ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 3.

УДК 51(092) DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-318-327

Георгий Феодосьевич Вороной (1868–1908)

Долбилин Николай Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории чисел, Механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, ведущий научный сотрудник, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва.
e-mail: dolbilin@mi-ras.ru

Аннотация

Данная статья посвящена 150-летию со дня рождения выдающегося российского математика Георгия Феодосьевича Вороного.

Ключевые слова: Георгий Феодосьевич Вороной.

Библиография: 3 названия.

Для цитирования:
Н. П. Долбилин. Георгий Феодосьевич Вороной (1868–1908) // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3, с. 318–327.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 3.

UDC 51(092) DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-318-327

Georgy Feodosevich Voronoy (1868–1908)

Dolbilin Nikolay Petrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Leading researcher of Geometry and Topology Department, Steklov Mathematical Institute of RAS, Professor of Number theory Chair of Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow state University.
e-mail: dolbilin@mi-ras.ru

Abstract

This article is devoted to the 150th anniversary of the birth of the outstanding Russian mathematician Georgy Voronoi.

Keywords: Georgy Feodosevich Voronoy.

Bibliography: 3 titles.

For citation:
N. P. Dolbilin, 2018, "Georgy Feodosevich Voronoy (1868–1908)", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 318–327.

Рис. 1: Г. Ф. Вороной (28.04.1868–20.11.1908)

Введение

За свою короткую жизнь (1868–1908) Вороной опубликовал не так много, всего 12 работ: 6 больших мемуаров и 6 относительно небольших заметок. Но благодаря им, имя Георгия Феодосьевича Вороного навсегда вписано золотыми буквами в историю науки, как одного из крупнейших математиков в теории чисел, как создателя целого математического направления – геометрии чисел.

Его исследования являются на протяжении целого века определяющими для нескольких поколений математиков, а знаменитые "диаграммы Вороного" стали инструментом исследований не только в математике и вычислительной геометрии, но и в физике, в геологии и кристаллографии, в биологии и компьютерной графике, повсюду, даже в кинематографе.

Имя Вороного входит в названия тысяч и тысяч опубликованных научных работ.

1. Детство

Георгий Феодосьевич Вороной родился 16(28) апреля 1868 г. в украинской семье в имении своего отца — в селе Журавка, расположенном в очень живописном уголке Полтавской губернии Российской империи, теперь Черниговской области Украины. Отец — Феодосий Вороной получил филологическое образование в Киевском университете, преподавал русскую литературу в Нежинском лицее, затем работал директором гимназий в Кишиневе, Бердянске, Прилуках. Он был активным деятелем народного просвещения, инициатором открытия воскресных школ.

Георгий Вороной начал учиться в Бердянской гимназии, а закончил Прилукскую в 1885 г. Благодаря дневнику, который Вороной вел на русском языке, мы знаем, что детство протекало в очень теплой семейной атмосфере. У мальчика было несколько увлечений: музыка (мальчик играл на двух инструментах: фортепьяно и флейте), шахматы, самодеятельный театр (участие в спектаклях) и даже охота.

В гимназии Георгий Вороной выделялся среди сверстников глубоким интересом к наукам и незаурядными способностями к математике. Огромное влияние на общее развитие Вороного, в том числе и на развитие его математического дарования, оказал учитель математики Иван Владимирович Богословский. Влияние этого замечательного педагога на литературные пристрастия Георгия сказывались даже в университете.

Вороной как и все студенты того времени был увлечен Л. Н. Толстым, интересовался описаниями русской жизни в произведениях "В лесах" и "На горах" П. И. Мельникова-Печерского, но поначалу был несколько равнодушен к творчеству Салтыкова-Щедрина. И только впоследствии, под влиянием своего любимого учителя математики, который сам любил сатиру Щедрина, Вороной стал почитателем выдающегося сатирика.

В 1884 г. профессор Киевского университета В. П. Ермаков начал издавать "Журнал элементарной математики", в котором были предложены темы для ученических работ по математике. На одну из тем, именно "Разложение многочленов на множители, основанное на свойствах корней квадратных уравнений", единственная работа была представлена Вороным. Работа понравилась Ермакову и он опубликовал ее в своем журнале в 1885 г.. В этом же году Вороной закончил гимназию и поступил в Петербургский университет.

2. Петербургский университет

В университете Георгий приступил к изучению математических курсов, усердно посещал курсы лекций "по чистой математике, которые все более увлекали" его. В его дневнике мы читаем: "Лекции профессора Сохоцкого по специальному курсу высшей алгебры я предпочитаю всем остальным". Наряду с этим Вороной изучает курс алгебры Серре, теорию двойничных форм по книге Фаа-ди-Бруно, работы Чебышева по теории чисел.

В бытовом отношении жизнь студента Вороного складывалась достаточно трудно. Той помощи, которую мог оказывать ему отец, явно не хватало. После выхода отца в отставку в 1887 году и эта помощь сократилась. Георгий вынужден был давать за небольшие деньги уроки, которые его выматывали, а тяжелые условия в общежитии дополнительно осложняли и отдых и занятия математикой. В дневнике Вороной описывает тяжелую атмосферу недоверия и подозрительности, которая воцариласьв стенах университета в связи с "уваровским указом" от 1884 г., подчинившим университетскую жизнь полицейскому надзору. Эта атмосфера стала еще тяжелей в связи с участием нескольких студентов университета в покушении на Александра III в марте 1887 г..

Условия жизни не только мало способствовали занятиям наукой, но, к сожалению, и негативно сказались на здоровье Вороного. Тем не менее, несмотря на это, а в некоторой степени, вследствие этих тяжелых условий, Вороной предельно сконцентрировался на математике. "Главное, что меня занимает, есть ли у меня достаточно способностей", — читаем в его дневнике. К счастью, математических способностей у Вороного было в избытке, а "постоянно усиливающася страсть к математике" охватывает его всецело. В "моменты, когда ум охватывает идею, которая раньше как мячик ускользала, я забываю, что я существую", — записывает в дневнике Вороной в 1887 г. Там же он продолжает: "моими последними успехами я обязан привычке мыслить без пера и бумаги. Все предложения, доказанные мною, возникали совершенно независимо.... Я надеюсь, что эта привычка мыслить таким образом сослужит мне службу."

Чтобы развивать способности, Вороной устраивал себе математический, как говорят сейчас, тренинг: последовательно решал трудные учебные задачи на взятие определенных интегралов, на вычисление сложных симметрических функций, на интегрирование дифференциальных уравнений.

Серьезное научное исследование проведено в его кандидатской диссертации (аналог дипломной работы), над которой Вороной работал на старших курсах под руководством академика Андрея Андреевича Маркова (старшего). В ней Вороной, в частности, доказал теорему, обобщающую известную теорему Адамса о бернуллиевых числах. Эта весьма остроумная работа очень понравилась Маркову и он горячо рекомендовал работу к опубликованию. Однако чрезвычайно требовательный к себе и к своей работе Вороной продолжал некоторое время улучшать рукопись. Первая статья Вороного "О числах Бернулли" появилась на свет в 1890 г. в "Сообщениях Харьковского математического общества".

К окончанию в 1889 г. университета Вороной стал профессиональным математиком, сосредоточившим свое внимание на теории чисел. Он был оставлен при университете "для подготовки к профессорскому званию" (что в некоторой степени соответствует нынешней аспирантуре). Тема магистерской диссертации (в дореволюционной России — это аналог нашей кандидатской диссертации), выполненной под руководством А. А. Маркова, "О целых алгебраических числах, зависящих от корня неприводимого уравнения 3-й степени". Диссертация содержала подробное исследование основных алгоритмических вопросов в теории кубических полей. Диссертация была успешно защищена в Петербургском университете в 1894 году.

3. Варшавский университет

После успешной защиты диссертации Вороной был назначен профессором математики Императорского Варшавского университета (Царство Польское после Венского конгресса 1815 г. до 1915 г. входило в состав Российской империи) по кафедре чистой математики. В Варшавском университете Вороной работал с небольшим перерывом до конца жизни. Здесь он познакомился и подружился с профессором математики и механики Николаем Борисовичем Делоне и его семьей, который в то время работал в Варшавском политехническом институте. Таким образом, сын Н. Б. Делоне, Борис Делоне познакомился с Георгием Феодосьевичем будучи подростком. Борис Николаевич любил рассказывать, как Вороной приходил к ним в гости и допоздна засиживался за беседой с его отцом. Хотя Вороной не был и не мог быть научным руководителем Б. Н. Делоне, поскольку Вороной умер в 1908 г., когда Борис Делоне поступил в Киевский университет), его влияние на творчество Делоне оказалось очень значительным.

Исследования по теории алгебраических чисел 3-й степени, начатые в магистерской диссертации, были продолжены Вороным. И это вполне объяснимо, так как интерес к теории алгебраических чисел был в центре внимания чебышевской школы начиная с 1860 гг.. Теории алгебраических чисел был посвящен ряд работ Е. И. Золотарева, А. А. Маркова, Ю. В. Сохоцкого. Вороной заинтересовался вопросом вычисления основных единиц общего кубического поля как случая отрицательного, так и положительного дискриминанта. Полученные Вороным результаты составили содержание его докторской диссертациии „Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей". В этой очень важной работе Вороной предложил метод, решающий для кубических полей вопросы, аналогичные тем, что в свое время были решены для квадратичных полей при помощи непрерывных дробей Эйлером, Лагранжем и другими.

В принципе, не только вопрос существования основных единиц алгебраического поля, но и проблема их вычисления решаются знаменитой теоремой Дирихле. Однако конечный перебор всевозможных вариантов на том пути, который вытекает из теоремы Дирихле, настолько колоссален, что не оставлял никакой надежды на то, чтобы им можно было воспользоваться на практике. В докторской диссертации Вороной предложил эффективный метод для вычисления основных единиц кубического поля, который можно было реализовать в каждом конкретном случае.

Как вспоминал Д. Граве со слов А. А. Маркова, этот результат настолько поразил Маркова, что тот послал Вороному телеграмму в Варшаву с просьбой срочно приехать в Петербург. Как только Вороной появился в кабинете своего научного руководителя, Марков предложил ему найти основную единицу для кубического уравнения $t^3 = 1$, которая была найдена Марковым самим при помощи сложных, весьма искуственных вычислений. Насколько же был удивлен Марков, когда Вороному понадобилось всего три часа, чтобы посредством своего алгоритма найти искомую единицу.

В этой диссертации, по мнению Делоне, Вороной "мыслил геометрически". Но рассуждая геометрически, Вороной вынужден был переводить ход своих рассуждений на арифметический язык, так как руководители Петербургской школы и особенно Марков, основной оппонент по диссертации, не приветствовали геометрический характер изложения, и диссертацию, написанную на геометрическом языке, могли бы не пропустить. Докторская диссертация была блестяще защищена Вороным в 1897 году в Петербургском университете. Петербургская Академия наук за цикл работ по алгебраической теории чисел, вошедших в магистерскую и докторскую диссертации, отметила Вороного престижной премией имени Буняковского.

Впоследствии эта работа оказала большое влияние на исследования Б. Н. Делоне по диофантовым уравнениям третьей степени. Геометризации алгоритма Вороного были посвящены работы Б. Н. Делоне, а также часть известной монографии Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеева "Теория иррациональностей третьей степени". Диссертация Вороного была напечатана только по-русски, отчасти поэтому ее результаты долго оставались мало известными заграницей и некоторые из них переоткрывались на протяжении десятилетий.

Помимо глубоких исследований по алгебраической теории чисел и геометрии квадратичных форм, Вороной в стенах Варшавского университета выполнил принципиальную работу по аналитической теории чисел. В 1903 г. он опубликовал большую работу „Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques", посвященную исследованию задачи о делителях, поставленной Дирихле. Задача о делителях состоит в оценивании для больших n суммы

$$S_n = \tau(1) + \tau(2) + \cdots + \tau(n),$$

где $\tau(k)$ — число делителей числа k. Так как $S(n)$, очевидно, равно количеству точек (x, y) с целыми положительными координатами, для которых $xy \leq n$, эту работу Вороного упоминают, как работу о числе целых точек под гиперболой.

В своей работе 1849 г. Дирихле получил для $S(n)$ следующую формулу:

$$S(n) = n(\log n + 2C - 1) + K_n\sqrt{n}, \tag{1}$$

где $C = 0,57721...$ — эйлерова константа и значение $|K_n|$ при $n \to \infty$ ограниченно при $n \to \infty$.

В дальнейшем на протяжении полувека многочисленные усилия известных математиков, направленные на уточнение порядка остаточного члена, оставались безуспешными. И только в 1903 г. Г. Ф. Вороной, основательно развив метод Дирихле, в результате сложных вычислений улучшил порядок остаточного члена в формуле (1) для $S(n)$:

$$S(n) = n(\log n + 2C - 1) + \theta_n \sqrt[3]{n} \log n, \tag{2}$$

где θ_n ограниченно при $n \to \infty$.

Работа Вороного оказала влияние на работы других замечательных математиков в теории чисел. В. Серпинский, будучи студентом Вороного, применил метод Вороного к задаче о числе $A(n)$ целых точек (x, y) в круге $x^2 + y^2 \leq n$ и получил следующую формулу:

$$A(n) = \pi \cdot n + \theta'(n) \cdot \sqrt[3]{n}.$$

Эта работа Г. Ф. Вороного по аналитической теории чисел также, как отмечает Б. Н. Делоне, послужила одним из отправных пунктов для творчества Ивана Матвеевича Виноградова и ряда других выдающихся математиков.

4. Геометрия квадратичных форм: последние мемуары Вороного

В 1904 г. Г. Ф. Вороной участвовал в работе Международного конгресса математиков в Гейдельберге, где встречался с Г. Минковским. Б. Н. Делоне, которому в том году шел 15-й год, тоже был вместе с отцом на Конгрессе. Б. Н. Делоне рассказывал, что, по словам отца, Минковский отнесся к Вороному с огромным интересом и величайшим уважением.

Вопросы геометрии чисел интересовали Вороного к тому времени уже на протяжении почти десятка лет. Но в 1904 г. Вороной вплотную приступает к циклу исследований по геометрии чисел под общим названием "Nouvelles applications des paramèters continus à la thèorie des formes quadratiques" ("Новые приложения непрерывных параметров к теории квадратичных форм"), посвященный крупным проблемам в теории квадратичных форм, как положительных так и неопределенных. В действительности, как писал в 1908 году Вороной редактору журнала Crelle, последний мемуар — работа о параллелоэдрах —, была результатом 12-летних исследований.

В рамках этого проекта Вороной проводит исследования по геометрии положительных квадратичных форм, в том числе и по теории параллелоэдров. Результаты этих основополагающих в геометрии чисел исследований были опубликованы в двух больших мемуарах: „Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites" ("О некоторых свойствах квадратичных положительных совершенных форм", Crelle, Bd. 133, (1907)) и „Recherches sur les paralleloedres primitifs" ("Исследования о примитивных параллелоэдрах", Crelle, Bd 134 (1908), 136(1909)). Публикация второй части последнего мемуара завершилась посмертно.

Благодаря этим фундаментальным исследованиям по геометрии квадратичных форм Г. Ф. Вороной признан наряду с Минковским основоположником геометрии чисел.

Метод непрерывных параметров к исследованию положительных квадратичных форм первым ввел в рассмотрение Ш. Эрмит для нахождения формы от n переменных с наибольшим арифметическим минимумом $\mu(n)$. Эта задача эквивалентна геометрической задаче о нахождении плотнейшей решетчатой упаковки n-мерного евклидова пространства равными шарами, другими словами, задачи о плотнейшем расположении равных шаров, при условии, что их центры образуют целочисленную решетку.

А. Н. Коркин и Е. И. Золотарев (также выдающиеся представители Петербургской школы Чебышева) нашли значения $\mu(n)$ для $n \leq 5$. Более того, рассматривая конус положительных квадратичных форм, они ввели понятие предельной формы, то есть формы, на которой арифметический минимум достигает локального максимума. Они показали, что для предельной формы полная таблица арифметических представлений ее минимума состоит из не менее чем $\frac{(n+1)n}{2}$ элементов, причем эта таблица полностью определяет саму форму. Так как форма с наибольшим арифметическим минимумом $\mu(n)$ – одна из предельных форм, а предельных форм для каждого n, как установили Коркин и Золотарев, конечное число (с точностью до целочисленной эквивалентности), то задача нахождения абсолютного ьаксимума $\mu(n)$ сводится к перечислению всех предельных форм.

Вороной развил эту теорию до алгоритмического уровня. Он ввел понятие *совершенной формы*, как положительной формы, которая однозначно определяется таблицей представлений своих арифметических минимумов. Так как это условие является необходимым для любой предельной формы, но не достаточным, то совершенная форма является более *общей* формой, нежели предельная. Если перевести идеи Вороного на язык геометрических образов, на котором он проводил свои рассуждения, затем их "переодевая в аналитические одежды", то в основе описания совершенных форм лежит некомпактный выпуклый полиэдр Π в конусе K положительных квадратичных форм с вершинами на его границе.

Пусть K – конус положительных квадратичных форм $f = \Sigma_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ от n. Гео размерность равна $N = \frac{n(n+1)}{2}$. Граница ∂K конуса K состоит из тех квадратичных форм, соответствующих симметричным матрицам (a_{ij}), у которых все главные миноры неотрицательны и хотя бы один из них равен 0. Пусть $(q_1, \ldots, q_n)$ – ненулевой набор целых чисел, не имеющих общего делителя, и пусть $q(x_1, \cdots, x_n) = (q_1x_1 + \cdots + q_nx_n)^2)$ -вырожденная неотрицательная квадратичная форма ранга 1. Форма $q(x)$ лежит на границе ∂K. Пусть Q – множество таких форм, построенных для всевозможных ненулевых наборов $(q_1 \ldots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$ без общих множителей. Выпуклая оболочка $\mathrm{conv}(Q)$ есть полиэдр П, введенный в рассмотрение Вороным. Основное содержание мемуара Вороного состоит в изучении свойств полиэдра П. Исходная идея Вороного заключалась в том, что каждой гиперграни полиэдра П соответствует некоторая совершенная форма f и, обратно, всякой совершенной форме соответствует некоторая гипергрань полиэдра П. При этом коэффициенты уравнения гиперплоскости данной грани суть коэффициенты совершенной формы. Так как размерность гиперграни равна $\frac{n(n+1)}{2} - 1$, то количество вершин у гиперграни

$$(q_{1s}^2, q_{2s}^2, \ldots, q_{ns}^2, q_{1s} \cdot q_{2s}, \ldots, q_{n-1\,n})$$

не меньше $\frac{n(n+1)}{2}$, а соответствующие целочисленные наборы

$$(q_{1s}, q_{2s}, \cdots, q_{ns})$$

составляют таблицу арифметических представлений минимума формы f.

Для каждого n среди совершенных форм от n переменных имеется т.н. главная совершенная форма

$$x_1^2 + x_2^+ \cdots + x_n^2 + x_1x_2 + \cdots x_{n-1}x_n.$$

Далее Вороной описал как, исходя из соответствующей главной гиперграни полиэдра П и последовательно переходя из одной гиперграни через грани коразмерности 2 в соседние, можно обойти за конечное число шагов все (с точностью до целочисленной эквивалентности) гиперграни полиэдра. Возможность таких переходов в соседние гиперграни Вороной аккуратно обосновал посредством метода непрерывных параметров. Среди конечного числа найденных попарно неэквивалентных совершенных форм содержатся все предельные формы для данного n, из которых можно выделить квадратичную форму с максимальным значением $\mu(n)$ (вообще говоря, таких форм может быть несколько).

Последний мемуар, посвященный теории параллелоэдров, состоит из двух частей. Вторая часть мемуара вышла в свет после смерти Вороного. Стоит отметить, что над теорией параллелоэдров Вороной начал работать задолго до упомянутой встречи с Минковским. По мнению и самого Вороного и других специалистов, в частности, по мнению Делоне, мемуар по теории параллелоэдров является наиболее глубоким из всех исследований, что были проведены Вороным. Так как в мемуаре изучается особый класс многогранников, то, несмотря на аналитический характер изложения, в этой работе мы встречаем геометрические термины: симплексы, грани, разбиения пространства на многогранники и т.д. Параллелоэдр размерности n – это выпуклый евклидов многогранник, параллельными копиями которого, приложенными друг к другу по целым общим граням, можно разбить n-мерное евклидово пространство, то есть заполнить пространство без пропусков и попарных перекрытий.

Понятие 3-мерного параллелоэдра было введено Е. С. Федоровым в связи с потребностями кристаллографии. Он нашел все пять комбинаторных типов трехмерных параллелоэдров.

Для произвольного n Минковский доказал, что n–мерный параллелоэдр – центрально симметричный многогранник с центрально симметричными гранями. Нетрудно также показать, что любое нормальное, то есть грань-в-грань, разбиение пространства на параллелоэдры транзитивно относительно группы трансляций. Отсюда следует, что центры параллелоэдров образуют целочисленную решетку. Из этого факта Минковский вывел, что число гиперграней в параллелоэдре не превышает $2(2^n-1)$, откуда следует конечность числа комбинаторных параллелоэдров для каждой размерности.

В мемуаре исследуется проблема перечисления комбинаторных типов параллелоэдров данной размерности. Вороной рассматривает область Дирихле относительно точек решетки, другими словами то, что теперь называют областью Вороного. Области Дирихле-Вороного для решеток являются параллелоэдрами, но параллелоэдрами особого вида, носящими теперь имя Вороного.

В первой части мемуара проблема перечисления произвольных параллелоэдров отчасти сводится к проблеме перечисления параллелоэдров Вороного. Вороной вводит понятие примитивного параллелоэдра, как такого параллелоэдра, что в каждой вершине разбиения n-мерного пространства сходится минимально возможное число (то есть $n+1$) параллелоэдров. Центральный результат первой части – доказательство теоремы о том, что всякий примитивный параллелоэдр аффинно эквивалентен некоторому параллелоэдру Вороного. Тем самым нахождение типов примитивных параллелоэдров Вороной свел к нахождению типов примитивных параллелоэдров Вороного. Эта часть мемуара – очень глубокое исследование, в котором некоторые геометрические идеи (например, принцип Ампера), примененные до него в двумерном случае, Вороной развил для случая многих измерений.

Вороному принадлежит также плодотворная идея подъема разбиения Дирихле-Вороного n-мерного пространства на параболоид вращения в $(n+1)$-мерном пространстве. В 1980-е гг. эта идея была переоткрыта и использована в вычислительной геометрии как инструмент сведения задачи вычисления диаграмм Вороного и триангуляций Делоне для дискретных точечных множеств к задаче вычисления выпуклой оболочки поднятого на параболоид множества точек.

Вороной показал, что всякому разбиению n-мерного пространства на примитивные параллелоэдры соответствует $(n+1)$-мерный полиэдр, описанный около эллиптического параболоида. Аффинное преобразование, переводящее эллиптический параболоид в параболоид вращения, переводит примитивный параллелоэдр разбиения в параллелоэдр Вороного. Вороной выдвинул следующую гипотезу: *всякий параллелоэдр аффинно эквивалентен некоторому параллелоэдру Вороного.*

Во второй части мемуара Вороной исследует вопрос о нахождении комбинаторных типов параллелоэдров Вороного, то есть, повторяем, областей Дирихле-Вороного для целочисленных решеток. Целочисленные решетки "живут" в конусе K положительных квадратичных форм. Вороной устанавливает, что примитивным параллелоэдрам того или иного комбинаторного типа соответствуют формы, составляющие так называемую область данного типа – $\frac{n(n+1)}{2}$-мерный конус с вершиной в вершине в конусе K. Вороной показывает, что каждая область типа представляет собой многогранный угла с конечным числом гиперграней. Эти многогранные области типа, прилегая друг к другу по целым гиперграням, разбивают весь конус K.

Для нахождения всех примитивных типов Вороной предлагает процедуру, которая исходит от особого примитивного параллелоэдра, соответствующего так называемой области I типа. Кстати этот особый параллелоэдр является многогранником, хорошо известным в наше время под названием перестановочный многогранник или пермутоэдр. Переходя из области I типа через гипергрань в смежную область типа, мы получаем, вообще говоря, другой тип параллелоэдра. Вороной описывает характер перестройки комбинаторного типа параллелоэдра, происходящей при переходе через ту или иную гипергрань. Переходя из одной области типа в соседнюю, получаем, вообще говоря, новые типы параллелоэдров. Вороной указывает условия, при которых можно утверждать, что на каком-то этапе список полученных типов исчерпывает все типы примитивных параллелоэдров Вороного, то есть задача нахождения всех примитивных параллелоэдров для данной размерности решена.

В этом же мемуаре Вороной опробовал свой метод для нахождения примитивных параллелоэдров для размерностей 2, 3 (ранее установленных Е. С. Федоровым), а также 4. Оказалось, что для размерности 4 помимо 4-пермутоэдра имеется еще два примитивных параллелоэдра. В 1929 г. Б. Н. Делоне нашел все 49 непримитивных параллелоэдров (на самом деле Делоне нашел 48 непримитивных и 1 пропущенный был найден М. И. Штогриным полвека спустя). В 1972 г., опираясь на метод Вороного, С. С. Рышков и Е. П. Барановский, а несколько позднее, другим методом, П. Энгел и В. П. Гришухин нашли полный список из 222 примитивных 5-мерных параллелоэдров. Недавно с помощью компьютера М. Дютур Сикирич и др. нашли все 110 244 комбинаторных типа 5-мерных параллелоэдров Вороного (против 52 типов 4-мерных параллелоэдров).

Делоне в книге "Петербургская школа теории чисел" высоко оценил этот мемуар: "Мемуар Вороного о параллелоэдрах — одно из самых глубоких исследований в области геометрии чисел во всей мировой литературе, а своеобразие методов чисто геометрической первой части накладывает на этот мемуар печать гениальности."

Подчеркнем, что несмотря на поразительную глубину метода, Вороной смог реализовать свою программу лишь для примитивных параллелоэдров. Более того, несмотря на серьезные усилия многих математиков и прогресс, достигнутый в работах Делоне, О. К. Житомирского, А. Д. Александрова, Б. А. Венкова, С. С. Рышкова и др., гипотеза Вороного об аффинной эквивалентности n-мерного параллелоэдра некоторому параллелоэдру Вороного остается открытой для $n \geq 5$ на протяжении века.

После завершения работы над вторым мемуаром о положительных квадратичных формах Вороной приступил к исследованиям по теории неопределнных квадратичных форм. Об условиях, в которых протекала эта работа, рассказывает следующая запись в дневнике: "Я делаю большие успехи в разбираемом вопросе; но в то же время здоровье мое все ухудшается и ухудшается. Вчера я первый раз получил отчетливую идею об алгорифме, который должен разрешить все вопросы рассматриваемой теории форм, и вчера же я имел сильный припадок желчной колики, который мне помешал заниматься вечером и не дал возможности заснуть всю ночь. Я так боюсь, чтобы результаты моих долгих усилий, с таким трудом добываемые, не погибли вместе со мной".

Увы, большая рукопись о неопределенных формах, которую видели друзья, посещавшие Вороного в 1908 г., не была найдена. В 1952 г. в полном трехтомном собрании трудов Вороного были опубликованы записи об исследованиях по неопределенных формах, взятые из научного дневника Георгия Феодосьевича.

5. О жизни

В Варшавском университете Вороной проработал с 1894 г. с небольшим перерывом в самом конце жизни. В связи с революционными событиями 1905-07 гг. Варшавский университет был закрыт и Вороной был направлен на работу в Новочеркасск, в только что организованный там Донской политехнический институт, где проработал в течение года в качестве декана факультета механики. За выдающиеся научные достижения Вороной был избран в 1907 г. в возрасте 39 лет членом-корреспондентом Петербургской академии наук.

Г. Ф. Вороной был женат на Ольге Митрофановне Крицкой, девушке из дворянской семьи, чье имение Богданы находилось поблизости от его Журавки. Ольга Крицкая была его большая любовь еще с юности. У них было шестеро детей. Кроме своей многочисленной семьи, Вороной заботился также о семье его рано овдовевшей сестры с семью детьми. Все дети Георгия Феодосьевича, кроме умершей в детстве одной из дочерей, получили хорошее образование и стали специалистами: врачами, учителями, хирургами. К сожалению, две старшие дочери Александра и Мария и старший сын Александр и их семьи пострадали во время сталинских репрессий. Младший сын Юрий Георгиевич Вороной (1896–1961) стал известным хирургом, доктором медицинских наук, прославился тем, что в 1933 г. сделал первую в мире пересадку почки человеку.

Г. Ф. Вороной не отличался крепким здоровьем, в последние годы страдал от прогрессирующей болезни желчного пузыря. Интенсивная научная и преподавательская работа отягощала его состояние. В последний год жизни врачи строго рекомендовали Георгию Феодосьевичу прекратить работу. Вороной и сам замечал, что напряженная работа отрицательно сказывается на здоровье, но оставить исследования он был не в состоянии. "Только моя жена знает, что математика является для меня главной целью жизни, она (математика) для меня – все".

Лето 1908 г. после года, проведенного в Новочеркасске, Георгий Феодосьевич отдыхал в милой Журавке, несмотря на рекомендации врачей поехать на лечение в Карлсбад. К концу лета ему стало легче, и к началу 1908/09 учебного года Вороной прибыл в Варшавский университет. В начале сентября пишет свое последнее письмо В. А. Стеклову, в котором кратко сообщает о своих исследованиях о параллелоэдрам, а также выражает желание перейти на должность "ординарного профессора" в Петербургском университете, где в это время образовалась вакансия в связи с только что скончавшимся профессором А. Н. Коркиным.

Однако в октябре наступило резкое обострение болезни. В оставшийся ему месяц, страдая от болей, прикованный к постели, Вороной сумел записать "Заметки по поводу последней теоремы Ферма". Через две недели, 7(20) ноября 1908 г., в возрасте сорока лет, Георгий Феодосьевич Вороной скончался. Похоронен по завещанию в его любимой Журавке.

Заключение

Глубокие фундаментальные исследования Георгия Феодосьевича Вороного, одного из самых выдающихся математиков, когда-либо работавших в теории чисел, на протяжении уже более века оказывают огромное влияние на современную теорию чисел, а поставленная им задача об аффинной эквивалентности произвольного параллелоэдра параллелоэдру Вороного является одной из центральных нерешенных проблем геометрии чисел.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г. Ф. Вороной. Собрание сочинений в 3-х томах. — Киев, 1952–1953.
2. Б. Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел. — М. 1947.
3. Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев. Теория иррациональностей третьей степени. — М. 1940.

REFERENCES

1. G. F. Voronoy, 1952–1953, Collected works in 3 volumes, Kiev.
2. B. N. Delone, 1947, "St. Petersburg school of number theory" Moscow.
3. B. N. Delone, D. K. Faddeev, 1940, "The theory of irrationalities of the third degree" Moscow.

Получено 19.09.2018
Принято к печати 15.10.2018