ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 3.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-298-310

О полных рациональных тригонометрических суммах и интегралах[1]

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, Механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова.
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su chubarik2009@live.ru

Аннотация

Найдены асимптотические формулы при $m \to \infty$ для числа решений системы сравнений вида

$$g_s(x_1) + \cdots + g_s(x_k) \equiv g_s(x_1) + \cdots + g_s(x_k) \pmod{p^m}, 1 \le s \le n,$$

где неизвестные $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$ могут принимать значения из полной системы вычетов по модулю p^m, а степени многочленов $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ не превосходят n. Указаны такие многочлены $g_1(x), \ldots, g_n(x)$, для которых эти асимптотики справедливы при $2k > 0,5n(n+1)+1$, а при $2k \le 0,5n(n+1)+1$ данные асимптотики не имеют место.

Кроме того, для многочленов $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ с вещественными коэффициентами, причем степени многочленов не превосходят n, найдена асимптотика среднего значения тригонометрических интегралов вида

$$\int\limits_0^1 e^{2\pi i f(x)}, f(x) = \alpha_1 g_1(x) + \cdots + \alpha_n g_n(x),$$

где осреднение ведётся по всем вещественным параметрам $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Эта асимптотика справедлива при степени осреднения $2k > 0,5n(n+1)+1$, а при $2k \le 0,5n(n+1)+1$ она не имеет места.

Ключевые слова: полные рациональные тригонометрические суммы, тригонометрические интегралы.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
В. Н. Чубариков. О полных рациональных тригонометрических суммах и интегралах // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3, с. 298–310.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 3.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-298-310

On complete rational trigonometric sums and integrals[2]

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-01-00-071
[2]The work was carried out at the financial the support of RFBR, grant № 16-01-00-071

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of mathematical and computer methods of analysis, dean of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su chubarik2009@live.ru

Abstract

Asymptotical formulae as $m \to \infty$ for the number of solutions of the congruence system of a form

$$g_s(x_1) + \cdots + g_s(x_k) \equiv g_s(x_1) + \cdots + g_s(x_k) \pmod{p^m}, 1 \leq s \leq n,$$

are found, where unknowns $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$ can take on values from the complete system of residues modulo p^m, but degrees of polynomials $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ do not exceed n. Such polynomials $g_1(x), \ldots, g_n(x)$, for which these asymptotics hold as $2k > 0,5n(n+1)+1$, but as $2k \leq 0,5n(n+1)+1$ the given asymptotics have no place, were shew.

Besides, for polynomials $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ with real coefficients, moreover degrees of polynomials do not exceed n, the asymptotic of a mean value of trigonometrical integrals of the form

$$\int_0^1 e^{2\pi i f(x)}, f(x) = \alpha_1 g_1(x) + \cdots + \alpha_n g_n(x),$$

where the averaging is lead on all real parameters $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, is found. This asymptotic holds for the power of the averaging $2k > 0,5n(n+1)+1$, but as $2k \leq 0,5n(n+1)+1$ it has no place.

Keywords: complete rational trigonometric sums, trigonometric integrals.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
V. N. Chubarikov, 2018, "On complete rational trigonometric sums and integrals", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 298–310.

Введение

Настоящая работа находится в русле исследований по круговому методу Харди — Литтлвуда — Рамануджана ([1], [2]) в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова ([3], [4]). К этому кругу вопросов относится p-адический метод доказательства теоремы И. М. Виноградова о среднем, открытый в 1942 г. Ю. В. Линником [6], [7]. В 1963 г. А. А. Карацуба и Н. М. Коробов [9], [10] нашли другой p-адический метод и получили новое доказательство теоремы И. М. Виноградова.

Под p-адическим методом в задачах теории чисел понимают использование сравнений по модулю и арифметических функций с периодом, равными степеням простого числа p.

В 1971 г. Г. И. Архипов [11] доказал p-адическим методом первую теорему о среднем для кратных тригонометрических сумм.

Развивая метод И. М. Виноградова, Хуа Ло-кен ([8], стр. 201–276) при $k \geq k_0$, $k_0 \asymp 3k^2 \log k$, $n \geq 11$, вывел асимптотическую формулу вида

$$\lim_{P \to \infty} P^{0,5n(n+1)-2k} J_k(P) = \gamma\theta,$$

где $J_k(P)$ — число решений в целых числах $1 \leq x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k \leq P$ системы уравнений вида

$$x_1^s + \cdots + x_k^s = y_1^s + \cdots + y_k^s (1 \leq s \leq n),$$

причём γ, σ — соответственно особый интеграл и особый ряд рассматриваемой асимптотики

$$\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^1 e^{2\pi i(\alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n)}\, dx \right|^{2k} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n,$$

$$\sigma = \sum_{q_1}^{\infty} \cdots \sum_{q_n}^{\infty} \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1,q_1)=1}}^{q_1} \cdots \sum_{\substack{a_n=1 \\ (a_n,q_n)=1}}^{q_n} \left| (q_1 \ldots q_n)^{-1} \sum_{x=1}^{q_1 \ldots q_n} \exp\left(2\pi i \left(\frac{a_1}{q_1} x + \cdots + \frac{a_n}{q_n} x^n\right)\right) \right|^{2k}.$$

Хуа Ло-кен там же нашёл показатель сходимости $2k_1 = 0,5n(n+1) + 2$ особого ряда σ, т.е. для среднего значения полных рациональных тригонометрических сумм.

Для особого интеграла γ показатель сходимости $2k_2 = 0,5n(n+1)+1$ был найден в 1978 г. Г. И. Архиповым, А. А. Карацубой и автором [12].

В настоящей работе продолжены исследования полных рациональных тригонометрических сумм и тригонометрических интегралов с многочленом общего вида в экспоненте (см. [1]–[15]).

Отметим, что в ряде этапов исследования мы существенно пользуемся результатами из нашей книги [12] и работ Г. И. Архипова [11].

§1. О среднем значении полных рациональных сумм общего вида

Пусть $n \geq 2, a_1, \ldots, a_n$ — натуральные числа,

$$g_s(x) = x^s + \sum_{t=1}^{s-1} \alpha(s,t) x^t, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

— многочлены с целыми коэффициентами.

Пусть, далее, $S(p^m; f)$ обозначает полную рациональную тригонометрическую сумму вида

$$S(p^m; f) = \sum_{x=1}^{p^m} e^{2\pi i f(x)}, \quad f(x) = \sum_{s=1}^{n} \frac{a_s g_s(x)}{p^{m_s}}, \quad (a_s, p) = 1, \quad m_s \leq m.$$

Тогда среднее значение $N(p^m; g)$ этих сумм имеет вид

$$N(p^m; g) = p^{-mn} \sum_{\max\{m_n, \ldots, m_1\} \leq m} \sum_{\substack{a_n=0 \\ (a_n,p)=1}}^{p^{m_n}-1} \cdots \sum_{\substack{a_1=0 \\ (a_1,p)=1}}^{p^{m_1}-1} |S(p^m; f(x))|^{2k}.$$

Положим $t = \max\{m_1, \ldots, m_n\}$. Находим

$$N(p^m; g) = p^{-mn} \sum_{t=0}^{m} \sum_{\substack{a_n=0 \\ (a_n,\ldots,a_1,p)=1}}^{p^t-1} \cdots \sum_{a_1=0}^{p^t-1} \left| S\left(p^m; \frac{a_n g_n(x) + \cdots + a_1 g_1(x)}{p^t}\right) \right|^{2k} =$$

$$= p^{2km-mn} \sum_{t=0}^{m} \sum_{\substack{a_n=0 \\ (a_n,\ldots,a_1,p)=1}}^{p^t-1} \cdots \sum_{a_1=0}^{p^t-1} \left| p^{-t} S\left(p^t; \frac{a_n g_n x^n + \cdots + a_1 g_1(x)}{p^t}\right) \right|^{2k} =$$

$$= p^{m(2k-n)} \sigma(p^m; g). \tag{2}$$

Запишем все рациональные коэффициенты многочлена в экспоненте суммы как дроби со знаменателем p^m. Получим

$$N(p^m; g) = p^{-mn} \sum_{a_n=0}^{p^m-1} \cdots \sum_{a_1=0}^{p^m-1} \left| S\left(p^m; \frac{h(x)}{p^m}\right)\right|^{2k}, \quad h(x) = \sum_{s=1}^{n} a_s g_s(x),$$

что равно числу решений следующей системы сравнений

$$\begin{cases} g_1(x_1) + \cdots + g_1(x_k) \equiv g_1(y_1) + \cdots + g_1(y_k) \pmod{p^m} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ g_n(x_1) + \cdots + g_n(x_k) \equiv g_n(y_1) + \cdots + g_n(y_k) \pmod{p^m}, \end{cases} \tag{3}$$

где неизвестные $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$ принимают значения из полной системы вычетов по модулю p^m.

Если существует $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma(p^m; g) = \sigma_p(g)$, где

$$\sigma_p(g) = 1 + \sum_{t=1}^{+\infty} A(p^t), \tag{4}$$

$$A(p^t) = \sum_{\substack{a_n=0 \\ (a_n,\ldots,a_1,p)=1}}^{p^t-1} \cdots \sum_{a_1=0}^{p^t-1} |p^{-t} S(p^t; (a_n g_n(x) + \cdots + a_1 g_1(x))/p^t)|^{2k}, \tag{5}$$

$$S(p^t; (a_n g_n(x) + \cdots + a_1 g_1(x))/p^t) = \sum_{x=1}^{p^t} e^{2\pi i \frac{a_n g_n(x) + \cdots + a_1 g_1(x)}{p^t}}, \tag{6}$$

то этот предел $\sigma_p(g)$ называется особым рядом системы сравнений (3).

Заметим, что каждое решение системы (3) является решением следующей системы сравнений

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_k \equiv y_1 + \cdots + y_k \pmod{p^m} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n \equiv y_1^n + \cdots + y_k^n \pmod{p^m}, \end{cases} \tag{3$'$}$$

где неизвестные $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$ принимают значения из полной системы вычетов по модулю p^m, и наоборот. Действительно, первые сравнения этих систем совпадают. Второе сравнение системы (3') является линейной комбинацией первого и второго сравнений из (3) и т.д.

Число решений $N(p^m)$ системы (3') равно $p^{m(2k-n)}\sigma(p^m)$. Пусть $\sigma_p = \lim\limits_{m\to\infty} \sigma(p^m)$

Теорема 1. *Особый ряд $\sigma_p(g) = \sigma_p$ сходится при $2k > 0,5n(n+1)+1$ и расходится при $2k \le 0,5n(n+1)+1$.*

§2. Оценка полной суммы

Положим

$$f(x) = \sum_{s=1}^{n} a_s g_s(x), g_s(x) = x^s + \sum_{t=1}^{s-1} \alpha(s,t) x^t, h(y) = f(y+\xi) = \sum_{u=0}^{n} b_u y^u. \tag{7}$$

Имеем

$$h(y) = \sum_{s=1}^{n} a_s \left(\sum_{v=0}^{s} \binom{s}{v} y^v \xi^{s-v} + \sum_{t=1}^{s-1} \alpha(s,t) \sum_{w=0}^{t} \binom{t}{w} y^w \xi^{t-w} \right) =$$

$$= \sum_{v=1}^{n} y^v \sum_{s=v}^{n} a_s \binom{s}{v} \xi^{s-v} + \sum_{s=1}^{n} a_s \sum_{w=1}^{s-1} y^w \sum_{t=w}^{s-1} \alpha(s,t) \binom{t}{w} \xi^{t-w} + f(\xi) =$$

$$= \sum_{v=1}^{n} y^v \sum_{s=v}^{n} a_s \binom{s}{v} \xi^{s-v} + \sum_{v=1}^{n-1} y^v \sum_{s=v+1}^{n} a_s \sum_{t=v}^{s-1} \alpha(s,t) \binom{t}{v} \xi^{t-v} + f(\xi).$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} b_n = a_n, \\ b_{n-1} = a_{n-1} + a_n \binom{n}{n-1} \xi + a_n \alpha(n-1, n-1), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ b_v = a_v + \sum\limits_{s=v+1}^{n} a_s \left(\binom{s}{v} \xi^{s-v} + \sum\limits_{t=v}^{s-1} \alpha(s,t) \binom{t}{v} \xi^{t-v} \right), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ b_1 = a_1 + \sum\limits_{s=2}^{n} a_s \left(\binom{s}{1} \xi^{s-1} + \sum\limits_{t=1}^{s-1} \alpha(s,t) \binom{t}{1} \xi^{t-1} \right). \end{cases} \tag{8}$$

Пусть $(a_1, \dots, a_n, p) = 1$, $w = [\log n / \log p]$, $p^\tau \| (a_1, 2a_2, \dots, na_n)$.
Тогда $\tau \le w$, $p^\tau \| (b_1, 2b_2, \dots, nb_n)$.

Лемма 1. *Пусть $l \ge 2(\tau + 1)$,*

$$S(p^l; f) = \sum_{\nu=1}^{p} S_\nu, \quad S_\nu = \sum_{\substack{x=1 \\ x \equiv \nu \pmod p}}^{p^l} e^{2\pi i \frac{f(x)}{p^l}}.$$

Тогда, если $p^{-\tau} f'(\nu) \equiv 0 \pmod p$, то

$$S_\nu = p^{\tau+1} \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv \nu \pmod p}}^{p^{l-\tau-1}} e^{2\pi i \frac{f(y)}{p^l}},$$

в противном случае $S_\nu = 0$.

Доказательство. Произведем замену переменной суммирования. Имеем

$$x = y + p^{l-\tau-1} z, 1 \le y \le p^{l-\tau-1}, 0 \le z < p^{\tau+1}.$$

Отсюда находим

$$S_\nu = \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv \nu \pmod p}}^{p^{l-\tau-1}} \sum_{z=0}^{p^{\tau+1}-1} e^{2\pi i \frac{f(y + p^{l-\tau-1} z)}{p^l}} =$$

$$= \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv \nu \pmod p}}^{p^{l-\tau-1}} e^{2\pi i \frac{f(y)}{p^l}} \sum_{z=0}^{p^{\tau+1}-1} e^{2\pi i \frac{p^{-\tau} f'(y) z}{p}}.$$

Так как

$$\sum_{z=0}^{p^{\tau+1}-1} e^{2\pi i \frac{p^{-\tau} f'(y) z}{p}} = \begin{cases} p^{\tau+1}, & \text{если} \quad p^{-\tau} f'(y) \equiv 0 \pmod p, \\ 0, & \text{если} \quad p^{-\tau} f'(y) \not\equiv 0 \pmod p, \end{cases}$$

то из этого равенства следует утверждение леммы. $\square$

Заметим, что сравнение

$$p^{-\tau} f'(\nu) \equiv 0 \pmod p, \quad 1 \le \nu \le p, \tag{8}$$

имеет не более $n-1$ решений.

Лемма 2. *Пусть a — корень кратности m многочлена $F(x)$ по простому модулю p, и пусть u — наибольшая степень числа p, делящая все коэффициенты многочлена $H(x) = F(a+px)$. Тогда число корней сравнения $p^{-u}H(x) \equiv 0 \pmod p$ с учётом их кратности, не превосходит m.*

Доказательство. см., например, [12], с. 55, лемма 2. □

Рассмотрим далее любое решение ν_0 сравнения (8). Положим в равенстве (7) $\xi = \nu_0$ и определим показатель $2 \le u_1 \le n$ и многочлен $f_1(y)$ из соотношений

$$p^{u_1} \| (pb_1, p^2b_2, \dots, p^nb_n), f(\nu_0+py) - f(\nu_0) = p^{u_1} f_1(y) = p^{u_1} \sum_{s=1}^{n} c_s y^s,$$

$$(c_1, c_2, \dots, c_n, p) = 1, p^{u_1} c_s = p^s b_s (1 \le s \le n).$$

Таким образом, при $l - u_1 > 2w+1$ получим

$$S_{\nu_0} = e^{2\pi i \frac{f(\nu_0)}{p^l}} \sum_{y=1}^{p^{l-1}} e^{2\pi i \frac{f_1(y)}{p^{l-u_1}}} = p^{u_1-1} e^{2\pi i \frac{f(\nu_0)}{p^l}} S(p^{l-u_1}; f_1).$$

Пусть s — наибольший номер такой, что $(b_s, p) = 1$. Тогда из равенства $p^s b_s = p^{u_1} c_s$ находим, что $n \ge s \ge u_1$. Следовательно, по модулю p степень многочлена $f_1(x)$ не превосходит u_1.

В предыдущем рассуждении многочлен $f(x)$ заменим на $f_1(x)$, а многочлен $h(y)$ на многочлен $h_1(y) = f_1(y+\eta) = \sum\limits_{s=0}^{n} d_s y^s$. Определим τ_1 из условия $p^{\tau_1} \| (c_1, 2c_2, \dots, nc_n)$. Тогда для любого η имеем $p^{\tau_1} \| (d_1, 2d_2, \dots, nd_n)$ по тем же соображениям, что и для набора коэффициентов a_s и $b_s (1 \le s \le n)$. Таким образом, получим

$$S(p^{l-u_1}; f_1) = \sum_{\eta=1}^{p} S_{\nu_0,\eta}, S_{\nu_0,\eta} = \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv \eta \pmod p}}^{p^{l-u_1-\tau_1-1}} e^{2\pi i \frac{f(y)}{p^{l-u_1}}} \sum_{z=0}^{p^{\tau_1+1}-1} e^{2\pi i \frac{p^{-\tau_1} f_1'(y) z}{p}}$$

По лемме 1 для любого η с условием $p^{-\tau_1} f_1'(\eta) \not\equiv 0 \pmod p$ имеем $S_{\nu_0,\eta} = 0$.

Число решений сравнения $p^{-\tau_1} f_1'(\eta) \equiv 0 \pmod p$ не превосходит $u_1 - 1$. Возьмём любое решение $\eta = \nu_1$ этого сравнения. Определим показатель $u_2 = u_2(\nu_0, \nu_1)$ и многочлен $f_2(y)$ условиями

$$p^{u_2} \| (pd_1, p^2d_2, \dots, p^nd_n), p^{u_2} f_2(y) = f_1(\nu_1 + py) - f(\nu_1).$$

при $l - u_1 - u_2 > 2w+1$ получим

$$S_{\nu_0,\nu_1} = e^{2\pi i \frac{f_1(\nu_1)}{p^{l-u_1}}} \sum_{y=1}^{p^{l-u_1-1}} e^{2\pi i \frac{f_2(y)}{p^{l-u_1-u_2}}} = p^{u_2-1} e^{2\pi i \frac{f(\nu_1)}{p^{l-u_1}}} S(p^{l-u_1-u_2}; f_2).$$

Аналогично определяются показатели $u_3, \dots, u_t$, причём число $t = t(\nu_0, \nu_1, \dots)$ находится из условий

$$l - u_1 - \dots - u_{t-1} > 2w+1, l - u_1 - \dots - u_{t-1} - u_t \le 2w+1.$$

Собирая вместе полученные выше результаты, имеем следующее утверждение.

Теорема 2. *Справедлива формула*

$$S(p^l;f)=\sum_{(\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_t)} p^{u_1+u_2+\cdots+u_t-t}e^{2\pi i(\frac{f(\nu_0)}{p^l}+\frac{f_1(\nu_1)}{p^{l-u_1}}+\cdots+\frac{f_{t-1}(\nu_{t-1})}{p^{l-u_1-\cdots-u_{t-1}}})}\times$$

$$\times S(p^{l-u_1-u_2-\cdots-u_t};f_t), \qquad (9)$$

где наборы $(\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_t)$ *пробегает решения системы сравнений* $p^{-\tau_s}f_s(\nu_s)\equiv 0 \pmod p$ $(0\le s\le t)$.

§3. Показатель сходимости особого ряда

Нам понадобятся два утверждения, которые являются следствиями леммы 2.

Лемма 3. *Пусть* $f(x)$ *— многочлен степени* n *с целыми коэффициентами, взаимно простыми в совокупности с простым числом* p. *Тогда количество наборов показателей* $(u_1,u_2,\ldots)$ *многочлена* $f(x)$ *не превосходит* n.

Лемма 4. *Справедливы неравенства*

$$n\ge u_1\ge u_2\ge\cdots\ge 2.$$

Доказательство. см.[12], с. 63, леммы 5 и 6. □

Из леммы 3 следует, что количество решений $(\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_t)$ системы сравнений

$$p^{-\tau_s}f_s(\nu_s)\equiv 0 \pmod p (0\le s\le t),$$

не превосходит n.

Приведем только схему *доказательства теоремы 1.*

1^0. Пусть $f(x)=a_1g_1(x)+\cdots+a_ng_n(x),(a_1,\ldots,a_n,p)=1$ — любой многочлен с целыми коэффициентами, причём многочлены $g_1(x),\ldots,g_n(x)$ заданы соотношениями (1), $(u_1,\ldots,u_t)$ — набор наименьшей длины для многочлена $f(x)$, определённый в теореме 2. Тогда по теореме 2 имеем

$$p^{-l}|S(p^l;f)|\le np^{-t}.$$

2^0. Оценим количество $K(u_1,\ldots,u_t)$ многочленов $f(x)$ с заданной в п.1^0 цепочкой показателей $(u_1,\ldots,u_t)$ наименьшей длины t. Из формул (7), (8), подставляя $\xi=py$, находим

$$f(x)=h(x-\xi)=\sum_{t=0}^{n}b_tg_t(x-\xi),$$

$$\begin{cases} a_n=b_n,\\ a_{n-1}=b_{n-1}+b_n\binom{n}{n-1}(-py)+b_n\alpha(n-1,n-1),\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ a_v=b_v+\sum\limits_{s=v+1}^{n}b_s\left(\binom{s}{v}(-py)^{s-v}+\sum\limits_{t=v}^{s-1}\alpha(s,t)\binom{t}{v}(-py)^{t-v}\right),\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ a_1=b_1+\sum\limits_{s=2}^{n}b_s\left(\binom{s}{1}(-py)^{s-1}+\sum\limits_{t=1}^{s-1}\alpha(s,t)\binom{t}{1}(-py)^{t-1}\right). \end{cases}$$

Поскольку $p^{u_1}\|(pb_1, p^2b_2, \dots, p^nb_n)$, получим $pb_1 = p^{u_1}c_1$, $p^2b_2 = p^{u_1}c_2,\dots,p^nb_n = p^{u_1}c_n$, $(c_1, c_2, \dots, c_n, p) = 1$.

Следовательно,

$$\begin{cases} a_{u_1-1} = p^{u_1-(u_1-1)}c_{u_1-1} + A_{u_1-1}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_v = p^{u_1-v}c_v + A_v, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_1 = p^{u_1-1}c_1 + A_1. \end{cases}$$

Повторяя это рассуждение для показателей $u_2, \dots, u_t$, приходим к системе равенств

$$\begin{cases} a_{u_1-1} = p^{u_1-(u_1-1)}B_{u_1-1} + A^{(t)}_{u_1-1}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{u_2-1} = p^{u_1-(u_2-1)+u_2-(u_2-1)}B_{u_2-1} + A^{(t)}_{u_2-1}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_1 = p^{(u_1-1)+(u_2-1)+\dots+(u_t-1)}B_1 + A^{(t)}_1. \end{cases}$$

Отсюда находим $K(u_1, \dots, u_t) \le p^A$, где

$$A = nl - 0,5u_1(u_1-1) - 0,5u_2(u_2-1) - \dots - 0,5u_t(u_t-1).$$

Положим $U = u_1 + \dots + u_t, B = A - n(l-U)$.

Имеем $l - 2w - 1 \le U \le l, 2 \le u_t \le \dots \le u_1 \le n$. Преобразуем

$$B = nU - \sum_{s=1}^{t} 0,5u_s(u_s-1) = \sum_{s=1}^{t}(nu_s - 0,5u_s(u_s-1)) = \sum_{s=1}^{t} H_s(x),$$

где $H(x) = nx - 0,5x(x-1)$.

Найдем максимум $H(x)$ на отрезке $[2,n]$. Находим $H'(x) = n-x+0,5$. Следовательно, максимум $H(x)$ на отрезке $[2,n]$ достигается в точке $x = n$. Отсюда получим, что $B \le 0,5tn(n+1)$.

Таким образом

$$K(u_1, \dots, u_t) \le p^{B-n(l-U)} \le p^{n(2w+1)}p^{0,5tn(n+1)}.$$

3^0. Оценим количество U_t наборов $(u_1, \dots, u_t)$, отвечающих условиям лемм 3 и 4. Имеем

$$n \ge u_1 \ge u_2 \ge \dots \ge u_t \ge 2, \quad l \ge u_1 + u_2 + \dots + u_t > l - 2w - 1.$$

Отсюда находим $U_t \le l^n$.

4^0. Число N_t многочленов с заданным $(u_1, \dots, u_t)$ не превосходит числа корней $(\nu_0, \dots, \nu_t)$ сравнений (8) с условием $0 \le u_1, \dots, \le u_t < p$. Следовательно, $N_t \le p^t$.

5^0. Таким образом, количество многочленов с цепочкой показателей минимальной длины t не превосходит

$$l^n p^t p^{0,5tn(n+1)+n(2w+1)}$$

6^0. Далее из пп.$1^0, 4^0$ и 5^0 при $t_0 = \max\{1, (l-2w-1)/n\}$ имеем

$$A(p^l) \le \sum_{t \ge t_0} n^{2k} l^n p^{n(2w+1)} p^{-t(2k-0,5n(n+1)+1)}.$$

Отсюда следует искомое утверждение. □

§4. Теорема о среднем для числа решений системы сравнений по модулю, равному степени простого

Теорема 3. *Пусть $n \geq 2, m$ — натуральные числа, $p > n$ — простое число. Тогда при $2k > \frac{n(n+1)}{2} + 1$ и $m \to \infty$ имеем*

$$N(p^m; k; \mathbf{g}) = p^{m(2k-n)}(\sigma_p(g) + O(m^n p^{((m-1)/n))(0{,}5n(n+1)+1-2k)}),$$

где $\mathbf{g} = (g_1(x), \ldots, g_n(x))$.

Доказательство. Так как ряд σ_p сходится при $2k > \frac{n(n+1)}{2} + 1$ и

$$A(p^t) \leq n^{2k}(tp)^n p^{((t-1)/n)(0{,}5n(n+1+1-2k))}$$

(см.[13], с.69), то из формулы (2) имеем

$$N(p^m; k; \mathbf{g}) = p^{m(2k-n)}\sigma(p^m) = p^{m(2k-n)}(\sigma_p + O(m^n p^{((m-1)/n)(0{,}5n(n+1+1-2k))})).$$

Теорема 3 доказана. □

§5. Теорема о среднем для числа решений системы сравнений по модулю, равному факториалу натурального числа

Теорема 4. *Пусть $n \geq 2, m$ — натуральные числа, $M = m!$. Тогда при $2k > \frac{n(n+1)}{2} + 2$ и $m \to \infty$ имеем*

$$N(M) = N(M; k; \mathbf{g}) = M^{2k-n}\sigma(1 + o(1)).$$

Доказательство. Пусть $M = m! = \prod\limits_{p \leq m} p^{\alpha_p}$ — каноническое разложение числа M на простые сомножители. Тогда из мультипликативности функции $N(M)$, сходимости особого ряда и из теоремы 3 имеем

$$N(M) = \prod_{p \leq m} N(p^{\alpha_p}) = \prod_{p \leq m} p^{\alpha_p(2k-n)}(\sigma_p + O(\alpha_p^n p^{((\alpha_p-1)/n))(0{,}5n(n+1)+1-2k)}) =$$

$$= M^{2k-n} \prod_{p \leq m} \sigma_p(1 + O(\alpha_p^n p^{((\alpha_p-1)/n))(0{,}5n(n+1)+1-2k)})) = M^{2k-n}\sigma(1 + o(1)).$$

Теорема доказана. □

§6. Показатель сходимости особого интеграла

Особый интеграл имеет вид

$$\gamma = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \int\limits_0^1 e^{2\pi i f(x)}\, dx \right|^{2k} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n,$$

где $f(x) = \alpha_1 g(x) + \cdots + \alpha_n g_n(x), g_s(x) = x^s + \sum\limits_{t=1}^{s-1} \beta_{s,t} x^t, 1 \leq s \leq n$ и коэффициенты $\alpha_s, \beta_{s,t}$ — вещественные числа.

Пусть Ω — область точек $(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_k)$ в вещественном пространстве размерности $2k$, для которых выполнены условия

$$\left|\sum_{t=1}^{k}(x_t^s-y_t^s)\right|\le h, 0\le x_t,y_t\le 1, s=1,\dots,n.$$

Объём области Ω обозначим символом $\mu(h)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *При $2k>0,5n(n+1)+1$ справедливо предельное равенство*

$$\gamma=\lim_{h\to 0}(2h)^{-n}\mu(h).$$

Доказательство. При $-1<c_1,\dots,c_n<1$ функция

$$F(c_1,\dots,c_n)=\int\limits_{-c_1}^{c_1}\cdots\int\limits_{-c_n}^{c_n}\gamma(z_1,\dots,z_n)\,dz_1\dots dz_n,$$

где

$$\gamma(z_1,\dots,z_n)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\int\limits_0^1 e^{2\pi i f(x)}\,dx\right|^{2k}e^{2\pi i(z_1\alpha_1+\dots+z_n\alpha_n)}\,d\alpha_1\dots d\alpha_n,$$

представляет собой непрерывную функцию ввиду абсолютной сходимости интеграла $\gamma(\mathbf{c}) = \gamma(c_1,\dots,c_n)$.

Таким образом

$$F(\mathbf{c})=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\int\limits_0^1 e^{2\pi i f(x)}\,dx\right|^{2k}\left(\prod_{s=1}^{n}\frac{\sin(2\pi c_s\alpha_s)}{\pi\alpha_s}\right)d\alpha_1\dots d\alpha_n.$$

Для краткости записи положим $\lambda_s=g_s(x_1)+\dots+g_s(x_k)-g_s(y_1)-\dots-g_s(y_k), s=1,\dots,n$. Тогда из предыдущего соотношения имеем

$$F(c_1,\dots,c_s)=\frac{1}{\pi^n}\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1 dx_1\dots dx_k dy_1\dots dy_k\times$$

$$\times\left(\prod_{s=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin(2\pi\alpha_s(\lambda_s+c_s))}{\alpha_s}-\frac{\sin(2\pi\alpha_s(\lambda_s-c_s))}{\alpha_s}\right)d\alpha_s\right).$$

Используя значение интеграла Дирихле

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}a,$$

найдем

$$F(\mathbf{c})=\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1\left(\prod_{s=1}^{n}(\operatorname{sgn}(\lambda_s+c_s)-\operatorname{sgn}(\lambda_s-c_s))\right)dx_1\dots dx_k dy_1\dots dy_k=$$

$$= \underset{-c_s\le\lambda_s\le c_s(1\le s\le n)}{\int_0^1\cdots\int_0^1} dx_1\dots dx_k dy_1\dots dy_k.$$

Отсюда получим

$$g(\mathbf{0}) = \left.\frac{\partial^n F(c_1,\dots,c_n)}{\partial c_1\dots\partial c_n}\right|_{\mathbf{c}=\mathbf{0}} = \lim_{h\to 0}(2h)^{-n}\mu(h),$$

где

$$\mu(h)) = \underset{-h\le\lambda_s\le h(1\le s\le n)}{\int_0^1\cdots\int_0^1} dx_1\dots dx_k dy_1\dots dy_k$$

есть объём области Ω. Теорема доказана. □

Заключение

Приведем результаты и программу дальнейших исследований.

1. Получение при $P>1,\alpha_1,\dots,\alpha_n$ — вещественных числах, возможно более точных оценок тригонометрических сумм вида

$$S(P) = S(P;\alpha_1,\dots,\alpha_n) = S(P;\alpha_1,\dots,\alpha_n;g_1,\dots,g_n) =$$

$$= \sum_{x\le P} e^{2\pi i(\alpha_1 g_1(x)+\dots+\alpha_n g_n(x))},$$

где для многочленов $g_1(x),\dots,g_n(x)$ с вещественными коэффициентами матрица их коэффициентов имеет максимальный ранг, равный n, причем степени многочленов не превосходят n.

2. Доказательство аналога теоремы И. М. Виноградова о среднем: при $k\ge k_0$, $k_0\asymp n^2\ln n$ имеем

$$J = J(P;n,k) = \int_0^1\cdots\int_0^1 |S(P;\alpha_1,\dots,\alpha_n)|^{2k}\,d\alpha\dots d\alpha_n \ll$$

$$\ll c(n,k)P^{2k-0,5n(n+1)},$$

где $c(n,k)$ — положительная постоянная.

3. Точные оценки полных рациональных тригонометрических сумм и интегралов и нахождение их показателей сходимости при условии, что количество многочленов $g_1(x),\dots,g_n(x)$ меньше максимальной из их степеней, например,

$$g_s(x) = x^{s+n} + g_{0,s}(x), s = 1,\dots,n,$$

где степень $g_{0,s}$ меньше, чем $s+n$.

Утверждения, подобные теоремам 1-5 для многочленов $g_1(x),\dots,g_n(x)$ общего вида, получаются аналогичными рассуждениями. Точные формулировки предполагается опубликовать позже.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy G. H., Ramanujan S. Asymptotic formulae in combinatory analysis // Proc. London math Soc.(2), 17(1918), p. 75–115.
2. Hardy G. H., Littlewood J. E. A new solution of Waring problem// Gött.Nachr., 1920, p. 33–54.
3. Виноградов И. М. Sur un théorème génèral de Waring// Мат.сб., 1924, т.31, с. 490–507.
4. Виноградов И. М. О теореме Варинга // Изв.АН СССР, ОФМН, 1928, № 4, с. 393–400.
5. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Наука, 1980.
6. Линник Ю. В. Избранные труды. Теория чисел. Эргодический метод и L-функции. — Л.: Наука, 1979. 432 с.
7. Линник Ю. В. Новые оценки сумм Вейля // Докл. АН СССР, 1942, т.37, № 7, 201–203.
8. Hua Loo-Keng. Selected Papers. — N.-Y., Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1983, pp. 888.
9. Карацуба А. А., Коробов Н. М. О теореме о среднем // Докл. АН СССР, 1963, т.149, № 2, 245–248.
10. Карацуба А. А. Теоремы о среднем и полные тригонометрические суммы // Изв. АН СССР, сер. матем., 1966, т.30, 183–206.
11. Архипов Г. И. Избранные труды. Орел: Изд-во Орловского гос.ун-та, 2013. 464 с.
12. Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука. 1987.
13. Arkhipov G.I., Chubarikov V.N., Karatsuba A.A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. — Berlin–New York: Walter de Gruyter (de Gruyter Expositions in Mathematics 39). 2004.
14. Чубариков В. Н. Кратные полные рациональные арифметические суммы от значений многочлена // Докл.РАН., 2018, т.478, № 1, 22–24.
15. Архипова Л. Г., Чубариков В. Н., Показатель сходимости особого ряда одной многомерной проблемы // Вестн. Моск. ун-та. Сер.I, Математика, механика. 2018. № 5. 58-61.

REFERENCES

1. Hardy G. H., Ramanujan S. Asymptotic formulae in combinatory analysis // Proc. London math Soc.(2), 17(1918), p. 75–115.
2. Hardy G. H., Littlewood J. E. A new solution of Waring problem// Gött.Nachr., 1920, p. 33–54.
3. Vinogradov I. M. Sur un théorème génèral de Waring// Мат.сб., 1924, v.31, p. 490–507.
4. Vinogradov I. M. On Waring's theorem // Izv. AN SSSR, OFMN, 1928, № 4, p. 393–400.
5. Vinogradov I. M. The method of trigonometric sums in the theory of numbers. — Moscow: Nauka, 1980.
6. *Linnik J. V.* Selected papers. The theory of numbers. The ergodic method and L-functions. — Leningrad: Nauka, 1979. pp. 432.

7. *Linnik J. V.* New estimations of Weyl sums// Dokl. AN SSSR, 1942, v.37, № 7, 201–203.

8. Hua Loo-Keng. Selected Papers. — N.-Y., Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1983, pp. 888.

9. *Karatsuba A. A., Korobov N. M.* On the mean-value theorem// Dokl. AN SSSR, 1963, v. 149, № 2, 245–248.

10. *Karatsuba A. A.* Mean-value theorems and complete trigonometric sums// Izv. AN SSSR, ser. math., 1966, v.30, 183–206.

11. *Arkhipov G. I.* Selected Papers. Orjol: Publ. House of the Orjol State University, 2013. pp. 464.

12. Arkhipov G.I., Karatsuba A.A., Chubarikov V.N. The theory of multiple trigonometric sums. — Moscow: Nauka. 1987.

13. Arkhipov G.I., Chubarikov V.N., Karatsuba A.A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. — Berlin–New York: Walter de Gruyter (de Gruyter Expositions in Mathematics 39). 2004.

14. Chubarikov V. N. The multiple complete rational arithmetical sums of polynomial values// Dokl.RAN., 2018, v.478, № 1, 22–24.

15. Arkhipova L. G., Chubarikov V. N. The exponent of convergence of the singular series of a multivariate problem// Bull. of Moscow State Univ. Ser.I, Math., mech. 2018. № 5, 58-61.

Получено 08.08.2018
Принято к печати 15.10.2018