ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 3.

УДК 511

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-311-317

Большие пути в дистанционных графах в векторных пространствах над конечным полем

Штейников Юрий Николаевич — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Математический институт имени В. А. Стеклова, ФГУ ФНЦ Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук, г. Москва.

e-mail: yuriisht@yandex.ru

Аннотация

В статье изучается следующая задача. Пусть $E \subset \mathbb{F}_q^d$ является подмножеством d -мерного векторного пространства над конечным полем из q элементов. Мы определяем так называемый дистанционный граф на множестве E с единичным расстоянием между вершинами. Расстояние между вершинами x, y определяется так $\|x-y\| = (x_1-y_1)^2 + \dots + (x_d-y_d)^2$. Вершины дистанционного графа это элементы множества E и пара вершин $x, y \in E$ соединены ребром если расстояние между ними равно единице. В настоящей работе изучаются длинные пути в этом графе. А именно, получена нижняя оценка на длину самого большого непересекающегося пути в нем. При определенных условиях в работе доказано, что длина такого пути состоит из большинства вершин из множества E . Это дополняет результат из работы А. Иосевича и соавторов. При доказательстве мы используем некоторые комбинаторные идеи и результаты, полученные А. Иосевичем и М. Рудневым а также совместный результат М. Беннета, Дж. Чапмана, Д. Коверта, Д. Харта, А. Иосевича и Дж. Пакианатана. Основная идея построения большого пути в таком графе заключается в следующем. Мы строим много путей меньшей длины стандартными методами. Далее, основываясь на совместном результате М.Руднева и А. Иосевича о распределении расстояний между элементами множества E , мы заключаем, что существуют пара вершин у двух различных путей с расстоянием единица. Тем самым есть возможность соединить какие-то два уже построенных пути за их вершины и получить путь большей длины. Эта процедура повторяется итеративно до тех пор, пока не построится путь заданной нами длины. Отметим, что данный метод и основной результат остается верен и для так определенных дистанционных графов с любым ненулевым расстоянием.

Ключевые слова: конечные поля, расстояние, дистанционный граф, пути графа

Библиография: 4 названия.

Для цитирования:

Ю. Н. Штейников. Большие пути в дистанционных графах в векторных пространствах над конечным полем // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3, с. 311–317.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 3.

UDC 511

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-311-317

Long paths in the distance graphs in vector spaces over finite fields

Shteinikov Yuri Nikolaevich — candidat of physical and mathematical sciences, professor, Steklov Mathematical Institute of RAS, Scientific Research Institute of System Analysis, Moscow.
e-mail: yuriisht@yandex.ru

Abstract

We study the following task. Let $E \subset \mathbb{F}_q^d$, be the subset of the d - dimensional vector space over the finite field with q elements. We define so- called distance graph of the set E with distance equal to one. The distance between the vertices $x, y \in E$ is defined as follows $\|x - y\| = (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_d - y_d)^2$. The vertices of the distance graph are the elements of E and a pair of vertices $x, y \in E$ are connected by an edge if the distance between them is equal to one. In this paper long paths in the graph are studied. Namely the lower estimate for the length of the longest non-overlapping path in this graph is obtained. Under certain conditions, it is proved that the length of such path consists of the most of vertices of the set E . This complements the result from the paper of A. Iosevich and co-authors. In the proof we use some combinatoric arguments and results obtained by M. Rudnev and A. Iosevich and also joint result of M. Bennett, J. Chapman, D. Covert, D. Hart, A. Iosevich and J. Pakianathan. The main idea of constructing a long path in such a graph is as follows. We construct many paths of shorter length by standard methods. Further, based on the joint result of M. Rudnev and A. Iosevich on the distribution of distances between elements of the set E , we conclude that there exist a pair of vertices of two different paths with distance one. Thus, it is possible to connect some two paths already constructed for their vertices and get a longer path. This procedure is repeated iteratively until the path of the given length is constructed. We note that this method and the main result remains true for such distance graphs with any non-zero distance.

Keywords: finite fields, distance, distance graph, graph paths

Bibliography: 4 titles.

For citation:

Iu. N. Shteinikov, 2018, "Long paths in the distance graphs in vector spaces over finite fields", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 311–317.

1. Введение

Напомним немного что такое классический евклидов дистанционный граф на двумерной плоскости. Вершинами графа являются точки этой плоскости. Две вершины соединены ребром, если расстояние между ними равно 1. Известная проблема Хадвигера-Нелсона заключается в поиске величины хроматического числа этого графа. Мы только знаем, что ответ либо число 5, 6 или 7.

В этой работе мы рассматриваем дистанционный граф в $\mathbb{F}_q^d$, где $\mathbb{F}_q^d$ обозначает векторное пространство над конечным полем из q элементов. Вершинами этого графа являются элементы $\mathbb{F}_q^d$. Две вершины $x, y \in \mathbb{F}_q^d$ соединены ребром, если $\|x - y\| = 1$, где $\|x\| = x_1^2 + \dots + x_d^2$. Основной результат этой работы будет относиться к этому случаю.

Имеются множество результатов для этого дистанционного графа в $\mathbb{F}_q^d$, мы отсылаем читателя к статьям [2], [3], [4]. Мы берем произвольное большое подмножество E в $\mathbb{F}_q^d$ и рассматриваем дистанционный граф на множестве E .

Сначала напомним некоторые предшествующие результаты. А. Иосевич и М. Руднев доказали, что если $E \subset \mathbb{F}_q^d$, $d \geq 2$, $t \neq 0$, то

$$|\{(x, y) \in E \times E : \|x - y\| = t\}| = \frac{|E|^2}{q} + R(t), \quad (1)$$

где

$$|R(t)| \leq 2q^{\frac{d-1}{2}} |E|. \quad (2)$$

Отсюда следует, что при определенных условиях количество ребер в этом графе на множестве E приблизительно равно $\frac{|E|^2}{2q}$.

С.Д. Адхикари, Анирбан Мукхопадхуай и М. Рэм Мерти [1] также изучали количество различных расстояний определяемых множеством E . В их статье они установили, что

$$|\{\|x - y\| : x, y \in E\}| = \Omega(q),$$

при некоторых естественных предположениях и без использования оценок сумм Клоостермана. Этот факт также следует из соотношения (1), полученного М. Рудневым и А. Иосевичем.

Определения. Две вершины a и b назовем соседними если a и b соединены ребром. Набор всех соседей вершины a будем обозначать $N(a)$. Размер множества $N(a)$ будем называть степенью a и обозначать как $\deg(a)$.

Мы говорим, что последовательность вершин $v_1, \dots, v_{k+1} \in G$ образует путь длины k если для всех $0 \leq i \leq k$ вершины v_i, v_{i+1} соединены ребром. Длины пути s будем обозначаться как $|s|$. Путь длины k назовем несамопересекающимся если все v_j в определении разные. Два пути s_1, s_2 назовем непересекающимися, если они не имеют общих вершин.

Имеются ряд интересных результатов в статье [2] о распределении путей фиксированной длины k . Говоря грубо, если k находится в определенном диапазоне, то эти пути равномерно распределены, - количество таких путей приблизительно равно $|E|^{k+1}/q^k$. Сформулируем соответствующий результат из [2].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $E \subseteq \mathbb{F}_q^d$ где $d \geq 2$ и $|E| > \frac{2k}{\log 2} q^{\frac{d+1}{2}}$. Предположим что $t_i \neq 0, 1 \leq i \leq k$, и пусть $\tau = (t_1, \dots, t_k)$. Определим

$$C_k(\tau) = |\{(x^1, \dots, x^{k+1}) \in E \times \dots \times E : \|x^i - x^{i+1}\| = t_i, 1 \leq i \leq k\}|.$$

Тогда

$$C_k(\tau) = \frac{|E|^{k+1}}{q^k} + D_k(\tau),$$

где

$$|D_k(\tau)| \leq \frac{2k}{\log 2} q^{\frac{d+1}{2}} \frac{|E|^k}{q^k}.$$

Целью настоящей работы является получение нижней оценки на наибольшую длину несамопересекающегося пути в дистанционном графе на E . Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $E \subset \mathbb{F}_q^d$ и величина f определена из равенства $|E| = f q^{\frac{d+1}{2}} \log q$. Тогда имеется несамопересекающийся путь длины $|E|(1 - O(\frac{1}{f}))$ в рассматриваемом дистанционном графе на множестве E .

В следующем пункте мы формулируем предварительные утверждения. В третьем пункте мы доказываем Теорему 2.

2. Предварительные результаты

Используя результат М. Руднева и А. Иосевича - неравенство (1) – можно вывести два следующих утверждения. Мы дадим набросок их доказательств.

ЛЕММА 1. Пусть подмножества $A, B \subset \mathbb{F}_q^d, d \geq 2, A, B$ непересекаются и $|A|, |B| \geq 4q^{\frac{d+1}{2}}$. Тогда существуют $x \in A, y \in B$ такие что $\|x - y\| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим $C = A \sqcup B$. Также зададим множества

$$W_1 = \{(x, y) \in C \times C : \|x - y\| = 1\},$$

$$W_2 = \{(x, y) \in A \times A : \|x - y\| = 1\},$$

$$W_3 = \{(x, y) \in B \times B : \|x - y\| = 1\}$$

Из равенства (1) и неравенства (2) мы заключаем, что

$$|W_1| = \frac{(|A| + |B|)^2}{q} + R_1; |W_2| = \frac{|A|^2}{q} + R_2; |W_3| = \frac{|B|^2}{q} + R_3,$$

где

$$|R_1| \leq 2q^{\frac{d-1}{2}}(|A| + |B|), |R_2| \leq 2q^{\frac{d-1}{2}}|A|, |R_3| \leq 2q^{\frac{d-1}{2}}|B|.$$

Можно заметить, что $|W_1| > |W_2| + |W_3|$. Это означает, что существует пара $(a, b) \in A \times B$ такая, что $\|a - b\| = 1$. Это и завершает доказательство этой леммы.

□

Далее мы представляем следующее утверждение, которое было также отмечено в [2].

ЛЕММА 2. *Существует абсолютная константа $c > 0$ такая что если $E \subset \mathbb{F}_q^d$, $d \geq 2$ и $|E| \geq 10q^{\frac{d+1}{2}}$, тогда существует несамопересекающийся путь длины не менее $\frac{c|E|}{q}$ в рассматриваемом дистанционном графе E .*

Для доказательства этой леммы достаточно доказать такое утверждение.

Предложение Пусть $E \subset \mathbb{F}_q^d$, $d \geq 2$ и $|E| \geq 10q^{\frac{d+1}{2}}$. Существует такое множество $E' \subset E$, $|E'| = \Omega(|E|)$ со следующим свойством. Если мы рассмотрим дистанционный подграф образованный множеством E' то для каждого $x \in E'$ в этом подграфе будем иметь $\deg(x) = \Omega(|E|/q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать $\mathbf{E}$ для обозначения среднего для величины $\deg(x)$ по $x \in E$. Используя неравенство (1) мы можем заключить, что $\mathbf{E} = \Theta(|E|/q)$. Пусть K есть некоторая абсолютная константа, которая будет определена позже. Следующие рассуждения мы оформим в виде некоторого алгоритма. Определим $E_0 = E$. Предположим, что $n \geq 0$ и множество E_n уже определено. Если множество E_n образует дистанционный граф который содержит вершину x с $\deg(x) \leq \mathbf{E}/K$ мы определяем $E_{n+1} = E_n \setminus \{x\}$, и продолжаем наш алгоритм. Если нет такой вершины x , то мы завершаем наш алгоритм.

Сначала поймем, почему $|E_n| = \Omega(|E|)$ для всех n . Рассмотрим множество $A_n = E \setminus E_n$. Легко видеть, что

$$|\{(x, y) \in A_n \times A_n : \|x - y\| = 1\}| \leq 2|A_n|\mathbf{E}/K.$$

С другой стороны, если $|A_n| > 4q^{\frac{d+1}{2}}$ тогда по неравенству (1)

$$|\{(x, y) \in A_n \times A_n : \|x - y\| = 1\}| \geq \frac{|A_n|^2}{10q}.$$

Если $|A_n| > 0.9|E|$ и для подходящей большой константы K два последних неравенства противоречивы.

Когда наш алгоритм завершится мы имеем множество E_n с $|E_n| = \Omega(|E|)$. Для любого $x \in E_n$ в подграфе образованном множеством E_n мы имеем $\deg(x) = \Omega(|E|/q)$. С этим мы завершаем доказательство этого предложения. □

Теперь мы готовы доказать Теорему 2. Говоря грубо, мы будем пытаться соединять пути с помощью Леммы 1. Это будет позволять конструировать большие пути из маленьких. Это один из основных аргументов при доказательстве Теоремы 2.

3. Доказательство основного результата

Сначала мы собираемся доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть $E \subset \mathbb{F}_q^d$ и $|E| \geq Cq^{\frac{d+1}{2}} \log q$, где C какая-то большая абсолютная константа. Тогда существует несамопересекающийся путь длины $\Omega(\frac{|E|}{\log q})$ в этом дистанционном графе на множестве E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

С помощью Леммы 2 мы находим несамопересекающийся путь длины $\Omega(\frac{|E|}{q})$. Рассмотрим множество E без вершин этого пути и снова используем Лемму 2, и так далее. Действуя таким образом мы можем образовать некоторое число несамопересекающихся путей и не имеющих между собой общих вершин которые вместе содержат не менее $|E|/2$ вершин из множества E . Мы можем считать, что длина каждого такого пути не меньше чем $l = c|E|/q$, где $c > 0$ какая-то абсолютная константа. Обозначим через S множество этих путей. Далее мы будем делать некоторые трансформации с этими путями, однако для краткости будем обозначать замещающие множества путей той же буквой S . Следующие рассуждения представляют из себя некоторый алгоритм. Будем выполнять следующие шаги.

Шаг 1.

Если все пути из S вместе содержат не менее $|E|/2$ вершин из E , мы переходим к следующему шагу.

Если же все пути из S содержат менее $|E|/2$ вершин из E , мы используем Лемму 2 и образуем новые пути, которые не имеют общих вершин с путями из S для которых выполнены следующие свойства:

- 1) все такие пути имеют длину не меньше l ,
- 2) все эти пути вместе с путями из S содержат не менее $|E|/2$ элементов из E .

Мы добавляем эти новые пути ко множеству S и получаем новое множество S и переходим к следующему шагу.

Шаг 2.

Предположим имеем множество S . Определим множества путей $S_i, S_{i,1}, S_{i,2}$; $1 \leq i \leq I \ll \log q$.

$$S_i = \{s \in S : |s| \in [2^{i-1}l, 2^i l)\}$$

Множества $S_{i,1}, S_{i,2}$ могут быть определены любым образом с выполнением следующих свойств

- 1) $S_i = S_{i,1} \sqcup S_{i,2}$;
- 2) разница количества путей в $S_{i,1}$ и в $S_{i,2}$ не отличается больше чем на единицу.

Когда множества $S_i, S_{i,1}, S_{i,2}$; $1 \leq i \leq I = \frac{\log \frac{|E|}{l}}{\log 2} \ll \log q$ определены мы переходим к следующему шагу.

Шаг 3.

Мы определяем множества A_i, B_i (множество вершин) для каждого $1 \leq i \leq I$. Предположим имеем набор $S_{i,1}, S_{i,2}$.

Рассмотрим $S_{i,1}$. Для каждого пути $s \in S_{i,1}$ мы берем первые t вершин этого пути s , где t произвольно с условием $t \in (0.09|s|, 0.1|s|)$. Мы включаем эти вершины ко множеству A_i .

Множество B_i определяется аналогично A_i , с заменой $S_{i,1}$ на множество $S_{i,2}$.

Когда множества A_i, B_i $1 \leq i \leq I \ll \log q$ определены, мы переходим к следующему шагу.

Шаг 4.

Если существует такое $1 \leq i \leq I$ что $|A_i|, |B_i| \geq 4q^{\frac{d+1}{2}}$, тогда по Лемме 1 существует $x \in A_i, y \in B_i$ и $\|x - y\| = 1$. По определению A_i, B_i существуют два пути $s_1 \in S_{i,1}, s_2 \in S_{i,2}$ и мы можем соединить большие части этих путей s_1, s_2 и образовать новый путь. Мы убираем

пути s_1, s_2 из S и образуем новый путь s из больших частей путей s_1 и s_2 . Мы добавляем путь s во множество S и далее переходим к Шагу 1.

Если такое i не существует мы завершаем наш алгоритм.

Сначала убедимся, что наш алгоритм завершит свою работу. Для этого введем понятие лексикографического порядка на множестве путей из S : мы располагаем пути из S в порядке невозрастания. Соответственно напомним последовательность этих чисел. Лексикографический порядок определяется по этой последовательности чисел. Каждый раз, когда переходим к Шагу 4 и если для некоторого i мы имеем $|A_i|, |B_i| \geq 4q^{\frac{d+1}{2}}$, то лексикографический порядок на множестве S увеличивается. Так как множество E конечно, алгоритм завершит свою работу.

Для некоторого $1 \leq i_0 \leq I$ количество вершин во множестве S_{i_0} есть $\Omega(|E|/\log q)$. Если C является большой константой, тогда легко видеть, что множество S_{i_0} содержит только один путь s . Действительно, иначе мы можем образовать более длинный путь из двух различных путей. Этот путь s удовлетворяет условиям исходной леммы и мы завершаем доказательство.

□

3.1. Доказательство Теоремы 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Сначала, мы можем считать, что $f > C$, где C - есть некоторая абсолютная константа из Леммы 3. Используя опять же предыдущую лемму мы заключаем, что существует путь s_1 длины $\Omega(\frac{|E|}{\log q})$. Далее, определяем $S_1 = s_1$. Предположим, что $n \geq 1$ и путь S_n уже построен. Если

$$|E| - |S_n| \leq Cq^{\frac{d+1}{2}} \log q$$

мы полагаем $S = S_n$ и завершаем наш алгоритм.

Если

$$|E| - |S_n| > Cq^{\frac{d+1}{2}} \log q$$

мы определяем множество E_n как множество всех вершин E , не принадлежащих пути S_n . Далее, мы используем Лемму 3 для множества E_n , и заключаем, что имеется путь s_{n+1} длины $\Omega(\frac{|E_n|}{\log q})$.

Мы определяем A как первые $[4q^{\frac{d+1}{2}} + 1]$ вершин пути S_n и множество B как набор первых $[4q^{\frac{d+1}{2}} + 1]$ вершин пути s_{n+1} . Используя Лемму 1 мы можем образовать новый путь из больших частей путей S_n и s_{n+1} . Определим этот новый путь как S_{n+1} и продолжим алгоритм.

Несложные вычисления показывают, что $|S_{l+1}| > |S_l|$. Путь S удовлетворяет условиям Теоремы 2 и мы завершаем доказательство.

□

4. Заключение

Данная работа посвящается светлой памяти замечательного ученого и академика Юрия Владимировича Линника. Автор хотел бы поблагодарить С. В. Конягина и И. Д. Шкредова за ценные комментарии, советы и внимание к этой работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adhikari S. D., Mukhopadhyay A., Ram Murty M. The analog of the Erdos distance problem in finite fields // Int. J. Number Theory. 2017. Vol. 13, №9. P. 2319–2334.

2. Bennett M., Chapman J., Covert D., Hart D., Iosevich A., Pakianathan J. Long paths in the distance graph over large subsets of vector spaces over finite fields // J. Korean Math. Soc. 2016. Vol. 53, P. 115–126.
3. Chapman J., Erdogan M.B., Hart D., Iosevich A., Koh D. Pinned distance sets, k-simplices, Wolff's exponent in finite fields and sum-product estimates // Math Z. 2012. Vol. 271, №1-2, P. 63–93.
4. Iosevich A., Rudnev M. Erdos distance problem in vector spaces over finite fields // Transactions of the AMS. 2007. Vol. 359, №12, P. 6127–6142.

REFERENCES

1. Adhikari, S.D., Mukhopadhyay, A., Murty, M. Ram. 2017, "The analog of the Erdos distance problem in finite fields", *Int. J. Number Theory* vol. 13, no. 09, pp. 2319–2334.
2. Bennett, M., Chapman, J., Covert, D., Hart, D., Iosevich, A., Pakianathan. 2016, "Long paths in the distance graph over large subsets of vector spaces over finite fields", *J. Korean Math. Soc.* vol. 53, pp. 115–126.
3. Chapman, J., Erdogan, M.B., Hart, D., Iosevich, A., Koh, D. 2012, "Pinned distance sets, k-simplices, Wolff's exponent in finite fields and sum-product estimates", *Math Z.*, vol. 271, no. 1–2, pp. 63–93.
4. Iosevich, A., Rudnev, M. 2007, "Erdos distance problem in vector spaces over finite fields", *Transactions of the AMS*, vol. 359, no. 12, pp. 6127–6142.

Получено 16.07.2018

Принято к печати 15.10.2018