ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-66-81

Оценка константы наилучших совместных диофантовых приближений для $n = 5$ и $n = 6$ [1]

Ю. А. Басалов

Басалов Юрий Александрович — аспирант кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственного педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена вопросам оценки снизу константы наилучших диофантовых приближений для n действительных чисел. Эта проблема является частным случаем более общей проблемы приближения n действительных линейных форм и имеет свою богатую историю, восходящую к П. Г. Дирихле. Значительный вклад на раннем этапе исследований внесли А. Гурвиц с помощью аппарата цепных дробей и Ф. Фуртвенглером, используя аппарат линейной алгебры.

В середине двадцатого века Г. Дэвенпортом была найдена фундаментальная связь значения константы наилучших совместных диофантовых приближений и критического определителя звездного тела специального вида. Позднее, Дж. В. С. Касселс перешел от непосредственного вычисления критического определителя к оценке его значения с помощью вычисления наибольшего значения $V_{n,s}$ – объема параллелепипеда с центром в начале координат обладающего определенными свойствами. Этот подход позволил получить оценки снизу константы наилучших совместных диофантовых приближений для $n = 2, 3, 4$ (см. работы Дж. В. С. Касселса, Т. Кьюзика, С. Красса).

В данной работе, основываясь на описанном выше подходе, получены оценки для $n = 5$ и $n = 6$. Идея построения оценок отличается от работы Т. Кьюзика. С помощью численных экспериментов были получены вначале примерные, а затем и точные значения оценок $V_{n,s}$. Доказательство этих оценок достаточно громоздко и представляет в первую очередь техническую сложность. Другим отличием построенных оценок является возможность обобщения их на любую размерность.

В процессе численных экспериментов была также получена интересная информация о структуре значений $V_{n,s}$. Эти результаты достаточно хорошо согласуется с результатами полученными в работах С. Красса. Вопрос о структуре значений $V_{n,s}$ для больших размерностей мало исследован и может представлять значительный интерес как с точки геометрии чисел, так и с точки теории диофантовых приближений.

Ключевые слова: наилучшие совместные диофантовы приближения, геометрия чисел, звездные тела, критические определители.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

Ю. А. Басалов. Оценка константы наилучших диофантовых приближений для n=5 и n=6 // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 66–81.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-66-81

Estimation of the constant of the best simultaneous diophanite approximations for $n = 5$ and $n = 6$[2]

Yu. A. Basalov

Basalov Yurij Aleksandrovich — Postgraduate Student, Department of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Pedagogical University of Leo Tolstoy, Tula.
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Abstract

This paper is devoted to the problem of estimating from below the constant of the best Diophantine approximations for n real numbers. This problem is a special case of the more general problem of approximating n real linear forms and has its rich history, ascending to P. G. Dirichlet. A significant contribution at an early stage of research was made by A. Hurwitz using the apparatus of continued fractions and F. Furtwängler, using the apparatus of linear algebra.

In the mid-twentieth century, H. Davenport found a fundamental connection between the value of the constant constant of the best Diophantine approximations and critical determinant of a special type of star body. Later J. W. S. Cassels switched from directly calculating the critical determinant to estimating its value by calculating the largest value of $V_{n,s}$ – the volume of a parallelepiped centered at the origin of coordinates with certain properties. This approach allowed us to obtain estimates from below of the constant of the best joint Diophantine approximations for $n = 2, 3, 4$ (see the works of J. W. S. Cassels, T. Cusick, S. Krass).

In this paper, based on the approach described above, estimates for $n = 5$ and $n = 6$ are obtained. The idea of building estimates is different from the work of T. Cusick. Using numerical experiments we approximate and then obtaine exact values of the estimates of $V_{n,s}$. The proof of these estimates is rather cumbersome and is primarily a technical difficulty. Another different of the given estimates is the ability to generalize them to any dimension.

In the process of numerical experiments was also obtained interesting information about the structure of the $V_{n,s}$ values. These results agree quite well with the results obtained in the works of S. Krass. The question of the structure of the values of $V_{n,s}$ for large dimensions has been scantily explored and can be of considerable interest both from the point of the geometry of numbers and from the point of the theory of Diophantine approximations.

Keywords: best joint Diophantine approximations, geometry of numbers, star bodies, critical determinants.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

Yu. A. Basalov, 2019, "Estimation of the constant of the best simultaneous Diophanite approximations for n=5 and n=6" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 66–81.

[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

1. Введение

Проблема оценки константы наилучших диофантовых приближений имеет интересную историю. Важной особенностью этой проблемы является разнообразие методов с помошью которых были получены результаты по этой проблеме. А. Гурвиц использовал аппарат цепных дробей [8], Ф. Фуртвенглером – аппарат линейной алгебры [6, 7], Г. Дэвенпортом, Дж. В. С. Касселсом использовали подходы геометрии чисел [2, 4].

В данной статье, мы разовьем подходы Г. Дэвенпорта, Дж. В. С. Касселса и Т. Кьюзика [2, 3, 4] к оценке константы наилучших диофантовых приближений C_n и получим оценку снизу для размерностей $n = 5$ и $n = 6$.

Отметим, что задача приближения n действительных чисел является частным случаем задачи приближения n действительных линейных форм

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha_1} \\ \vec{\alpha_2} \\ .\,. \\ \vec{\alpha_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

и тесно связано с приближение одной линейной формы с помощью принципа переноса Хинчина [19].

Сформулируем задачу наилучших совместных диофантовых приближений n действительных чисел. Пусть

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n)$$

— произвольный вектор действительных чисел. Нас будут интересовать приближения $\vec{\alpha}$ рациональными дробями

$$\frac{\vec{p}}{q} = \left(\frac{p_1}{q},\ \frac{p_2}{q},\ \dots,\ \frac{p_n}{q}\right).$$

Определение 1. *Мерой качества совместных приближений первого рода вектора $\vec{\alpha}$ рациональным вектором $\vec{p}/q$ называется величина*

$$D(\vec{\alpha}, \vec{p}/q) = \max_{i=\overline{1,n}} q\,|q\alpha_i - p_i|^n .$$

Определение 2. *Константой наилучших диофантовых приближений $C(\vec{x})$ для вектора $\vec{x}$ называется точная нижняя грань величины C, для которой существует бесконечное число рациональных векторов $\vec{p}/q$, удовлетворяющих неравенству*

$$D(\vec{x}, \vec{p}/q) < C.$$

Определение 3. *Константой наилучших диофантовых приближений C_n называется точная верхняя грань числа $C(\vec{x})$ по всем векторам $\vec{x}$ размерности n:*

$$C_n = \sup_{\vec{x}\in\mathbb{R}^s} C(\vec{x}).$$

В 1891 году А. Гурвиц [8, 19] показал, что

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}. \tag{1}$$

Напомним некоторые понятия из геометрии чисел [17].

Определение 4. *Пусть* $a_1, \ldots, a_n$ *– линейно независимые точки вещественного евклидова пространства. Множество всех точек*

$$x = u_1a_1 + \ldots + u_na_n$$

с целыми коэффициентами $u_1, \ldots, u_n$ *называется решеткой* Λ*. Величина*

$$d(\Lambda) = |\det(a_1, \ldots, a_n)|$$

называется определителем решетки Λ*.*

Определение 5. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– точечное тело. Если решетка* Λ *не имеет в* $\mathbb{F}$ *отличных от* $\mathbb{O}$ *точек* ($\mathbb{O} \in \mathbb{F}$)*, то* Λ *допустима для* $\mathbb{F}$ *или* $\mathbb{F}$*-допустима. Точную нижнюю грань*

$$\Delta(\mathbb{F}) = \inf d(\Lambda)$$

определителей $d(\Lambda)$ *всех* $\mathbb{F}$*-допустимых решеток* Λ *называют критическим определителем множества* $\mathbb{F}$*. Если* $\mathbb{F}$*-допустимых решеток нет, то* $\mathbb{F}$ *является множеством бесконечного типа и* $\Delta(\mathbb{F}) = \infty$*.*

Определение 6. *Под звездным телом понимают множество, обладающее следующими свойствами*

- *существует точка, называемая "началом", которая является внутренней точкой множества;*
- *любой луч, выходящий из "начала", либо не пересекается с границей множества, либо имеет с ней только одну общую точку.*

Г. Дэвенпортом [4] был получен следующий фундаментальный результат.

Пусть $\mathbb{F}_n$ – это $(n+1)$-мерное звездное тело

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^n < 1,$$

а $\Delta\mathbb{F}$ – его критический определитель. Тогда

Теорема 1.

$$C_n = \frac{1}{\Delta\mathbb{F}_n}. \tag{2}$$

Доказательство. См. [17]. □

Дж. В. С. Касселс [2, 3] получил следующую оценку для $\Delta\mathbb{F}$.

Теорема 2. *Пусть*

$$f_{n,s} = \frac{1}{2^s} \prod_{i=1}^{s} |x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^{n} |x_i|. \tag{3}$$

и $2^n V_{n,s}$ *объем наибольшего параллелепипеда с центром в начале координат, содержащегося внутри фигуры*

$$f_{n,s} \leq 1. \tag{4}$$

Пусть $\Delta_{n,s}$ *наименьшее абсолютное значение дискриминанта действительного поля степени* $n+1$*, которое имеет* s *пар комплексно-сопряженных алгебраических чисел (то есть* $2s \leq n+1$*). Тогда*

$$\Delta\mathbb{F}_n \leq \sqrt{\Delta_{n,s}}/V_{n,s}, \tag{5}$$

или же

$$C_n \geq V_{n,s}/\sqrt{\Delta_{n,s}}. \tag{6}$$

Доказательство. См. [3]. □

Значения $\Delta_{n,s}$ известны для обширного числа n (см. [20]). Таким образом, задача оценки константы наилучших диофантовых приближений снизу сводится к оценке снизу $V_{n,s}$. Ранее были получены следующие оценки

$$\begin{array}{cc} V_{2,0} = 2, V_{2,1} = 1 & \text{(Дж. В.С. Касселс) [2]} \\ V_{3,1} = 2,\ V_{3,0} = \frac{3^{3/2}}{2} & \text{(Т. Кьюзик) [3]} \\ V_{4,2} \geq \frac{16}{9},\ V_{4,1} \geq 2,\ V_{4,0} \geq 4 & \text{(С. Красс) [9, 10]} \\ V_{5,2} \geq 2.3932\ldots & \text{(С. Красс) [10]} \end{array} \tag{7}$$

Из этих значений можно получить следующие оценки константы наилучших совместных диофантовых приближений

$$C_2 \geq \frac{2}{7}, \qquad C_3 \geq \frac{2}{\sqrt{275}}, \qquad C_4 \geq \frac{16}{9\sqrt{1609}}. \tag{8}$$

Более подробно с известными результатами по проблеме оценки константы наилучших совместных диофантовых приближений можно ознакомиться в работе [16]. В частности стоит отметить существенные успехи В. Г. Новака в вопросах оценки C_n сверху [12, 13, 14, 15]. Например, им была получена оценка $C_2 \leq \left(\frac{8}{13}\right)^2$.

Заметим, что две последние оценки (8) получаются из (6) при подстановке $s = [n/2]$. Поэтому мы сосредоточимся на оценке $V_{n,[n/2]}$. В частности, далее мы получим оценки для $V_{5,2}$ и $V_{6,3}$.

2. Идея получения оценок $V_{n,s}$

Рассмотрим матрицу n-ого порядка

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Пусть $\mathbb{E}$ n-мерный единичный куб, состоящий из точек

$$\vec{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n), \qquad 0 \leq e_i \leq 1, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Матрица A преобразует его в n-мерный параллелепипед

$$\mathbb{A} : \vec{a} = A \cdot \vec{e} \tag{10}$$

Заметим, что таким образом каждому n-мерному параллелепипеду соответствует матрица A. Объем этого параллелепипеда равен $2^n \det A$.

Пусть $\mathbb{F}_{n,s}$ – это n-мерное звездное тело

$$\mathbb{F}_{n,s} : f_{n,s} \leq 1,$$

где $f_{n,s}$ это (3).

Нас будет интересовать, находится ли некоторый параллелепипед $\mathbb{A}$ внутри звездчатого тела $\mathbb{F}_{n,s}$. Можно предложить следующий метод проверки этого утверждения. Составим оптимизационную задачу

$$\begin{gathered} f_{n,s} \to \max, \\ |b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n| \le 1, \\ |b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n| \le 1, \\ \ldots \\ |b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n| \le 1. \end{gathered} \tag{11}$$

Если решение задачи ≤ 1, то параллелепипед $\mathbb{A}$ лежит полностью внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$, в противном случае, часть его находится вне звездного тела.

Таким образом, если параллелепипед $\mathbb{A}$ лежит внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$, имеет место оценка

$$V_{n,s} \ge \det A. \tag{12}$$

В дальнейшем нашей целью будет построение матрицы A такого вида, чтобы задача (11) имела решение $\max f_{n,s} \le 1$. Параллелепипеды $\mathbb{A}$ для которых $\det A$ "велико" будем называть *наибольшими*. Соответствующую наибольшему параллелепипеду матрицу мы также будем называть *наибольшей*.

3. Численные эксперименты

На первом этапе исследования было решено провести вычислительные эксперименты по численному нахождению наибольших значений $V_{n,s}$. В процессе экспримента производился направленный перебор матриц A (9) с целью найти матрицу с наибольшим $\det A$, удовлетворяющую условию (11). С деталями численных экспериментов можно ознакомиться в работе [1].

В результате экспериментов проводимых для размерностей 3 и 4 выяснилось, что существует множество наибольших матриц (а соотвественного и параллелепипедов) с одинаковыми $\det A$. Поэтому было произведенно исследование с целью получить наибольшую матрицу A с наиболее простой структурой. Оказалось, что можно найти наибольшую матрицу A следующего вида (примеры таких матриц см. в [1])

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k & a_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_k & a_k \end{pmatrix}.$$

Стоит отметить следующие моменты.

Во-первых, исходя из вида матрицы A, можно описать структуру параллелепипеда $V_{n,s}$ – все его грани прямоугольники (причем часть из них – квадраты), ребра либо параллельны осям координат, либо образуют с ними угол 45°.

Во-вторых, уже для $n = 7$ наибольшая матрица A_7^* может быть получена как комбинация наибольших матриц A_3^* и A_4^* (точные их значения см. ниже)

$$A_3^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ 0 & -\alpha_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

$$A_4^* = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\alpha_2 & \sqrt{2}\alpha_2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\alpha_2 & \sqrt{2}\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

$$A_7^* = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\alpha_3 & \sqrt{2}\alpha_3 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\alpha_3 & \sqrt{2}\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_3 \\ -\alpha_3 & \alpha_3 \end{matrix} \\ \underbrace{\hphantom{\alpha_3}}_{A_3^*} & \underbrace{\hphantom{0 \quad \alpha_3 \quad -\sqrt{2}\alpha_3 \quad \sqrt{2}\alpha_3}}_{A_4^*} & \underbrace{\hphantom{-\alpha_3 \quad \alpha_3}}_{A_3^*} \end{pmatrix}.$$

Вообще, для $n > 6$ матрицу A_n^* можно получить из A_{n-4}^* и A_4^*. Этот факт схож с результатом, полученным С. Крассом [9]

$$V_{n,s} V_{n',s'} \leq V_{n+n',s+s'}, \tag{13}$$

только вместо знака неравенства стоит равенство.

4. Вывод оценок $V_{n,s}$

Для нас представляют больший интерес не численные значения этих матриц, а точные. Для их нахождения можно поступить следующим образом. Можно постараться определить точки, в которых наибольший параллелепипед $V_{n,[n/2]}$ касается звездного тела $\mathbb{F}_{n,[n/2]}$, выписать в этих точках граничные условия и на их основании получить параметры параллелепипеда.

Например, рассмотрим случай $n = 3$. Рассмотрим матрицу

$$A_3^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & b \\ 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

Посторим задачу обратную (11). Выберем набор точек в которых $f_{3,1}$ должна быть ≤ 1. Если выбрать в качестве него все точки $\mathbb{A}_3^*$ (набор δ_{max}), то матрица гарантировано будет удовлетворять задаче (11). При фиксированном наборе δ_0 точек будет максимизировать значение $\det A_3^*$. Если $\det A_3^*$ совпадет с $\det A_3$ наибольшей матрицы для $n = 3$, это будет означать, что можно перейти при проверке задачи (11) от набора δ_{max} к набору δ_0. Сужая набор δ_0 до минимума, можно получить граничные точки, в которых достаточно требовать $f_{3,1} = 1$, чтобы весь параллелепипед $\mathbb{A}_3^*$ находился внутри $\mathbb{F}_{3,1}$.

Проводя численные эксперименты, начав с точек со значениями координат $-1, 0, 1$, мы пришли к набору, состоящему из единственной точки $(1, 1, 0)$ (на единичном кубе; единичный куб с помощью преобразования (10) приводится к $\mathbb{A}_3^*$). Эта точка, применяя (10), преобразуется в точку (a, b, b), что приводит нас к задаче

$$2ab^2 \to \max,$$
$$\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right) b = 1.$$

Решив эту задачу [1] мы получим точное значение

$$A_3^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

.

Полученная матрица дает оценку $V_{3,1} \geq \det A_3^* = 2$, что совпадает результатом Т. Кьюзика [3].

Для $n = 5$ возьмем матрицу

$$A_5^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b & 0 & 0 \\ 0 & -c & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix}. \tag{14}$$

В этом случае получаются более сложные граничные точки: $(1,1,1,-1,1)$, $\left(1,1,-1,\frac{1}{3},1\right)$ и $\left(1,1,\sqrt{5}-2,-1,1\right)$. Соответсвующая задача имеет вид

$$\begin{gathered} 4ab^2c^2 \to \max, \\ 2a^2b^2c = 1, \\ \frac{8}{27}(a^2+4b^2)c^3 = 1, \\ \left(3-\sqrt{5}\right) b^2 \left(a^2 + \left(3-\sqrt{5}\right)^2 b^2\right) c = 1. \end{gathered}$$

Ее решение [1]

$$a = \sqrt{7-3\sqrt{5}} \cdot \sqrt[10]{\frac{134+30\sqrt{5})}{27}}, \qquad b = a \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{8(4\sqrt{5}-9)}}, \qquad c = \frac{1}{2a^2b^2},$$

что дает оценку

Теорема 3.

$$V_{5,2} \geq \det A_5^* = \sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}} \approx 2.48831... \tag{15}$$

Для $n = 6$ матрица имеет вид

$$A_6^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix}. \tag{16}$$

В этом случае достаточно двух граничных точек: $(1,1,1,1,1,1)$ и $\left(1,1,\sqrt{5}-2,1,1,1\right)$. Соответсвующая задача имеет вид

$$\begin{gathered} 4a^2b^4 \to \max, \\ \frac{1}{2}a^2b^2\left(a^2+4b^2\right) = 1, \\ \frac{1}{4}\left(3-\sqrt{5}\right) b^2 \left(a^2+4b^2\right)\left(a^2 + \left(3-\sqrt{5}\right)^2 b^2\right) = 1. \end{gathered}$$

Ее решение [1]

$$a = \sqrt[6]{\frac{8\left(30\sqrt{5}-67\right)}{11}}, \qquad b = \sqrt[6]{\frac{56+25\sqrt{5}}{88}},$$

что дает оценку

Теорема 4.

$$V_{6,3} \geq \det A_6^* = \frac{9+5\sqrt{5}}{11} \approx 1.83458.... \tag{17}$$

5. Доказательство оценок $V_{n,s}$

Для доказательства теорем 3 и 4 воспользуемся следующими леммами. Их доказательство не представляет сложности и носит технический характер.

Лемма 1.

$$\max F_1(x,y,z,w) = (t+x^2)(t+z^2)(y^2+w^2) = 64(56-25\sqrt{5}),$$

где $t = 10\sqrt{5}-22$, *при условии*

$$-2 \leq x+y \leq 2, \quad -2 \leq x-y \leq 2.$$

$$-2 \leq z+w \leq 2, \quad -2 \leq z-w \leq 2.$$

Доказательство. См. [1]. □

Лемма 2.

$$\max F_2(x,y,z,w) = (t_1+y^2)(t_2x^2+z^2)|w| = \frac{64\left(5\sqrt{5}-9\right)}{27},$$

где $t_1 = 10\sqrt{5}-22$ *и* $t_2 = \frac{26+10\sqrt{5}}{27}$, *при условии*

$$-2 \leq x+y \leq 2, \quad -2 \leq x-y \leq 2.$$

$$-2 \leq z+w \leq 2, \quad -2 \leq z-w \leq 2.$$

Доказательство. См. [1]. □

В дальнейших рассуждениях будем рассматривать матрицы следующего вида

$$A_* = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k & a_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_k & a_k \end{pmatrix}.$$

Тогда задача (11) принимает вид

$$
\begin{gathered}
f_{n,[n/2]} = \tfrac{1}{2^{[n/2]}} \prod_{i=1}^{[n/2]} |x_i^2 + x_{[n/2]+i}^2| \prod_{i=2[n/2]}^{n} |x_i| \to \max, \\
\left|\frac{x_1}{a}\right| \le 1, \quad \cdots \quad \left|\frac{x_{n-2k}}{a}\right| \le 1, \\
\left|\frac{x_{n-2k+1}}{2a_1} + \frac{x_{n-2k+2}}{2a_1}\right| \le 1, \quad \left|\frac{x_{n-2k+1}}{2a_1} - \frac{x_{n-2k+2}}{2a_1}\right| \le 1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left|\frac{x_{n-1}}{2a_k} + \frac{x_n}{2a_k}\right| \le 1, \quad \left|\frac{x_{n-1}}{2a_k} - \frac{x_n}{2a_k}\right| \le 1.
\end{gathered}
$$

Сделав замену

$$
\begin{gathered}
x_i = a y_i, \qquad i = \overline{1, n-2k} \\
x_{n-2(k-i)-1} = a_i y_{n-2(k-i)-1}, \quad x_{n-2(k-i)} = a_i y_{n-2(k-i)}, \qquad i = \overline{1,k}
\end{gathered} \tag{18}
$$

задача примет вид

$$
\begin{gathered}
f_{n,[n/2]} = \tfrac{1}{2^{[n/2]}} \prod_{i=1}^{[n/2]} |x_i^2 + x_{[n/2]+i}^2| \prod_{i=2[n/2]}^{n} |x_i| \to \max, \\
|y_1| \le 1, \quad \cdots \quad |y_{n-2k}| \le 1, \\
|y_{n-2k+1} + y_{n-2k+2}| \le 2, \quad |y_{n-2k+1} - y_{n-2k+2}| \le 2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
|y_{n-1} + y_n| \le 2, \quad |y_{n-1} - y_n| \le 2.
\end{gathered} \tag{19}
$$

В этой задаче ограничения не зависят от исходной матрицы A.

Доказательство теоремы 4.
В качестве матрицы A_n рассмотрим матрицу (16), записанную в виде

$$
A_6 = \begin{pmatrix}
\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \alpha\beta & \alpha\beta & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\alpha\beta & \alpha\beta & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\beta & \alpha\beta \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta & \alpha\beta
\end{pmatrix}.
$$

где

$$
\alpha = \sqrt[6]{\frac{8\left(30\sqrt{5} - 67\right)}{11}}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{1}{10\sqrt{5} - 22}},
$$

откуда

$$
V_{6,3} \ge \det A_6 = \frac{9 + 5\sqrt{5}}{11}.
$$

Задача (19) примет вид

$$
\begin{gathered}
f_{6,3} = \frac{1}{8}(x_1^2 + x_4^2)(x_2^2 + x_5^2)(x_3^2 + x_6^2) = \\
= \frac{\alpha^6\beta^6}{8} \cdot \left(\frac{y_1^2}{\beta^2} + y_6^2\right)\left(\frac{y_2^2}{\beta^2} + y_5^2\right)\left(y_3^2 + y_6^2\right) \to \max,
\end{gathered}
$$

$$|y_1| \le 1, \qquad |y_2| \le 1,$$
$$|y_3+y_4| \le 2, \qquad |y_3-y_4| \le 2,$$
$$|y_5+y_6| \le 2, \qquad |y_5-y_6| \le 2.$$

Докажем, что $\max f_{6,3} \le 1$.

Отметим, что наибольшее значение достигается, при $|y_1| = 1$. Действительно, пусть существует максимум такой, что $\max f_{6,3} = f_{6,3}(\delta, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$, где $|\delta| < 1$. Тогда

$$f_{6,3}(\delta y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = \frac{\alpha^6\beta^6}{8} \cdot \left(\frac{\delta^2}{\beta^2} + y_6^2\right)\left(\frac{y_2^2}{\beta^2} + y_5^2\right)\left(y_3^2 + y_6^2\right) \le$$

$$\le \frac{\alpha^6\beta^6}{8} \cdot \left(\frac{1}{\beta^2} + y_6^2\right)\left(\frac{y_2^2}{\beta^2} + y_5^2\right)\left(y_3^2 + y_6^2\right) = f_{6,3}(1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6).$$

Противоречие, т.е. $|y_1| = 1$. Аналогично показывается, что $|y_2| = 1$.

Таким образом, достаточно доказать, что $\max f^*_{6,3} \le 1$, при условии

$$|y_3+y_4| \le 2, \qquad |y_3-y_4| \le 2, \qquad |y_5+y_6| \le 2, \qquad |y_5-y_6| \le 2. \tag{20}$$

где

$$f^*_{6,3} = \frac{\alpha^6\beta^6}{8} \cdot \left(\frac{1}{\beta^2} + y_4^2\right)\left(\frac{1}{\beta^2} + y_5^2\right)\left(y_3^2 + y_6^2\right) = \frac{\alpha^6\beta^6}{8} \cdot F_1(y_3, y_4, y_5, y_6),$$

и

$$F_1(a,b,c,d) = \left(\frac{1}{\beta^2} + a^2\right)\left(\frac{1}{\beta^2} + c^2\right)(b^2+d^2).$$

В силу леммы (1)

$$\max F_3(a,b,c,d) = 64(56 - 25\sqrt{5}),$$

при ограничениях (20). Тогда

$$f^*_{6,3} \le \frac{\alpha^6\beta^6}{8} \cdot 64(56 - 25\sqrt{5}) = 1.$$

Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 3.

Доказательство будем проводить аналогично теореме 4. В качестве матрицы A_n рассмотрим (14), записанную в виде

$$A_5 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\beta & \alpha\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha\beta & \alpha\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta\gamma & \alpha\beta\gamma \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta\gamma & \alpha\beta\gamma \end{pmatrix}.$$

где

$$\alpha = \sqrt{7 - 3\sqrt{5}} \cdot \sqrt[10]{\frac{134 + 60\sqrt{5}}{27}}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{1}{10\sqrt{5} - 22}}, \qquad \gamma = \sqrt{\frac{27}{26 + 10\sqrt{5}}}.$$

Тогда

$$V_{5,2} \ge \det A_5 = \sqrt{\frac{27\left(9 + 5\sqrt{5}\right)}{88}}.$$

Задача (19) примет вид

$$f_{5,2} = \frac{1}{4}\left(x_1^2 + x_3^2\right)\left(x_2^2 + x_4^2\right)|x_5| =$$

$$= \frac{\alpha^5\beta^5\gamma^3}{4} \cdot \left(\frac{y_1^2}{\beta^2} + y_6^2\right)\left(\frac{y_2^2}{\gamma^2} + y_4^2\right)|y_5| \to \max,$$

$$|y_1| \le 1,$$

$$|y_2 + y_3| \le 2, \qquad |y_2 - y_3| \le 2,$$

$$|y_4 + y_5| \le 2, \qquad |y_4 - y_5| \le 2.$$

Аналогично доказательству теоремы 4 отмечаем, что $|y_1| = 1$ и приходим к ограничениям

$$|y_2 + y_3| \le 2, \qquad |y_2 - y_3| \le 2, \qquad |y_4 + y_5| \le 2, \qquad |y_4 - y_5| \le 2. \tag{21}$$

То есть

$$f_{5,2}^* = \frac{\alpha^5\beta^5\gamma^3}{4} \cdot \left(\frac{1}{\beta^2} + y_3^2\right)\left(\frac{y_2}{\gamma^2} + y_4^2\right)|y_5| = \frac{\alpha^5\beta^5\gamma^3}{4} \cdot F_2(y_2, y_3, y_4, y_5),$$

где

$$F_2(a,b,c,d) = \left(\frac{1}{\beta^2} + b^2\right)\left(\frac{a^2}{\gamma^2} + c^2\right)|d|.$$

В силу теоремы (2)

$$\max F_2(a,b,c,d) = \frac{64\left(5\sqrt{5} - 9\right)}{27}.$$

при ограничениях (21). Тогда

$$f_{5,2}^* \le \frac{\alpha^5\beta^5\gamma^3}{4} \cdot \frac{64\left(5\sqrt{5} - 9\right)}{27} = 1.$$

Теорема доказана. □

Соединяя результаты (8), теоремы 4, 3 и оценку (13) можно получить общее описание оценок $V_{n,[n/2]}$

Следствие 1. *Если $n > 2$, то*

$$V_{n,[n/2]} \ge T_n \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2[(n-3)/4]},$$

где

- *если $n \equiv 3 (\mathrm{mod} 4)$, то $T_n = 2$;*
- *если $n \equiv 0 (\mathrm{mod} 4)$, то $T_n = \frac{16}{9} \approx 1.77777\ldots$;*
- *если $n \equiv 1 (\mathrm{mod} 4)$, то $T_n = \sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}} \approx 2.48831\ldots$;*
- *если $n \equiv 2 (\mathrm{mod} 4)$, то $T_n = \frac{9+5\sqrt{5}}{11} \approx 1.83458\ldots$.*

6. Оценки C_n

В работе [5] были приведены следующие оценки константы наилучших диофантовых приближений снизу

$$
\begin{aligned}
C_3 &\geq \frac{2}{5\sqrt{11}} &&\approx 0.120605...\\
C_4 &\geq \frac{16}{9\sqrt{1609}} &&\approx 0.044320...\\
C_5 &\geq \frac{16}{207\sqrt{53}} &&\approx 0.010617...\\
C_6 &\geq \frac{16}{9\sqrt{184\,607}} &&\approx 0.004138...
\end{aligned}
$$

Следствие 1 позволяют улучшить эти значения

$$
\begin{aligned}
C_5 &\geq \frac{3}{46}\sqrt{\frac{3\left(9+5\sqrt{5}\right)}{1166}} &&\approx 0.014860...\\
C_6 &\geq \frac{9+5\sqrt{5}}{11\sqrt{184\,607}} &&\approx 0.004269...\\
C_7 &\geq \frac{32}{4\,275\sqrt{19}} &&\approx 0.001717...\\
C_8 &\geq \frac{256}{81\sqrt{29\,510\,281}} &&\approx 0.000581...\\
C_9 &\geq \frac{6}{9051}\sqrt{\frac{3\left(9+5\sqrt{5}\right)}{506}} &&\approx 0.000229...\\
C_{10} &\geq \frac{16\left(9+5\sqrt{5}\right)}{99\sqrt{5\,939\,843\,699}} &&\approx 0.000042...
\end{aligned}
$$

7. Заключение

Данная работа является развитием подхода к оценке константы наилучших диофантовых приближений, заложенного Г. Дэвенпортом [4], Дж. В. С. Касселсом [2], Т. Кьюзиком (см. [3]. Применение новых идей в сочетании с эффективным использованием численных экспериментов, позволило улучшить существующие оценки константы наилучших диофантовых приближений для $n = 5$ и $n = 6$. При этом для получения более сильных оценок, скорее всего, потребуются принципиально новые подходы. Косвенным признаком этого может быть полученная нами в разделе 3 информация о том, что A_n^* можно представить в виде композиции A_{n-4}^* и A_4^*.

В качестве возможного подхода по усилению оценок C_n снизу можно предложить непосредственную оценку значения критического определителя звездного тела $\mathbb{F}_n$. Это нетривиальная задача, но необходимо отметить, что в случае оценки сверху были получены достаточно обширные результаты [11, 12, 13, 14, 15, 18].

Другим направление исследований может стать применение предложенного в данной работе подхода для оценки критических определителей. Задача оценки критического определителя ограниченного тела достаточно схожа с задачей оценки $V_{n,s}$. Нам кажется, что сочетание численных и аналитических методов в описанном случае может дать определенные результаты.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Basalov Yu. A. On estimating the constant of simultaneous Diophantine approximation // arXiv.org. 2019. Дата обновления: 09.04.2019. URL: https://arxiv.org/abs/1804.05385 (дата обращения: 10.04.2019).
2. Cassels J. W. S. Simultaneous Diophantine approximation // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 119–121.
3. Cusick T. W. Estimates for Diophantine approximation constants // Journal of Number Theory. 1980. Vol. 12(4). P. 543–556.
4. Davenport. H. On a theorem of Furtwängler // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 186–195.
5. Finch S .R. Mathematical Constants. Cambridge University Press, 2003 (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Book 94).
6. Furtwängler H. Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. I // Math. Ann. 1927. Vol. 96. P. 169–175;
7. Furtwängler H. Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. II // Math. Ann. 1928. Vol. 99. P. 71–83.
8. Hurwitz A. Über die angenaherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationaleBriiche // Math. Ann. 1891. Vol. 39. P. 279–284.
9. Krass S. Estimates for n-dimensional Diophantine approximation constants for $n \geq 4$ // J. Number Theory. 1985. Vol. 20(2). P. 172–176
10. Krass S. The N-dimensional diophantine approximation constants // Australian Mathematical Society. 1985. Vol 32(2). P. 313–316.
11. Mack J. M. Simultaneous Diophantine approximation // J. Austral. Math. Soc. A. 1977. Vol. 24. P. 266–285.
12. Nowak W. G. A note on simultaneous Diophantine approximation // Manuscr. Math. 1981. Vol. 36. P. 33–46.
13. Nowak W. G. A remark concerning the s-dimensional simultaneous Diophantine approximation constants // Graz. Math. Ber. 1993. Vol. 318. P. 105–110.
14. Nowak W. G. Lower bounds for simultaneous Diophantine approximation constants. // Comm. Math. 2014. Vol. 22, Is. 1, P. 71–76.
15. Nowak W. G. Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz's theorem // In: T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), Essays in mathematics and its applications. Springer/ Switzerland. 2016. P. 181–197.
16. Басалов Ю. А. Об истории оценок константы наилучших совместных диофантовых приближений // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 388–405.

   https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-394-411.
17. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел: Пер. с англ. – М.: Мир, 1965.
18. Мощевитин. Н. Г. К теореме Блихфельдта-Мюллендера-Спона о совместных приближениях // Тр. МИАН, 2002, том 239, с. 268–274.

19. Шмидт В. М. Диофантовы приближения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983.

20. A Database for Number Fields // A Database for Number Fields. URL: http://galoisdb.math.upb.de/ (дата обращения: 05.05.2018).

REFERENCES

1. Basalov Yu. A. 2019, “On estimating the constant of simultaneous Diophantine approximation“, Available at: https://arxiv.org/abs/1804.05385.

2. Cassels J. W. S. 1955, “Simultaneous Diophantine approximation“, *J. London Math. Soc.*, Vol. 30, pp. 119–121.

3. Cusick T. W. Estimates for Diophantine approximation constants // Journal of Number Theory. 1980. Vol. 12(4). P. 543–556.

4. Davenport. H. 1955, “On a theorem of Furtwängler“, *J. London Math. Soc.* , Vol. 30, pp. 186–195.

5. Finch S. R. 2003, *Mathematical Constants*, Cambridge University Press (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Book 94).

6. Furtwängler H. 1927, “Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. I“, *Math. Ann.*, Vol. 96, pp. 169–175.

7. Furtwängler H. 1928, “Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. II“, *Math. Ann.*, Vol. 99, pp. 71–83.

8. Hurwitz A. 1891, “Über die angenaherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationaleBriiche“, *Math. Ann.*, Vol. 39, pp. 279–284.

9. Krass S. 1985, “Estimates for n-dimensional Diophantine approximation constants for $n \geq 4$“, *J. Number Theory* , Vol. 20, Is. 2, pp. 172–176.

10. Krass S. 1985, “The N-dimensional diophantine approximation constants“, *Australian Mathematical Society* , Vol. 32, Is. 2, pp. 313–316.

11. Mack J. M. 1977, “Simultaneous Diophantine approximation“, *J. Austral. Math. Soc. A.*, Vol. 24, pp. 266–285.

12. Nowak W. G. 1981, “A note on simultaneous Diophantine approximation“, *Manuscr. Math.*, Vol. 36, pp. 33–46.

13. Nowak W. G. 1993, “A remark concerning the s-dimensional simultaneous Diophantine approximation constants“, *Graz. Math. Ber.*, Vol. 318. pp. 105–110.

14. Nowak W. G. 2014, “Lower bounds for simultaneous Diophantine approximation constants“, *Comm. Math*, Vol. 22, Is. 1, pp. 71–76.

15. Nowak W. G. 2016, “Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz’s theorem“, *In: T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), Essays in mathematics and its applications*, Springer, Switzerland, pp. 181–197.

16. Basalov Yu. A., 2018, "On the history of estimates of the constant of the best joint Diophantine approximations" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 388–405.

https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-394-411

17. Cassels J. W. S. 1965, *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Mir.

18. Moshchevitin N. G. 2002, “To the Blichfeldt-Mullender-Spohn theorem on simultaneous approximations“, *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute*, Vol. 239, pp. 268–274.

19. Schmidt W. M. 1983, *Diophantine Approximation*, Mir.

20. A Database for Number Fields. Available at: http://galoisdb.math.upb.de/

Получено 21.01.2019
Принято к печати 10.04.2019