ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 4 (2014)

УДК 512.53+512.54

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ В ЯРОСЛАВСКОМ ОТДЕЛЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ М. Д. ГРИНДЛИНГЕРА

В. Г. Дурнев, О. В. Зеткина (г. Ярославль)

Аннотация

Дается обзор основных результатов, полученных в Ярославском отделении алгебраической школы Мартина Давидовича Гриндлингера за период с середины 70-х годов прошлого века по настоящее время.

Ключевые слова: ограниченные позитивные теории, уравнения в свободных группах и полугруппах, вербальные подгруппы, алгебраически замкнутые группы.

Библиография: 93 названия.

SOME OF THE RESULTS OBTAINED IN THE YAROSLAVL BRANCH ALGEBRAIC SCHOOL OF M. D. GRINDLINGER

V. G. Durnev, O. V. Zetkina (Yaroslavl)

Abstract

We review the main results obtained in the Yaroslavl branch of Martin Greendlinger's algebraic school from the middle 1970s up to the present.

Keywords: bound positive theories, equations in free groups and semigroups, verbal subgroups, algebraically closed groups.

Bibliography: 93 titles.

1. Введение

Ярославское отделение алгебраической школы Мартина Давидовича Гриндлингера сформировалось во второй половине 70-х годов прошлого века после переезда из Тулы в Ярославль старшего (по возрасту) из авторов предлагаемого вниманию читателей обзора. Исследования велись, прежде всего, в направленни установления алгоритмической неразрешимости “достаточно простых”, прежде всего позитивных, фрагментов элементарных теорий свободных полугрупп, уравнений в свободных полугруппах и группах с различными "достаточно простыми и естественными" ограничениями на решения. Эти исследования укладываются в сформулированную в 60-е годы прошлого века Сергеем Ивановичем Адяном общую программу "установления границы" между разрешимыми и неразрешимыми алгоритмическими проблемами, прояснения ответа на вопрос "Как из алгоритмической разрешимости возникает алгоритмическая неразрешимость?". Один из авторов обзора входит в состав Ведущей научной школы академика С. И. Адяна и принимал посильное участие в выполнении исследований по грантам, полученным этой школой.

2. Алгоритмическая неразрешимость простых фрагментов элементарных теорий свободных полугрупп

Обозначим через Π_n свободную полугруппу ранга n со свободными образующими a_1, ..., a_n. Как обычно в случае $n = 2, 3$ вместо a_1 и a_2 пишем a, b и c соответственно.

Исследование элементарной теории свободной полугруппы было начато В. Куайном, который еще в 1946 г. [1] доказал, что при $n \geqslant 2$ *элементарная теория свободной полугруппы* Π_n *алгоритмически неразрешима.*

После этого был почти 30-летний перерыв и лишь с начала 70-ых годов появились работы, в которых основное внимание уделялось исследованию вопроса об алгоритмической разрешимости фрагментов элементарных теорий свободных полугрупп.

В 1973 г. нами [4], [5] доказана неразрешимость фрагмента элементарной теории свободной полугруппы Π_n при $n \geqslant 2$, состоящего из позитивных формул, т. е. формул без отрицания, с кванторной приставкой типа $\exists\forall\exists^3$. С. С. Марченков в работе [7] доказал неразрешимость позитивной $\forall\exists^4$ - теории свободной полугруппы, это улучшает результат работы [4] с точки зрения числа кванторных блоков в рассматриваемых формулах, но при этом общее число используемых кванторов в работах [4] и [7] одно и тоже. В работе [8] нами доказана *алгоритмическая неразрешимость позитивной* $\forall\exists^3$ - *теории свободной полугруппы* Π_n при $n \geqslant 2$, что усиливает результаты работ [4], [5] и [7].

В описанных выше исследованиях основное внимание уделялось лишь кванторным приставкам рассматриваемых формул. При этом бескванторная часть формул из работ [4] и [5] была достаточно простой, что нельзя сказать о бескванторных частях формул из работ [7] и [8]: сами формулы имели вид

$$(\forall x)(\exists y_1)\ldots(\exists y_t)\ \bigvee_{i=1}^{m}\ w_i(x,y_1,\ldots,y_t,a,b) \,=\, u_i(x,y_1,\ldots,y_t,a,b),$$

где $w_i(x,y_1,\ldots,y_t,a,b)$ и $u_i(x,y_1,\ldots,y_t,a,b)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ – слова в алфавите

$\{x, y_1, \ldots, y_t, a, b\}$, $t = 4$ в работе [7], а в работе [8] $t = 3$. Однако в обеих этих работах m достаточно большое.

В последнее время нам удалось получить дальнейшее продвижение в исследовании этого вопроса с точки зрения упрощения бескванторной части доказав, что

невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольной позитивной формуле вида

$$(\forall x)(\exists y_1)\ldots(\exists y_5)\, w(x, y_1, \ldots, y_5, a, b) \;=\; u(x, y_1, \ldots, y_5, a, b),$$

где $u(x, y_1, \ldots, y_5, a, b)$ *и* $u(x, y_1, \ldots, y_5, a, b)$ *– слова в алфавите* $\{x, y_1, \ldots, y_5, a, b\}$, *определить, истинна ли она на свободной полугруппе* Π_2.

Во всех указанных выше работах авторы придерживались фактически "классического" понимания кванторов общности $\forall$ и существования $\exists$. Наша попытка “конструктивного” понимания кванторов привела к доказательству следующего утверждения.

Определим на словах в произвольном алфавите Σ два отношения $<$ и $\subset$:

$$U \,<\, V \iff \text{слово } U \text{ — начало слова } V,$$
$$U \,\subset\, V \iff \text{слово } U \text{ — подслово слова } V.$$

Можно построить такую формулу $\Phi(w)$ *с одной свободной переменной* w, *имеющую вид*

$$(\exists\, v)\,(\forall\, x)_{x<t}\,(\exists\, x_1)_{x_1\subset t_1}\,\ldots\,(\exists\, x_9)_{x_9\subset t_9}\, U \;=\; V,$$

где t, t_1, ..., t_9, U *и* V *– слова в алфавите*

$$\{w,\, v,\, x,\, x_1,\, ...,\, x_9,\, a,\, b,\, c\},$$

что не существует алгоритма, позволяющего по произвольному элементу W *полугруппы* Π_2 *определить истинна ли на полугруппе* Π_3 *формула* $\Phi(W)$.

В работе [9] нами установлена алгоримимческая неразрешимость простого фрагмента позитивной теории с одной константой свободной полугруппы ранга 2.

3. Уравнения в свободных полугруппах

Первые результаты в исследовании систем уравнений в свободных полугруппах, получивших названия *уравнения в словах* были получены А. А. Марковым и Ю. И. Хмелевским [10] в конце 60-х годов.

В эти же годы было начато изучение систем уравнений в словах и длинах, т. е. систем вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i = u_i \mathbin{\&} \mathop{\&}_{\{i,j\}\,\in\, A} |x_i| = |x_j|,$$

где через $|x| = |y|$ обозначен предикат "*длины слов x и y равны*".

Первые результаты в исследовании систем уравнений в словах и длинах были получены в начале 70-х годов в работах Ю. В. Матиясевича [11] и Н. К. Косовского [12], [13], [14].

В 1972-73 годах мы начали рассматривать системы уравнений в словах и длинах с дополнительным предикатом $|x|_a = |y|_a$ – "*проекции слов x и y на выделенную букву a равны*". В работе [15], вышедшей из печати в 1974 году, нами, в частности, доказано, что

можно указать такое однопараметрическое семейство систем уравнений в свободной полугруппе Π_2,

$$w\,(x, x_1, \ldots, x_n, a, b) = v\,(x, x_1, \ldots, x_n, a, b)\,\& \\ \mathop{\&}_{\{i,j\}\,\in\, A} (|x_i| = |x_j| \,\&\, |x_i|_a = |x_j|_a)$$

с неизвестными x_1, ..., x_n, с константами a и b и с параметром x, где A – некоторое подмножество множества $M(n) = \{\{t, s\} \,|\, 1 \leqslant t, s \leqslant n\}$ всех неупорядоченных пар натуральных чисел, не превосходящих n, что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа m определить, имеет ли решение уравнение

$$w\,(a^m, x_1, \ldots, x_n, a, b) = v\,(a^m, x_1, \ldots, x_n, a, b)\,\& \\ \mathop{\&}_{\{i,j\}\,\in\, A} (|x_i| = |x_j| \,\&\, |x_i|_a = |x_j|_a).$$

В этой же работе отмечалось, что аналогичный результат остается верным, если предикат $|x| = |y| \,\&\, |x|_a = |y|_a$ заменить предикатом $|x|_b = |y|_b \,\&\, |x|_a = |y|_a$.

Аналогичный результат содержался в опубликованной в 1988 году работе J. R. Buchi и S. Senger [16].

В 1976 году Г. С. Маканин получил в теории уравнений в словах фундаментальный результат, который был опубликован в 1977 году в работах [20] и [21], – он построил алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнеий в свободной полугруппе Π_m определить, имеет ли она решение. Несколько позже в работе [37] Г. С. Маканин построил алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнений в свободной группе F_m определить, имеет ли она решение.

После фундаментальных результатов Г. С. Маканина особый интерес стал представлять вопрос о существовании аналогичных алгоритмов для уравнений в свободных полугруппах и группах с различными "не слишком сложными" и "достаточно естественными" ограничениями на решения.

В серии работ [22], [23], [24], [25] и [26] нами рассматривались ограничения на решения типа $x \in L$, где L – некоторый "не слишком сложный" и "достаточно естественный” язык. В качестве таких языков рассматривались, прежде всего, язык L_1, состоящий из всех таких слов в алфавите $\{a, b\}$, в которых число вхождений буквы a равно числу вхождений буквы b, и язык L_2, состоящий из всех таких слов в алфавите $\{a, b\}$, в которых число вхождений буквы a в два раза больше числа вхождений буквы b.

Были доказаны, в частности, следующие теоремы.

Теорема 1. *Можно указать такое однопараметрическое семейство уравнений с ограничениями на решения в свободной полугруппе* Π_2,

$$w\,(\,x,\,x_1,\ldots,x_n,\,a,\,b\,)\;=\;v\,(\,x,\,x_1,\ldots,\,x_n,\,a,\,b\,)\;\&\;\mathop{\&}_{i=3}^{p}(x_i\,\in\,L_1)\;\&\;|x_1|\;=\;|x_2|$$

с неизвестными x_1, ..., x_n, *с константами* a *и* b *и с параметром* x, *что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа* m *определить, имеет ли решение уравнение*

$$w\,(\,a^m,\,x_1,\ldots,x_n,\,a,\,b\,)\;=\;v\,(\,a^m,\,x_1,\ldots,\,x_n,\,a,\,b\,)\;\&\;\mathop{\&}_{i=3}^{p}(x_i\,\in\,L_1)\;\&\;|x_1|\;=\;|x_2|.$$

Теорема 2. *Можно указать такое однопараметрическое семейство уравнений с ограничениями на решения в свободной полугруппе* Π_2,

$$w\,(\,x,\,x_1,\ldots,x_n,\,a,\,b\,)\;=\;v\,(\,x,\,x_1,\ldots,\,x_n,\,a,\,b\,)\;\&\;\mathop{\&}_{\{i,j\}\,\in\,A}|x_i|\;=\;|x_j|\;\&\;x_1\,\in\,L_1$$

с неизвестными x_1, ..., x_n, *с константами* a *и* b *и с параметром* x, *где* A *– некоторое подмножество множества* $M(n)\;=\;\{\{t,s\}\,|\,1\,\leqslant\,t,s\,\leqslant\,n\}$ *всех неупорядоченных пар натуральных чисел, не превосходящих* n, *что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа* m *определить, имеет ли решение уравнение*

$$w\,(\,a^m,\,x_1,\ldots,x_n,\,a,\,b\,)\;=\;v\,(\,a^m,\,x_1,\ldots,\,x_n,\,a,\,b\,)\;\&\;\mathop{\&}_{\{i,j\}\,\in\,A}|x_i|\;=\;|x_j|\;\&\;x_1\,\in\,L_1.$$

Теорема 3. *Можно указать такое однопараметрическое семейство систем уравнений с ограничениями на решения в свободной полугруппе* Π_2,

$$w\,(\,x,\,x_1,\ldots,x_n,\,a,\,b\,)\;=\;v\,(\,x,\,x_1,\ldots,\,x_n,\,a,\,b\,)\,\&\;\mathop{\&}_{i=2}^{t}(x_i\,\in\,L_1)\,\&\;x_1\,\in\,L_2$$

с неизвестными x_1, ..., x_n, с константами a и b и с параметром x, что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа m определить, имеет ли решение система уравнений

$$w\,(\,a^m,\,x_1,\ldots,x_n,\,a,\,b\,)\;=\;v\,(\,a^m,\,x_1,\ldots,\,x_n,\,a,\,b\,)\,\&\;\mathop{\&}_{i=2}^{t}(x_i\,\in\,L_1)\,\&\;x_1\,\in\,L_2.$$

Введем в рассмотрение язык $L \subseteq \Pi_3$: $L\,=\,(L_1c)^p(L_2c)^q$.

Теорема 4. *Можно указать такое однопараметрическое семейство уравнений с ограничениями на решения в свободной полугруппе Π_3,*

$$W\,(\,x,\,x_1,\ldots,x_{n+1},\,a,\,b,\,c)\;=\;V\,(\,x,\,x_1,\ldots,\,x_{n+1},\,a,\,b,\,c)\,\&\;\&\,x_{n+1}\,\in\,L.$$

с неизвестными x_1, ..., x_{n+1}, с константами a, b и c и с параметром x, что не существует алгоритма, позволяющего для произвольного натурального числа m определить, имеет ли решение уравнение

$$W\,(\,a^m,\,x_1,\ldots,x_{n+1},\,a,\,b,\,c)\;=\;V\,(\,a^m,\,x_1,\ldots,\,x_{n+1},\,a,\,b,\,c)\,\&\;\&\,x_{n+1}\,\in\,L.$$

Естественно возникает вопрос о возможности замены в определенном смысле "достаточно искусственного" языка $L\,=\,(L_1c)^p(L_2c)^q$ на "более естественный".

В серии работ [27], [28] и [29] мы рассматривали системы уравнений в свободных полугруппах с эндоморфизмами и автоморфизмами. Эта тематика ведет свое начало от работ Уайтхэда [30] по проблеме автоморфной сводимости для наборов элементов свободной группы. В этих работах нами установлена алгоритмическая неразрешимость ряда проблем для систем уравнений в свободных полугруппах в словах, длинах и с эндоморфизмами и автоморфизмами.

В работе [22] нами установлена NP-полнота проблемы эндоморфной сводимости для элементов свободной полугруппы счетного ранга.

4. Уравнения в свободных группах

Изучение уравнений и их систем в свободных группах было начато в середине прошлого века прежде всего американскими математиками в связи с исследованиями по проблеме А. Тарского относительно элементарных теорий свободных групп [32], [33], [34] и [35]. Важные результаты в этой области были получены Ю. И. Хмелевским [36].

В 1982 году Г. С. Маканин получил в теории уравнений в свободных группах фундаментальный результат [37] – он построил алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнений в свободной группе F_m определить, имеет ли она решение. А. А. Разборов [39] построил описание множества всех решений для произвольного разрешимого в свободной группе уравнения.

После фундаментальных результатов Г. С. Маканина особый интерес стал представлять вопрос о существовании аналогичных алгоритмов для уравнений в свободных группах с различными "не слишком сложными" и "достаточно естественными" ограничениями на решения.

В серии работ [15], [41], [42], [43], [44] и [45] нами рассматривались ограничения на решения типа $x \in F_n^{(m)}$, где $F_n^{(m)}$ – m-ый коммутант свободной группы F_n.

Были доказаны, в частности, следующие теоремы.

Теорема 5. *В свободной группе F_2 со свободными образующими a и b можно построить такое уравнение*

$$w\,(\,x,\,x_1,\,\ldots\,,\,x_n,\,a,\,b\,)\;=\;1$$

с неизвестными x_1, x_2,..., x_n, константами a и b и параметром x, что не существует алгоритма, позволяющего для произвольного натурального числа k определить, существует ли решение уравнения

$$w\,(\,a^k,\,x_1,\,\ldots\,,\,x_n,\,a,\,b\,)\;=\;1,$$

удовлетворяющее условию

$$x_1\;\in\;F_2^{(1)},\;\ldots\;,\;x_t\;\in\;F_2^{(1)},$$

где t – некоторое фиксированное число между 1 и n.

Теорема 6. *В свободной группе F_2 со свободными образующими a и b можно построить такое уравнение*

$$w\,(\,x,\,x_1,\,\ldots\,,\,x_n,\,a,\,b\,)\;=\;1$$

с неизвестными x_1, x_2,..., x_n, константами a и b и параметром x, что не существует алгоритма, позволяющего для произвольного натурального числа k определить, существует ли решение уравнения

$$w\,(\,a^k,\,x_1,\,\ldots\,,\,x_n,\,a,\,b\,)\;=\;1,$$

удовлетворяющее условию

$$x_1\;\in\;F_2^{(2)}.$$

Теорема 7. *В свободной группе F_3 со свободными образующими a, b и c можно построить такое уравнение*

$$w\,(\,x,\,x_1,\,\ldots\,,\,x_n,\,a,\,b,\,c\,)\;=\;1$$

с неизвестными x_1, x_2,..., x_n, константами a, b и c и параметром x, что не существует алгоритма, позволяющего для произвольного натурального числа k определить, существует ли решение уравнения

$$w\,(\,a^k,\,x_1,\,\ldots\,,\,x_n,\,a,\,b,\,c\,)\;=\;1,$$

удовлетворяющее условию

$$x_1\,\in\,P_3,$$

P_3 – подгруппа чистых или гладких элементов группы F_3.

По аналогии с группами кос элемент свободной группы F_n мы называем *чистым* или *гладким* элементом, если при удалении из его записи любого образующего элемента группы F_n он обращается в единицу. Множество P_n всех гладких элементов свободной группы F_n является ее нормальной подгруппой, но бесконечного индекса.

В связи с рассматриваемым вопросом отметим результаты, полученные А. Ш. Малхасяном в работе [40].

5. Уравнения в свободной группе, разрешенные относительно неизвестных

В ряде работ, например, [32], [33] и [36] рассматривались уравнения в свободных группах, разрешенные относительно неизвестных, т.е. уравнения вида $w(x_1,\ldots,x_m) = g(a_1,\ldots,a_n)$. При этом считалось, что проблема разрешимости для таких уравнений "проще", чем проблема разрешимости для произвольных уравнений. Однако нами доказана [46] следующая теорема.

Теорема 8. *По произвольному уравнению $w(x_1,...,x_n,a,b) = 1$ (1) в свободной группе F_2 со свободными образующими a и b можно построить такое разрешенное относительно неизвестных уравнение $u(x_1,...,x_n,x_{n+1},x_{n+2}) = [a,b]$ (2), где $u(x_1,...,x_n,x_{n+1},x_{n+2})$ – групповое слово в алфавите неизвестных $\{x_1,...,x_n,,x_{n+1},x_{n+2}\}$, а $[a,b]$ – коммутатор элементов a и b, т.е. $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$, что уравнение (1) имеет решение в свободной группе F_2 тогда и только тогда, когда имеет решение уравнение (2).*

Это позволило нам доказать следующие теоремы [47], [48].

Теорема 9. *В свободной группе* F_2 *со свободными образующими* a *и* b *можно построить такое семейство разрешенных относительно неизвестных уравнений*

$$w(x, x_1, \ldots, x_n) = [a, b],$$

где $w(x, x_1, \ldots, x_n)$ *– групповое слово в алфавите неизвестных* x, x_1, x_2,..., x_n, *что не существует алгоритма, позволяющего для произвольного натурального числа* k *определить, существует ли решение уравнения*

$$w(x^k, x_1, \ldots, x_n) = [a, b],$$

удовлетворяющее условию

$$x_1 \in F_2^{(1)}, \ldots, x_t \in F_2^{(1)},$$

где t *– некоторое фиксированное число между 1 и* n.

Теорема 10. *Невозможен алгоритм, позволяющий по произвольному уравнению вида*

$$w(x_1, ..., x_n) = [a, b]$$

в свободной группе F_2 *определить, имеет ли оно такое решение* g_1, ..., g_n, *что*

$$g_1 \in F_2^{(2)}.$$

Теорема 11. *Проблема разрешимости в свободной группе* F_2 *для уравнений вида* $w(x_1, \ldots, x_n) = [a, b]$, *где* $w(x_1, \ldots, x_n)$ *– слово в алфавите неизвестных, а* $[a, b]$ *– коммутатор свободных образующих* a *и* b *группы* F_2 *является* NP*-трудной.*

Используя предыдущие результаты, в работе [51] показывается, что коммутант свободной нециклической группы не является формульной подгруппой, что дает ответ на один вопрос А. И. Мальцева из “Коуровской тетради” [52] .

Теорема 12. *При любом* $m \geqslant 2$ *невозможно построить формулу* $CF_m(x)$ *языка первого порядка с равенством групповой сигнатуры, содержащей обозначения для групповой операции* $\cdot$, *обращения* $^{-1}$ *и константные символы для свободных образующих* a_1, ..., a_m, *с одной свободной переменной* x *такую, что для произвольного элемента* g *свободной группы* F_m *справедлива эквивалентность:*

формула $CF_m(g)$ *истинна на группе* F_m *тогда и только тогда, когда элемент* g *принадлежит коммутанту* $F_m^{(1)}$ *группы* F_m.

В заключение этого раздела отметим еще один результат.

В работе [49] установлена финитная неаппроксимируемость свободных групп относительно разрешимости произвольных уравнений. Ранее была известна финитная аппроксимируемость свободных групп относительно разрешимости уравнений вида $x^n = g$, $[x, y] = g$ и $x^{-1}hx = g$, где g и h – элементы свободной группы, а x и y – неизвестные.

В работе [50] нами построено уравнение вида

$$w(x_1, \ldots, x_6) = [a, b],$$

где a и b – свободные образующие свободной группы F_2, которое не имеет решения в этой группе, но имеет решение в любой ее конечной факторгруппе.

6. Об уравнениях и их системах в свободных нильпотентных и свободных метабелевых группах

В работе [53] установлена неразрешимость позитивной $\exists$-теории произвольной нециклической свободной нильпотентной группы, в частности, свободной нильпотентной группы ступени нильпотентности 2 и ранга 2. Этот результат можно рассматривать как уточнее известного результата А. И. Мальцева [54] о неразрешимости элементарной теории произвольной нециклической свободной нильпотентной группы и как некоторое дополнение к результатам Романькова В. А. [55], установившего, в частности, алгоритмическую неразрешимость проблемы существования решения для уравнений, разрешенных относительно неизвестных, в свободных нильпотентных группах ступени нильпотентности $\geqslant 9$ и достаточно большого ранга. В работе Репина Н. Н. [57] установлена, в частности, алгоритмическая неразрешимость проблемы существования решения для уравнений в свободных нильпотентных группах ступени нильпотентности 5 и ранга 2. В то же время в работе [53] нами доказана алгоритмическая разрешимость проблемы существования решения для уравнений в свободной нильпотентной группе ступени нильпотентности 2 и ранга 2 и алгоритмическая неразрешимость проблемы существования решения для систем уравнений в этой группе. Эта группа может быть задана двумя образующими элементами и двумя определяющими соотношениями. Базируясь на результатах работы [53], Репин Н. Н. [57] построил группу с тремя образующими элементами и двумя определяющими соотношениями, для которой алгоритмически неразрешима проблема существования решения для уравнений. Дальнейшее продвижение в этих исследованиях в статье В. Э. Шпильрайна [58].

В работе [59] нами установлена алгоритмическая неразрешимость проблемы эндоморфной сводимости для наборов элементов свободной нильпотентной группы ступени нильпотентности 2 и достаточно большого ранга и алгоритмическая разрешимость проблемы эндоморфной сводимости для наборов элементов свободной нильпотентной группы ступени нильпотентности 2 и ранга 2. Эти результаты можно рассматривать в качестве дополнения к результатам Романькова В. А. [55] об алгоритмической неразрешимости проблемы эндоморфной сводимости для элементов свободных нильпотентных группах ступени нильпотентности $\geqslant 9$ и достаточно большого ранга.

Дальнейшее развитие этой тематики в работе [60].

В работе [61] мы исследовали на свободной метабелевой группе ранга 2 уравнение $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ из работы А. И. Мальцева [62], рассматривавшего это уравнение на свободной группе ранга 2. Мы называем это уравнение уравнением Мальцева – Нильсена. Нам удалось доказать, что для свободной метабелевой группы ранга 2 справедлива теорема, аналогичная теореме А. И. Мальцева для свободной группы:

элементы x и y свободной метабелевой группы со свободными образующими a и b являются ее свободными образующими тогда и только тогда разрешимо относительно z одно из уравнений $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ или $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = bab^{-1}a^{-1}$.

Это позволило нам в работе [65] доказать алгоритмическую неразрешимость позитивной $\exists$-теории с одной константой $[a, b]$ свободной разрешимой группы, а значит и неразрешимость позитивной $\forall^2\exists^m$-теории этой группы. Эти результаты можно рассматривать как уточнение известного результата А. И. Мальцева [63] о неразрешимости элементарной теории свободной разрешимой неабелевой группы. Они дополняют результат В. А. Романьков [64] об алгоритмической неразрешимости вопроса о существовании решений для уравнений в свободной метабелевой группе ранга 2, разрешенных относительно неизвестных.

7. О проблеме А. Тарского для разрешимых групп

В работе Ю. И. Мерзлякова [66] было доказано, что позитивные теории любых двух свободных нециклических групп совпадают.

В работе [2] нами было установлено, если все группы многообразия групп U являются разрешимыми, то позитивные теории любых двух свободных групп этого многообразия U различных конечных рангов различны.

Этот результат позже усиливался и уточнялся в работах [67], [68] и [69].

Близкие вопросы исследованы в работах Sacerdote G. S. [70] и [71].

8. Об ограниченных элементарных теориях линейных групп

На основе полученных Л. С. Казариным [73] результатов о связи порядков элементов симметрических групп $S(n)$ и $S(n+1)$, линейных групп $GL(n, Z)$ и $GL(n+1, Z)$, $SL(n, Z)$ и $SL(n+1, Z)$ в работе [73] исследован вопрос об универсальной эквивалентности этих групп. Эти результаты можно рассматривать как некоторое уточнение результатов А. И. Мальцева [72] об элементарных теориях линейных групп. В работах [74] и [75] установлена алгоритмическая неразрешимость некоторых ограниченных теорий групп $SL(n, Z)$ и $GL(n, Z)$ при $n \geqslant 3$.

9. О подгруппах с тождествами фуксовых групп

В монографии Р. Линдона и П. Шуппа [76] дано описание абелевых подгрупп произвольных F-групп.

В работе [77] дано описание строения подгрупп с тождествами F-групп. А в работе [78] в качестве уточнения этого описания доказаны теоремы:

Теорема 13. *Для подгрупп фуксовых групп выполняется усиленный вариант* ***альтернативы Титса:***

произвольная подгруппа H фуксовой группы либо является разрешимой ступени $\leqslant 3$ или знакопеременной группой $A(5)$, либо H содержит подгруппу, изоморфную свободной группе ранга 2.

Теорема 14. *На подгруппе H произвольной фуксовой группы G не выполняется нетривиальное тождество тогда и только тогда, когда H содержит подгруппу, изоморфную свободной группе ранга 2.*

Н. Н. Репин [80] показал, что в группах кос B_3 и B_4, в отличии от симметрических групп, произведение двух коммутаторов может не быть коммутатором.

В работе [79] установлено, что коммутанты групп кос B_3 и B_4, как и любая вербальная подгруппа этих групп имеют бесконечную ширину. При этом мы опирались на работы Sacerdote G. S. [70] и [71].

В работе [92] В. Г. Бардаков совершенно другими методами доказал бесконечность ширины любой вербальной подгруппы любой группы кос $B(n)$.

В ряде работ рассматривался вопрос о разложимости групп кос $B(n)$ в свободное произведение с объединением. В работе [84] нами исследован вопрос о разложимости в свободное произведение факторгрупп групп кос $B(n)$ и линейных групп $SL(n, Z)$ и $GL(n, Z)$.

В работах [85] и [86] установлена алгоритмическая неразрешимость некоторых, в том числе позитивных, фрагментов элементарной теории свободной нециклической группы в сигнатуре, расширенной функцией длины. Эти результаты усиливают результаты работы [87] Huber-Dyson V. о неразрешимости элементарной теории свободной нециклической группы в сигнатуре, расширенной функцией длины и связаны с тематикой работы [88] А. Г. Мясникова и В. Н. Ремесленникова.

10. Заключение

Исследования в Ярославском отделении алгебраической школы Мартина Давидовича Гриндлингера по ряду причин переключились на применение алгебраических методов в криптографии. О полученных в этой области результатах, в частности, об алгебраических подходах к построению криптографических алгоритмов речь пойдет в следующем обзоре.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Quine W. Concatenation as a basis for arithmetic // J. Symbolic Logic. 1946. Vol. 11. P. 105 – 114.

2. Дурнев В. Г. О позитивных формулах на группах // Ученые записки матем. кафедр Тульского гос. пед. ин-та. Геометрия и алгебра. 1970. № 2. С. 215 – 241.

3. Дурнев В. Г. О позитивной теории свободной полугруппы // Вопросы теории групп и полугрупп. Тула. 1972. С. 122 – 172.

4. Дурнев В. Г. Позитивная теория свободной полугруппы // ДАН СССР. 1973. Т. 211, № 4. С. 772 – 774.

5. Дурнев В. Г. О позитивных формулах на свободных полугруппах // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 25, № 5. С. 1131 – 1137.

6. Дурнев В. Г. Позитивные теории свободных полугрупп: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГПИ. 1973.

7. Марченков С. С. Неразрешимость позитивной $\forall\exists$-теории свободной полугруппы // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 1. С. 196 – 198.

8. Дурнев В. Г. Неразрешимость позитивной $\forall\exists^3$-теории свободной полугруппы // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36. № 5. С. 1067 – 1080.

9. Дурнев В. Г. Неразрешимость простого фрагмента позитивной теории с одной константой свободной полугруппы ранга 2 // Мат. заметки. 2000. Том 67, № 2.

10. Хмелевский Ю. И. Уравнения в свободной полугруппе // Труды Мат. ин-та. АН СССР. 1971. Т. 107. 286 С.

11. Матиясевич Ю. В. Связь систем уравнений в словах и длинах с 10-ой проблемой Гильберта // Исследования по конструктивной математике и математической логике. Записки научн. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та. АН СССР. Л., 1968. Т. 8. С. 132 – 143.

12. Косовский Н. К. Некоторые свойства решений уравнений в свободной полугруппе // Записки научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та. АН СССР. Л., 1972. Т. 32. С. 21 – 28.

13. Косовский Н. К. О множествах, представимых в виде решений уравнений в словах и длинах // Вторая всесоюзная конфер. по матем. логике: тезисы кратких сообщений. М., 1972. С. 23.

14. Косовский Н. К. О решении систем, состоящих одновременно из уравнений в словах и неравенств в длинах слов // Записки научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та. АН СССР. Л.,1973. Т.33. С. 24 – 29.

15. Дурнев В. Г. Об уравнениях на свободных полугруппах и группах // Мат. заметки. 1974. Т.16, № 5. С. 717 – 724.

16. Büchi J. R. and Senger S. Definability in the existential theory of concatenation and undecidable extensions of this theory // Z. Mat. Log. und Grundl. Math. 1988. Vol. 34, № 4. P. 337 – 342.

17. Büchi J. R. and Senger S. Coding in the existential theory of concatenation // Arch. Math. Logik Grundlag. 26 (1986 / 87). P. 101 – 106.

18. Senger S. The Existential Theory of concatenation // Ph. D. Dissertation, Purdue University. 1982.

19. Дурнев В. Г. К вопросу об уравнениях на свободных полугруппах // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб. ЯрГУ. Ярославль. 1977. С. 57 – 59.

20. Маканин Г. С. Проблема разрешимости уравнений в свободной полугруппе // ДАН СССР. 1977. Т. 233, № 2. С. 287 – 290.

21. Маканин Г. С. Проблема разрешимости уравнений в свободной полугруппе // Мат. сб. 1977. Т. 103(145), № 2(6). С. 147–236.

22. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях в свободных полугруппах с ограничениями на решения // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 2003.

23. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях с языковыми ограничениями на решения в свободных моноидах // Математика, кибернетика, информатика: труды международной научной конференции, посвященной памяти профессора А. Ю. Левина. ЯрГУ. Ярославль. 2008. С. 93 – 99.

24. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях с ограничениями на решения в свободных полугруппах // Записки научных семинаров ПОМИ. 2008. Т. 358. С. 120 – 129.

25. Durnev V. G., Zetkina O. V. On equations in free semigroups with certain constraints tj their solutions // Journal of Mathematical Sciences. V. 158, № 5. Pp. 671 – 676.

26. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях с подполугрупповыми ограничениями на решения в свободных полугруппах // Чебышевский сборник. 2010. Т. XI, вып. 3(35). С. 78 – 87.

27. Дурнев В. Г. Об уравнениях с эндоморфизмами в свободных полугруппах и группах // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1991. С. 30 – 35.

28. Дурнев В. Г. Об уравнениях с эндоморфизмами в свободных полугруппах // Дискретная математика. 1992. Т. 4, № 2. С. 136 – 141.

29. Дурнев В. Г. Об уравнениях в словах и длинах с эндоморфизмами // Изв. ВУЗ'ов. Математика. 1992. № 8. С. 30 – 34.

30. Whitehead J. H. C. On equivalent sets of elements in a free group // Proc. London Math. Soc. 1936. Vol. 37. P. 782 – 800.

31. Дурнев В. Г. NP-полнота проблемы эндоморфной сводимости для элементов свободной полугруппы счетного ранга // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 2003.

32. Schupp P. E. On the substitution problem for free groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 23, № 2. P. 421 – 423.

33. Edmunds C. C. On the endomorphisms problem for free group // Com. Algebra. 1975, № 3. P. 7 – 20.

34. Lyndon R. C. Equations in free groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. Vol. 96. P. 445 – 457.

35. Lyndon R. C. Dependence in groups // Colloq. Math. 1966. № 4. P. 275 – 283.

36. Хмелевский Ю. И. Системы уравнений в свободной группе. I // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1971. Т. 35, № 6. С. 1237 – 1268.

37. Маканин Г. С. Уравнения в свободных группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1982. Т. 46, № 6. С. 1199 – 1274.

38. Маканин Г. С. Разрешимость универсальной и позитивной теорий свободной группы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984, № 4. С. 735 – 749.

39. Разборов А. А. О системах уравнений в свободной группе // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, № 4. С. 779 – 832.

40. Малхасян А. Ш. О разрешимости в подгруппах уравнений в свободной группе // Прикладная математика: межвуз. темат. сб.. 1986. Вып. 2. С. 42 – 47.

41. Дурнев В. Г. Об одном обобщении задачи 9.25 из “Коуровской тетради” // Мат. заметки. 1990. Т. 47, № 2. С. 15 – 19.

42. Дурнев В. Г. Об уравнениях с ограничениями на решения в свободных группах // Мат. заметки. 1993. Т. 53, № 1. С. 36 – 40.

43. Дурнев В. Г. Об уравнениях с подгрупповыми ограничениями на решения в свободных группах // Дискретная математика 1995. Т. 7, № 4. С. 60 – 67.

44. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях с подгрупповыми ограничениями на решения в свободных группах // Математика в Ярославском университете: сб. обзорных статей. К 30-летию математического факультета. ЯрГУ. Ярославль. 2006. С. 181 – 200.

45. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях в свободной группе с ограничениями на решения // Чебышевский сборник. 2010. Т. XI, вып. 3(35). С. 88 – 97.

46. Дурнев В. Г. К проблеме разрешимости для уравнений с одним коэффициентом. // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 6. С. 832 – 845.

47. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях в свободных группх, разрешенных относительно неизвестных, с ограничениями на решения // Чебышевский сборник. 2012. Т. XIII, вып. 1(41). С. 63 – 80.

48. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. NP-трудность проблемы разрешимости для уравнений с простой правой частью в свободной группе // Чебышевский сборник. 2012. Т. XIII, вып. 1(41). С. 46 – 53.

49. Coulbois T., Khelif A. Equations in free groups are not finitely approximable // Proceedihgs of the American mathematical society. 1999. Vol. 127, № 4. P. 2435 – 2436.

50. Дурнев В. Г. Об уравнениях в свободных группах // Чебышевский сборник. 2012. Т. XIII, вып. 1(41). С. 59 – 62.

51. Дурнев В. Г. Об одном вопросе А. И. Мальцева из “Коуровской тетради” // Чебышевский сборник. 2012. Т. XIII, вып. 1(41). С. 54 – 58.

52. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. 12-е изд., перераб. и доп. Новосибирск. 1992.

53. Дурнев В. Г. О системах уравнений на свободных нильпотентных группах // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1981. С. 66 – 69.

54. Мальцев А. И. Об одном соответствии между кольцами и группами // Мат. сб. 1960. Т. 50, № 2. С. 257 – 266.

55. Романьков В.А. О неразрешимости проблемы эндоморфной сводимости в свободных нильпотентных группах и в свободных кольцах // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 4. С. 457 – 471.

56. Романьков В. А. Об универсальной теории нильпотентных групп // Мат. заметки. 1979. Т. 25, № 4. С. 487 – 496.

57. Репин Н. Н. Некоторые просто заданные группы, для которых невозможен алгоритм, распознающий разрешимость уравнений // Вопросы кибернетики. Сложность вычислений и прикладная математическая логика. М., 1988. С. 167 – 174.

58. Шпильрайн В. Э. Об уравнениях в группах вида $F/\gamma_n(R)$ // Алгоритмические проблемы групп и полугрупп. Тула: Тул. гос. пед. ин-т. 1990. С. 164 – 183.

59. Дурнев В. Г. Неразрешимость проблемы эндоморфной сводимости для наборов элементов свободной нильпотентной группы // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1988. С. 56 – 63.

60. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. О фрагментах элементарных теорий свободных нильпотентных групп // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 2003.

61. Дурнев В. Г. Об уравнении Мальцева – Нильсена на свободной метабелевой группе ранга 2 // Мат. заметки. 1989. Т. 46, № 6. С. 57 – 60.

62. Мальцев А. И. Об уравнении $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ в свободной группе // Алгебра и логика. 1962. Т. 1, № 5. С. 45 – 50.

63. Мальцев А. И. О свободных разрешимых группах // ДАН СССР. 1960. Т. 130, № 3. С. 495 – 498.

64. Романьков В. А. Об уравнениях в свободных метабелевых группах // Сиб. мат. журн. 1979. Т. 20, № 3. С. 671 – 673.

65. Дурнев В. Г. Неразрешимость позитивной $\exists$-теории с одной константой свободной разрешимой группы // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1992. С. 30 – 35.

66. Мерзляков Ю. И. Позитивные формулы на свободных группах // Алгебра и логика. 1966. Т. 5, № 4. С. 25 – 42.

67. Дурнев В. Г. О проблеме Тарского для свободных групп некоторых многообразий // Сб. “Вопросы теории групп и гомологической алгебры”. ЯрГУ. Ярославль. 1990. С. 25 – 35.

68. Lawrence J. Tarski's problem for varieties of groups with commutator identity // J. Symbolic Logic. 1986. Vol. 51, № 1. P. 75 – 78.

69. Rogers P., Smith H. and Solitar D. Tarski's problem for solvable groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1986. Vol. 96, № 4. P. 668 – 671.

70. Sacerdote G. S. Almost all free products of groups have the same positive theory // J. Algebra. 1973. Vol. 27, № 3. P. 475 – 485.

71. Sacerdote G. S. Elementary properties of free groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. Vol. 178. P. 127 – 138.

72. Мальцев А. И. Об элементарных свойствах линейных групп // Некоторые проблемы математики и механики. Новосибирск, 1961. С. 110 – 132.

73. Дурнев В. Г., Казарин Л. С. Об универсальных теориях некоторых групп // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1994.

74. Дурнев В. Г. Неразрешимость некоторых ограниченных теорий групп $SL(n, Z)$ и $GL(n, Z)$ ($n \geqslant 3$) // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1994.

75. Дурнев В. Г. Об элементарных теориях целочисленных линейных групп // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 1995. Т. 59, № 5. С. 41 – 58.

76. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп, М.: Мир, 1980. 447 с.

77. Дурнев В. Г. Подгруппы с тождествами некоторых F-групп // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1998.

78. Дурнев В. Г., Зеткина О. В., Зеткина А. И. Об альтернативе Титса для подгрупп F-групп // Чебышевский сборник. 2012. Т. XV, вып. 1(49).

79. Дурнев В. Г. О ширине коммутанта групп кос B_3 и B_4 // XIX Всесоюзная алгебраическая конференция: тезисы докладов. Львов. 1987.

80. Репин Н. Н. О коммутаторных уравнениях в группах B_3 и B_4 // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: межвуз. сб. научн. трудов. Тула. 1986. С. 114 – 117.

81. Романьков В. А. О ширине вербальных подгрупп разрешимых групп // Алгебра и логика. 1982. Т. 21, № 1. С. 60 – 72.

82. Rhemtulla A. H. Commutators of certain finitely generated Solvable groups // Can. J. Math. 1961. Vol. 21, № 5. P. 1160 – 1164.

83. Rhemtulla A. H. A problem of bounded expressibility in free products // Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 1968. Vol. 64, № 3. P. 573 – 584.

84. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. О факторгруппах групп кос $B(n)$ и линейных групп $SL(n, Z)$ и $GL(n, Z)$ // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1994.

85. Дурнев В. Г. О формулах с функцией длины на свободной группе // Десятая Всесоюзная конференция по матем. логике: тезисы докладов. Ленинград. 1988. С. 56.

86. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. О позитивной теории свободной группы в сигнатуре, расширенной функцией длины // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1991. С. 25 – 29.

87. Huber-Dyson V. The Undecidability of Free Groups with a Length Function // University of Calgary, Mathematics Research Paper. 1974. № 221. P. 1 - 26.

88. Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Элементарная эквивалентность свободных произведений // Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ, № 718. Новосибирск. 1987. 20 с.

89. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Алгоритмически неразрешимые проблемы для диофантовых множеств в Π_2 // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1994.

90. Durnev V. Studying Algorithmic Problems for Free Semigroups and Groups // Lecture Notes in Computer Science. 1997. Vol. 1234. Pp. 88 – 101.

91. Дурнев В. Г. Исследование некоторых алгоритмических проблем для свободных групп и полугрупп: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: МГУ. 1997.

92. Бардаков В. Г. К теории групп кос // Математический сборник. 1992. Т. 183, № 6. С. 3–42.

93. Адян С. И., Дурнев В. Г. Алгоритмические проблемы для групп и полугрупп // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55, № 2. С. 3 – 94.

REFERENCES

1. Quine, W. 1946, "Concatenation as a basis for arithmetic", *J. Symbolic Logic*, vol. 11. pp. 105 – 114.

2. Durnev, V. G. 1970, "On positive formulas on groups", *Proc. of Math. Dept. of Tula State Pedagogical Inst., Ser. Geometry and Algebra.* [Uchtnye Zapiski Matematicheskoy Kafedry Tul'skogo Pedogogicheskogo Instituta], no. 2. pp. 215 – 241. (Russian)

3. Durnev, V. G. 1972, "On positive theory of free semigroup", *Groups and semigropus, Tula*, pp. 122 – 172 (Russian).

4. Durnev, V. G. 1973, "Positive theory of free semigroup", *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 211, no. 4. pp. 772 – 774. (Russian)

5. Durnev, V. G. 1974, "Positive formulas in free semigroups", *Siberian Mathematical Journal*, vol. 15, issue 5, pp. 796–800 (Translated from Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, vol. 15, no. 5, pp. 1131–1137) [doi: 10.1007/BF00966439]

6. Durnev, V. G. 1973, "Positive theories of free semigroups", Ph D. Thesis, *Moscow State Pedagogical Institution.* (Russian)

7. Marchenkov, S. S. 1982, "Undecidability of the positive $\forall\exists$-theory of a free semigroup", *Siberian Mathematical Journal*, vol. 23, no. 1. pp. 196 – 198. (Russian)

8. Durnev, V. G. 1995, "Undecidability of the positive $\forall\exists^3$-theory of a free semigroup", *Siberian Mathematical Journal*, vol. 36, no. 5. pp. 917–929 (Translated from: Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, vol. 36, no. 5, pp. 1067 – 1080) [doi: 10.1007/BF02112533].

9. Durnev, V. G. 2000, "Undecidability of a simple fragment of a positive theory with a single constant for a free semigroup of rank two", *Mathematical Notes*, vol. 67, no. 2, pp. 191–200. (Russian)

10. Hmelevskiĭ, Ju. I. 1971, "Equations in a free semigroup", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 107, pp. 1–270. (Russian)

11. Matiyasevich, Yu. V. 1968, "The connection between systems of equations in words and lengths with Hilbert's 10th problem", *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, vol. 8. pp. 132 – 143. (Russian)

12. Kosovskiĭ, N. K. 1972, "Certain properties of the solutions of equations in a free semigroup. Investigations in constructive mathematics and mathematical logic", *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, vol. 32, pp. 21–28, 154. (Russian)

13. Kosovskiĭ, N. K. 1972, "On sets represented as solutions of equations in words and lengths", *2nd USSR Conference on mathematical logics. Moscow. Book of abstracts*, pp. 23. (Russian)

14. Kosovskiĭ, N. K. 1974, "The solution of systems that consist simultaneously of word equations and word length inequalities", *Investigations in constructive mathematics and mathematical logic, VI (dedicated to A. A. Markov on the occasion of his 70th birthday), Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, vol. 40, pp. 24–29, 156. (Russian)

15. Durnev, V. G. 1974, "On equations in free semigroups and groups", *Mathematical Notes*, vol. 16, no. 5. pp. 717 – 724. (Russian)

16. Büchi, J. R. & Senger, S. 1988, "Definability in the existential theory of concatenation and undecidable extensions of this theory", *Z. Mat. Log. und Grundl. Math.*, vol. 34, no. 4. pp. 337 – 342.

17. Büchi, J. R. & Senger, S. 1986/87, "Coding in the existential theory of concatenation", *Arch. Math. Logik Grundlag.*, vol. 26, pp. 101 – 106.

18. Senger, S. 1982, "The Existential Theory of concatenation", Ph. D. Dissertation, *Purdue University.*

19. Durnev, V. G. 1977, "On some equations on free semigropus", *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'.* pp. 57 – 59. (Russian)

20. Makanin, G. S. 1977, "The problem of the solvability of equations in a free semigroup", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 233, no. 2, pp. 287 – 290. (Russian)

21. Makanin, G. S. 1977, "The problem of solvability of equations in a free semigroup", *Math. USSR Sb.*, vol. 32. no. 2, pp. 129–198. (Translated from: Math. Sbornik. 1977. Vol. 103(145), no. 2(6). P. 147–236.) [doi:10.1070/SM1977 v032n02ABEH002376]

22. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2003, "On equations in free semigroups with certain constraints on their solutions", *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'.* (Russian)

23. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2008, "Equations with language constraints to their solutions in free monoids", *Mathematics, cybernetics, informatics — Prof. A. Yu. Levin Memorial Conference. Yaroslavl' State University.*, pp. 93 – 99. (Russian)

24. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2008, "On equations in free semigroups with certain constraints on their solutions", *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI (Proc. of St.-Petersburg branch of V. A. Steklov Math. Inst.), St.-Petersburg.*, vol. 358, pp. 120 – 129. (Russian)

25. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2008, "On equations in free semigroups with certain constraints to their solutions" , *Journal of Mathematical Sciences.*, vol. 158, no. 5, pp. 671 – 676. (Translated from Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI, Vol. 358, 2008, pp. 120-–129) [doi:10.1007/s10958-009-9409-z]

26. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2010, "Equations with subsemigroup constraints to their solutions in free semigroups " , *Chebyshevskii Sb.*, vol. XI, issue 3(35), pp. 78 – 87. (Russian)

27. Durnev, V. G. 1991, "On equations with endomorphisms in free semigroups and groups" , *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'.*, pp. 30 – 35. (Russian)

28. Durnev, V. G. 1992, "Equations with endomorphisms in free semigroups" , *Diskret. Mat.*. vol. 4, no. 2, pp. 136 – 141. (Russian)

29. Durnev, V. G. 1992, "On equations in words and lengths with endomorphisms" , *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika).* vol. 36, no. 8, pp. 26 – 30. (Russian)

30. Whitehead, J. H. C. 1936, "On equivalent sets of elements in a free group" *Proc. London Math. Soc.*, vol. 37, pp. 782 – 800.

31. Durnev, V. G. 2003, "NP-completeness of the problem of endomorphic reducibility for elements of a free semigroup of an countable rank" , *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'.* (Russian)

32. Schupp, P. E. 1969, "On the substitution problem for free groups" , *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 23, no. 2, pp. 421 – 423.

33. Edmunds, C. C. 1975, "On the endomorphisms problem for free group" , *Com. Algebra.*, no. 3, pp. 7 – 20.

34. Lyndon, R. C. 1960, "Equations in free groups" , *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 96, pp. 445 – 457.

35. Lyndon, R. C. 1966, "Dependence in groups" , *Colloq. Math.*, no. 4, pp. 275 – 283.

36. Hmelevskiĭ, Ju. I. 1971, "Systems of equations in a free group I" , *Math. USSR-Izv.*, vol. 5, no. 6, pp. 1245 –1276. (Translated from Izv. AN USSR. Ser. Mathem. 1971. Vol. 35, no. 6. P. 1237–1268.) [doi:10.1070/IM1971v005n06ABEH001234]

37. Makanin, G. S. 1983, "Equations in a free group" , *Math. USSR-Izv.*, vol. 21, no. 3, pp. 483–546. (Translated from Izv. AN USSR. Ser. Mathem. 1982. Vol. 46, no. 6. P. 1199 – 1274.) [doi:10.1070/IM1983v021n03ABEH001803]

38. Makanin, G. S. 1985, "Decidability of the universal and positive theories of a free group" , *Math. USSR-Izv.*, vol. 25, no. 1, pp. 75–88. (Translated from Izv. AN USSR. Ser. Mathem. 1984. Vol. 48, no. 4. P. 735 – 749.) [doi:10.1070/IM1985v025n01ABEH001269]

39. Razborov, A. A. 1984, "Systems of equations in a free group" , *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 48, no. 4, pp. 779 – 832. (Russian) [URL:http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=755958]

40. Malkhasyan, A. Sh. 1986, "On solvability in subgroups of equations in a free group" , *Applied mathematics.* Issue 2, pp. 42 – 47. (Russian)

41. Durnev, V. G. 1990, "On one generalization of the Problem 9.25 from the “Kourovka notebook”" , *Mathematical Notes.*, vol. 47, no. 2, pp. 117–121. (Translated from Matematicheskie Zametki. 1990. Vol. 47, no. 2. P. 15 – 19.) [doi:10.1007/BF01156819]

42. Durnev, V. G. 1993, "Equations with constraints on the solution in free groups" , *Mathematical Notes.*, vol. 53, no. 1, pp. 26—29. (Translated from Matematicheskie Zametki. Vol. 53, no. 1. P. 36 – 40.) [doi:10.1007/BF01208519]

43. Durnev, V. G. 1995, "On equations with subgroup constraints on solutions in free groups " , *Discrete Math. Appl.*, vol. 5, no. 6, pp. 567—575. (Translated from: Diskret. Mat. 1995. Vol. 7. no. 4, 60–67.) [doi:10.1515/dma.1995.5.6.567]

44. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2006, "On equations with subgroup constraints on solutions in free groups" , *Mathematics in Yaroslavl' University (30th aniversary of Math. Faculty). Yaroslavl'*, pp. 181 – 200. (Russian)

45. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2010, "On some equations with with constraints to their solutions" , *Chebyshevskii Sb.*, vol. XI, issue 3(35), pp. 88 – 97. (Russian)

46. Durnev, V. G. 1996, "On the solvability problem for equations with a single coefficient" , *Mathematical Notes.*, vol. 59, no. 6, pp. 601–610. (Translated from Matematicheskie Zametki, 1996. Vol. 59. no. 6. P. 832 – 845). [doi:10.1007/BF02307209]

47. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2012, "On the equations resolved with respect to variables in free groups with constraints to the solutions" , *Chebyshevskii Sb.*, vol. XIII, issue 1(41), pp. 63 – 80. (Russian)

48. Durnev V. G. & Zetkina, O. V. 2012, "NP-complexity of the decidability problem for the equations with right-hand-side in a free group" , *Chebyshevskii Sb.*, vol. XIII, issue 1(41), pp. 46 – 53. (Russian)

49. Coulbois, T. & Khelif, A. 1999, "Equations in free groups are not finitely approximable", *Proceedihgs of the American mathematical society.*, vol. 127, no. 4, pp. 2435 – 2436.

50. Durnev, V. G. 2012, "On equations in free groups", *Chebyshevskii Sb.*, vol. XIII, issue 1(41), pp. 59 – 62. (Russian)

51. Durnev, V. G. 2012, "On one A. I. Mal'cev's question from the "Kourovka notebook"", *Chebyshevskii Sb.*, vol. XIII, issue 1(41), pp. 54 – 58. (Russian)

52. Mazurov, V. D. & Khukhro, E. I. (Eds) 2014, "Kourovka notebook (non-solved problems of the group theory). Ed.18th", *Novosibirsk.* (Russian)

53. Durnev, V. G. 1981, "On systems of equations on free nilpotent groups", *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'*, pp. 66 – 69. (Russian)

54. Mal'cev, A. I. 1960, "Some correspondences between rings and groups", *Math. Sbornik (N.S.)*, vol. 50(92), no. 2, pp. 257 – 266. (Russian) [URL:http://mi.mathnet.ru/msb4792]

55. Roman'kov, V. A. 1977, "Unsolvability of the endomorphic reducibility problem in free nilpotent groups and in free rings" *Algebra and Logic.*, vol. 16, no. 4, pp. 310 – 320. (Translated from Algebra i Logika. 1977. Vol. 16, no. 4. P. 457 – 471). [doi:10.1007/BF01669283]

56. Roman'kov, V. A. 1979, "Universal theory of nilpotent groups", *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR.*, vol. 25, no. 4, pp. 253 – 258. (Translated from Matematicheskie Zametki. 1979. Vol. 25, no. 4. P. 487 – 496). [doi:10.1007/BF01688474]

57. Repin, N. N. 1988, "Some simply defined groups without a decidability-testing algorithm", *Cybernetics, Calculation Complexity and Applied Mathematical Logics. Moscow.*, pp. 167 – 174. (Russian)

58. Spielrein, V. E. 1990, "On equations in the groups of $F/\gamma_n(R)$ type" *Algorithmic problems of groups and semigroups. Tula.*, pp. 164 – 183. (Russian)

59. Durnev, V. G. 1988, "Undecidability of endomorphic reducibility problem for sets of elements of a free nilpotent group", *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'.*, pp. 56 – 63. (Russian)

60. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2003, "On fragments of elementary theories of free nilpotent groups", *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'.* (Russian)

61. Durnev, V. G. 1989, "The Mal'tsev-Nielsen equation in a free metabelian group of rank two" , *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR.*, vol. 46, Issue 6, pp. 927–929. (Translated from Matematicheskie Zametki, vol. 46, No. 6, pp. 57–60, December, 1989) [doi:10.1007/BF01158628]

62. Maltsev, A. I. 1962, "On the equation $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ in a free group" , *Algebra i Logika.*, vol. 1, no. 5, pp. 45 – 50. (Russian)

63. Maltsev, A. I. 1960, "On free decidable groups" , *USSR Doklady Ser. Math.*, vol. 130, no. 3, pp. 495 – 498. (Russian)

64. Roman'kov, V. A. 1979, "Equations in free metabelian groups" , *Siberian Mathematical Journal.*, vol. 20, no. 3, pp. 469–471. (Translated from Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, vol. 20, No. 3, pp. 671—673, 1979) [doi:10.1007/BF00969959]

65. Durnev, V. G. 1992, "Undecidability of a positive ∃-theory with one constant for a free solvable group" , *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'.*, pp. 30 – 35. (Russian)

66. Merzlyakov, Yu. I. 1966, "Positive formulae on free groups" , *Algebra i Logika.*, vol. 5, no. 4, pp. 25 – 42. (Russian)

67. Durnev, V. G. 1990, "On Tarski problem for free groups of some manifolds" , *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'.*, pp. 25 – 35. (Russian)

68. Lawrence, J. 1986, "Tarski's problem for varieties of groups with commutator identity" , *J. Symbolic Logic.*, vol. 51, no. 1, pp. 75 – 78.

69. Rogers, P., Smith, H. & Solitar, D. 1986, "Tarski's problem for solvable groups" , *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 96, no 4, pp. 668 – 671.

70. Sacerdote, G. S. 1973, "Almost all free products of groups have the same positive theory" , *J. Algebra.*, vol. 27, no. 3, pp. 475 – 485.

71. Sacerdote, G. S. 1973, "Elementary properties of free groups" , *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 178, pp. 127 – 138.

72. Maltsev, A. I. 1961, "On elementary properties of linear groups" , *Problems of Mathematics and Mechanics. Novosibirsk.*, pp. 110 – 132. (Russian)

73. Durnev, V. G. & Kazarin, L. S. 1994 , "On unversal theories of some groups" , *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'.* (Russian)

74. Durnev, V. G. 1994, "Undecidability of some bounded theories of групп $SL(n, Z)$ and $GL(n, Z)$ $(n \geqslant 3)$ groups" , *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'.* (Russian)

75. Durnev, V. G. 1995, "On elementary theories of integer linear groups" , *Izvestiya: Mathematics*, vol. 59, no. 5, pp. 919–934. [doi:10.1070/IM1995v059n05ABEH000040]

76. Lyndon, R. C. & Schupp, P. E. 2001, "Combinatorial Group Theory" , *Springer.* 339 p.

77. Durnev, V. G. 1998, "Semigroups with identities of some F-groups" , *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'.* (Russian)

78. Durnev, V. G., Zetkina, O. V. & Zetkina, A. I. 2014, "On the Tits' alternative for subgroups of F-groups" , *Chebyshevskii Sb.*, vol. 15, issue 1(49), pp. 110—120. (Russian). [URL:http://mi.mathnet.ru/eng/cheb15]

79. Durnev, V. G. 1987, "On width of the commutant of B_3 и B_4 braid groups" , *XIX USSR algebraic conference. Book of abstracts. L'vov.* (Russian)

80. Repin, N. N. 1986, "On commmutator equations in B_3 and B_4 groups" , *Algorithmic problems of group and semigroup theory. Tula.*, pp. 114 – 117. (Russian)

81. Roman'kov, V. A. 1982, "Width of verbal subgroups in solvable groups" , *Algebra and Logic.*, vol. 21, no. 1, pp. 41–49. (Translated from Algebra i Logika, Vol. 21, no. 1, pp. 60–72, 1982). [doi:10.1007/BF01987820]

82. Rhemtulla, A. H. 1961, "Commutators of certain finitely generated Solvable groups" , *Can. J. Math.*, vol. 21, no. 5, pp. 1160 – 1164.

83. Rhemtulla, A. H. 1968, "A problem of bounded expressibility in free products" , *Proc. of the Cambridge Phil. Soc.*, vol. 64, no. 3, pp. 573 – 584.

84. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 1994, "On factor-groups of $B(n)$ braids and linear $SL(n, Z)$ and $GL(n, Z)$ groups" , *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'.* (Russian)

85. Durnev, V. G. 1988, "On formulae with a length function on a free group" , *10th USSR Conference on math. logics. Book of abstracts. Leningrad.*, pp. 56 (Russian)

86. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 1991, "On a positive theory of a free group in a signature extended by a length function" , *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'.*, pp. 25 – 29. (Russian)

87. Huber-Dyson, V. 1974, "The Undecidability of Free Groups with a Length Function" , *University of Calgary, Mathematics Research Paper.*, no. 221, pp. 1 – 26.

88. Myasnikov, A. G. & Remeslennikov, V. N. 1987, "Elementary equivalence of free products" , *Preprint of USSR Acad. Sci. Siberian branch., Comput. Centre, Novosibirsk.*, no. 718. 20 p. (Russian)

89. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 1994, "Algoritmically undecidable problems for Diophantine sets in Π_2" , *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'.* (Russian)

90. Durnev, V. 1997, "Studying Algorithmic Problems for Free Semigroups and Groups" , *Lecture Notes in Computer Science.*, vol. 1234, pp. 88 – 101. (Russian)

91. Durnev, V. G. 1997, "Studying Algorithmic Problems for Free Semigroups and Groups": Dr. Sci. Thesis, *Moscow State University.* (Russian)

92. Bardakov, V. G. 1993, "On the theory of braid groups" , *Russian Academy of Sciences. Sbornik Mathematics.*, vol. 76, no. 1, pp. 123–153. [doi: 10.1070/SM1993 v076n01ABEH003404]

93. Adian, S. I. & Durnev, V. G. 2000, "Decision problems for groups and semigroups" , *Russian Mathematical Surveys.*, vol. 55, no. 2, pp. 207. [doi: 10.1070/ RM2000v055n02ABEH000267]

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
Поступило 6.03.2014