \dots$

Функциональный DPS связан со специальной плотностью $P = P(\Psi, r)$, в основе которой лежит функция $\Psi: W \rightarrow [0, 1]$ и локализация радиуса r :

$$P_A(w) = \frac{\sum \Psi(\bar{w}) : \bar{w} \in D_A(w, r)}{|D_A(w, r)|}$$

где $D_A(w, r)$ замкнутый шар в A с центром в w радиуса r :

$$D_A(w, r) = \{\bar{w} \in A : \|\bar{w} - w\| \leq r\}$$

Результат $W(\alpha)$ работы такого алгоритма DPS представляет собой максимальное подмножество в W , на котором функция Ψ r -локально в среднем $\geq \alpha$.

Если $W(\alpha)/N = \left\{ W_i(\alpha) \right\}_{i=1}^{I(\alpha)}$, $W(\alpha) = \bigcup_{i=1}^{I(\alpha)} W_i(\alpha)$ разбиение $W(\alpha)$ на компоненты связности по отношению соседства узлов N , введенному в начале, то при условии нетривиальности $W(\alpha)$ при $\alpha \in [0.75, 1]$ фрагменты $W_i(\alpha)$ будут интересны как связные подмножества в W , на которых функция Ψ аномальна.

Беря в качестве Ψ меру аномальности $\mu_{\mathcal{EF}}$, мы получаем ответ на второй вопрос введения статьи об $\mathcal{E}$ -аномалиях для $\mathcal{F}$ в W . Радиус локализации r в функциональном DPS – пятый и последний параметр исследования.

Заметим, что этап кластеризации, в отличие от всех остальных этапов, не всегда обязателен в исследовании: если мера аномальности $\mu_{\mathcal{EF}}$ устроена хорошо и эксперту $\mathcal{E}$ несложно принять решение об аномальных областях в W непосредственно по ней, то DPS не нужен. Именно с такой ситуацией мы столкнемся в приведенных ниже примерах.

8. Примеры

Покажем как все работает на примере двух рельефов (неотрицательных функций) f_1 и f_2 , заданных на квадрате $W = \{(i, j) : 0 \leq i, j \leq 200\}$ (рис. 4). Функция f_1 имеет две возвышенности в окрестностях узлов $w_1 = (40, 40)$ и $w_2 = (40, 160)$ и плоский участок в окрестности узла $w_3 = (140, 150)$. Вторая функция f_2 имеет возвышенность в окрестности узла w_1 и плоские участки в окрестностях узлов w_2 и w_3 .

Рис. 4: Функции f_1 и f_2

Предположим, что эксперт $\mathcal{E}$ имеет две точки зрения на функции f_1 и f_2 : локальный разброс (8) и локальная линейность (11), но в разных сочетаниях.

Таким образом,

$$\mathcal{F} = \{f_i|_1^2\}, f_i : W \longrightarrow \mathbb{R}^+; D_{f_1}, D_{f_2} \in \{Q(w|\delta, q), R(w|\delta)\}.$$

Мера близости δ предполагается локальной (4) с $r = 2$ и $p = 1$, показатель q (8) равным единице.

ПРИМЕР 7. $D_{f_1} = Q_{f_1}(w|\delta, 1)$, $D_{f_2} = Q_{f_2}(w|\delta, 1)$

Эксперта интересует участок $\bar{W}$ из W , на котором обе функции имеют аномально большой разброс. Программа исследования в этом случае последовательно представлена на рис. 5:

- Динамические показатели: Q_{f_1} (рис. 5а) и Q_{f_2} (рис. 5б);
- Меры аномальности: μQ_{f_1} (рис. 5в) и μQ_{f_2} (рис. 5г);
- Итоговая мера аномальности: $\mu \mathcal{F} = \min(\mu Q_{f_1}, \mu Q_{f_2})$ (рис. 5д);
- $\bar{W}$ – окрестность узла w_2 .

ПРИМЕР 8. $D_{f_1} = R_{f_1}(w|\delta)$, $D_{f_2} = R_{f_2}(w|\delta)$

Эксперта интересует участок $\bar{W}$ из W , на котором обе функции максимально линейны. Программа исследования в этом случае последовательно представлена на рис. 6:

- Динамические показатели: R_{f_1} (рис. 6а) и R_{f_2} (рис. 6б);
- Меры аномальности будут нечеткими отрицаниями $\neg \mu R_{f_1} = 1 - \mu R_{f_1}$ (рис. 6в) и $\neg \mu R_{f_2} = 1 - \mu R_{f_2}$ (рис. 6г), поскольку в данном случае нас интересуют малые значения локальной линейности;

Рис. 5: Исследование системы $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$ с $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \{Q_{f_1}(w|\delta, 1), Q_{f_2}(w|\delta, 1)\}$

- Итоговая мера аномальности: $\mu\mathcal{E}_{\mathcal{F}} = \min(\neg\mu R_{f_1}, \neg\mu R_{f_2})$ (рис. 6д);

- $\overline{W}$ – окрестность узла w_3 .

ПРИМЕР 9. $D_{f_1} = Q_{f_1}(w|\delta, 1)$, $D_{f_2} = R_{f_2}(w|\delta)$

Эксперта интересует участок $\overline{W}$ из W , на котором функция f_1 имеет аномально большой разброс, а функция f_2 – максимально линейна. Программа исследования в этом случае последовательно представлена на рис. 7:

- Динамические показатели: Q_{f_1} (рис. 7а) и R_{f_2} (рис. 7б);
- Меры аномальности: μQ_{f_1} (рис. 5в) и $\neg\mu R_{f_2} = 1 - \mu R_{f_2}$ (рис. 7г);
- Итоговая мера аномальности: $\mu\mathcal{E}_{\mathcal{F}} = \min(\mu Q_{f_1}, \neg\mu R_{f_2})$ (рис. 7д);
- $\overline{W}$ – окрестность узла w_1 .

Рис. 6: Исследование системы $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$ с $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \{R_{f_1}(w|\delta), R_{f_2}(w|\delta)\}$

9. Заключение

Подведем итог изложенному выше в виде схемы на рис. 8 и сделаем несколько заключительных замечаний

Одномерная версия схемы: W – дискретное время, $\mathcal{F}$ – временной ряд f на W , один динамический показатель – это современная версия логики интерпретатора, позволяющая с позиций НМ и НЛ подойти к фундаментальной задаче об аномалиях на временных рядах [16, 17, 18, 19, 20, 21].

Динамические показатели могут быть двух типов. Первый тип имеет дело с функцией непосредственно, и именно такие показатели приведены выше (7-11). Второй тип имеет дело с функцией опосредованно через какое-либо преобразование, например, через преобразование Фурье или вейвлет-преобразование [22], и может быть количественной характеристикой соответствующего спектра.

Рис. 7: Исследование системы $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$ с $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \{Q_{f_1}(w|\delta, 1), R_{f_2}(w|\delta)\}$

Схема показывает, что преобразование $\mathcal{F} \rightarrow \mu\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ переводит векторный анализ относительно системы функций $\mathcal{F}$ в скалярный анализ относительно итоговой меры аномальности $\mu\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$.

Все это до известной степени напоминает ситуацию в теории принятия решений, когда многокритериальная задача выбора сводится к скалярному выбору относительно, так называемой, функции полезности [23].

На заключительной стадии исследования возникает задача выделения возвышенностей по мере $\mu\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$. Алгоритм DPS дает оригинальное решение этой фундаментальной в анализе данных задачи (см., например, выделение ярких фрагментов на изображениях в Image Processing [24]).

Работа выполнена в рамках проекта Российского научного фонда № 18-17-00241 “Исследование устойчивости породных массивов на основе системного анализа геодинамических процессов для геоэкологически безопасной подземной изоляции радиоактивных отходов”.

Рис. 8: Схема исследования

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gvishiani A. D., Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R., Tikhotsky S. A., Hinderer J., Bonnin J., Diamant M. Algorithm FLARS and recognition of time series anomalies // System Research & Information Technologies. 2004. № 3. P. 7–16.
2. Гвишиани А.Д., Диамант М., Михайлов В.О., Гальдеано А., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р., Граева Е.М. Алгоритмы искусственного интеллекта для кластеризации магнитных аномалий // Физика Земли. 2002. № 7. С. 13–28.
3. Mikhailov V., Galdeano A., Diamant M., Gvishiani A., Agayan S., Bogoutdinov Sh., Graeva E., Sailhac P. Application of artificial intelligence for Euler solutions clustering // Geophysics. 2003. Vol. 68, № 1. P. 168–180.
4. Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р. Определение аномалий на временных рядах методами нечеткого распознавания // Доклады Академии наук. 2008. Т.421, № 1. С. 101–105.
5. Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р., Злотники Ж., Боннин Ж. Математические методы геоинформатики. III. Нечеткие сравнения и распознавание аномалий на временных рядах // Кибернетика и системный анализ. 2008. Т.44, № 3. С. 3–18.
6. Agayan S., Bogoutdinov Sh., Soloviev A., Sidorov R. The Study of Time Series Using the DMA Methods and Geophysical Applications // Data Science Journal. 2016. P. 1–21, DOI: <http://dx.doi.org/10.5334/dsj-2016-014>
7. Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Добровольский М.Н., Дзобоев Б.А. Объективная классификация эпицентров и распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений в Калифорнии // Геоинформатика. 2013. № 2. С. 44–57.
8. Гвишиани А.Д., Дзобоев Б.А., Агаян С.М. О новом подходе к распознаванию мест возможного возникновения сильных землетрясений на Кавказе // Физика Земли. 2013. № 6. С. 3–19. DOI: 10.7868/S0002333713060045

9. Гвишиани А. Д., Агаян С. М., Дзебоев Б. А., Белов И. О. О Распознавание мест возможного возникновения эпицентров сильных землетрясений с одним классом обучения // Доклады академии наук. 2017. Т. 474, № 1. С. 86–92. DOI: 10.7867/S0869565217130175
10. Камнев Е. Н., Морозов В. Н., Шишиц И. Ю. Выбор площадок для захоронения радиоактивных отходов в геологических формациях // М.: Изд-во «Горная книга». 2012. 207 с.
11. Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Добровольский М. Н. Об одном алгоритме поиска плотных областей и его геофизических приложениях // Доклады 15-й Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов. ММРО-15». 2011. С. 543–546.
12. Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Добровольский М. Н. Дискретные совершенные множества и их применение в кластерном анализе // Кибернетика и системный анализ. 2014. № 2. С. 17–32.
13. Агаян С. М., Соловьев А. А., Богоутдинов Ш. Р., Николова Ю. И. Регрессионные производные и их применение в изучении геомагнитных джерков // Геомагнетизм и аэрономия. 2019. В печати.
14. Аверкин А. Н., Батыршин И. З., Блишун А. Ф., Силов В. Б., Тарасов В. Б. (Под редакцией Д. А. Пospelова). Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта // М.: Наука, 1986. 312 с.
15. Соловьев А. А. Методы геоинформатики и нечеткой математики в анализе геофизических данных // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4. С. 194–214. DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-4-194-214
16. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники // М.: Радио и связь, 1989. 656 с.
17. Кедров О. К., Пермьякова В. Е., Поликарпова Л. А., Стеблов Г. М. Методы обнаружения слабых сейсмических явлений в пределах платформ // М.: ОИФЗ РАН, 2000. 101 с.
18. Кушнир А. Ф., Мостовой С. В. Статистический анализ геофизических полей // Киев: Наукова думка, 1990. 276 с.
19. Haries H. P., Joswig M. Signal detection by pattern recognition methods, in A Twenty-Five Years Review of Basic Research (edited by A. U. Kerr and D. L. Carlson) // Publisher USA. 1985. P. 579–584.
20. Romeo G. Seismic signals detection and classification using artificial neural networks // Annali di geofisica. 1994. Vol. XXXVII, № 3. P. 343–353.
21. Boschetti F., Dentith M., List R. A fractal based algorithm for detecting first arrivals on seismic traces // Geophysics. 1996. Vol. 61, № 4, P. 10951102. DOI: doi.org/10.1190/1.1444030
22. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов // М.: Мир, 2005. 671 с.
23. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений // М.: Наука, 1978. 352 с.
24. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений // М.: Техносфера, 2005. 1072 с.

REFERENCES

1. Gvishiani, A. D., Agayan, S. M., Bogoutdinov, Sh. R., Tikhotsky, S. A., Hinderer, J., Bonnin, J., Diamant, M. 2004, "Algorithm FLARS and recognition of time series anomalies", *System Research & Information Technologies*, no. 3, pp. 7–16.
2. Гвишиани, А. Д., Диамант, М., Михайлов, В. О., Гальдеано, А., Агаян, С. М., Богоутдинов, Ш. Р., Граева, Е. М. 2002, "Алгоритмы искусственного интеллекта для кластеризации магнитных аномалий", *Физика Земли*, № 7, С. 13–28.
3. Mikhailov, V., Galdeano, A., Diamant, M., Gvishiani, A., Agayan, S., Bogoutdinov, Sh., Graeva, E., Sailhas, P. 2003, "Application of artificial intelligence for Euler solutions clustering", *Geophysics*, Vol. 68, № 1, P. 168–180.
4. Гвишиани, А. Д., Агаян, С. М., Богоутдинов, Ш. Р. 2008, "Определение аномалий на временных рядах методами нечеткого распознавания", *Доклады Академии наук*, Т. 421, № 1, С. 101–105.
5. Гвишиани, А. Д., Агаян, С. М., Богоутдинов, Ш. Р., Злотники, Ж., Боннин, Ж. 2008, "Математические методы геоинформатики. III. Нечеткие сравнения и распознавание аномалий на временных рядах", *Кибернетика и системный анализ*, Т. 44, № 3, С. 3–18.
6. Agayan, S., Bogoutdinov, Sh., Soloviev, A., Sidorov, R. 2016, "The Study of Time Series Using the DMA Methods and Geophysical Applications", *Data Science Journal*, P. 1–21, DOI: <http://dx.doi.org/10.5334/dsj-2016-014>
7. Гвишиани, А. Д., Агаян, С. М., Добровольский, М. Н., Дзобоев, Б. А. 2013, "Объективная классификация эпицентров и распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений в Калифорнии", *Геоинформатика*, № 2, С. 44–57.
8. Гвишиани, А. Д., Дзобоев, Б. А., Агаян, С. М. 2013, "О новом подходе к распознаванию мест возможного возникновения сильных землетрясений на Кавказе", *Физика Земли*, № 6, С. 3–19, DOI: 10.7868/S0002333713060045
9. Гвишиани, А. Д., Агаян, С. М., Дзобоев, Б. А., Белов, И. О. 2017, "О Распознавание мест возможного возникновения эпицентров сильных землетрясений с одним классом обучения", *Доклады академии наук*, Т. 474, № 1, С. 86–92, DOI: 10.7867/S0869565217130175
10. Камнев, Е. Н., Морозов, В. Н., Шишиц, И. Ю. 2012, "Выбор площадок для захоронения радиоактивных отходов в геологических формациях", *М.: Изд-во «Горная книга»*, 207 с.
11. Агаян, С. М., Богоутдинов, Ш. Р., Добровольский, М. Н. 2011, "Об одном алгоритме поиска плотных областей и его геофизических приложениях", *Доклады 15-й Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов. ММРО-15»*, С. 543–546.
12. Агаян, С. М., Богоутдинов, Ш. Р., Добровольский, М. Н. 2014, "Дискретные совершенные множества и их применение в кластерном анализе", *Кибернетика и системный анализ*, № 2, С. 17–32.
13. Агаян, С. М., Соловьев, А. А., Богоутдинов, Ш. Р., Николова, Ю. И. 2019, "Регрессионные производные и их применение в изучении геомагнитных джерков", *Геомагнетизм и аэрономия*, В печати.

14. Аверкин, А. Н., Батыршин, И. З., Блишун, А. Ф., Силов, В. Б., Тарасов, В. Б. (Под редакцией Д. А. Поспелова). 1986, “Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта“, *М.: Наука*, 312 с.
15. Соловьев, А. А. 2018, “Методы геоинформатики и нечеткой математики в анализе геофизических данных“, *Чебышевский сборник*, Т. 19, вып. 4, С. 194–214, DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-4-194-214
16. Левин, Б. Р. 1989, “Теоретические основы статистической радиотехники“, *М.: Радио и связь*, 656 с.
17. Кедров, О. К., Пермьякова, В. Е., Поликарпова, Л. А., Стеблов, Г. М. 2000, “Методы обнаружения слабых сейсмических явлений в пределах платформ“, *М.: ОИФЗ РАН*, 101 с.
18. Кушнир, А. Ф., Мостовой, С. В. 1990, “Статистический анализ геофизических полей“, *Киев: Наукова думка*, 276 с.
19. Haries, H. P., Joswig, M. 1985, “Signal detection by pattern recognition methods, in A Twenty-Five Years Review of Basic Research (edited by A. U. Kerr and D. L. Carlson)“, *Publisher USA*, P. 579–584.
20. Romeo, G. 1994, “Seismic signals detection and classification using artificial neural networks“, *Annali di geofisica*, Vol. XXXVII, № 3, P. 343–353.
21. Boschetti, F., Dentith, M., List, R. 1996, “A fractal based algorithm for detecting first arrivals on seismic traces“, *Geophysics*, Vol. 61, № 4, P. 1095–1102, DOI: doi.org/10.1190/1.1444030
22. Малла, С. 2005, “Вейвлеты в обработке сигналов“, *М.: Мир*, 671 с.
23. Фишберн, П. 1978, “Теория полезности для принятия решений“, *М.: Наука*, 352 с.
24. Гонсалес, Р., Вудс, Р. 2005, “Цифровая обработка изображений“, *М.: Техносфера*, 1072 с.

Получено 02.02.2019

Принято к печати 10.04.2019